

УДК 532.584

## ОБ ИНЕРЦИОННЫХ ЭФФЕКТАХ НА РАЗРЫВАХ КОНЦЕНТРАЦИИ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ В ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ

Бобков Н. Н., Гупало Ю. П.

В рамках модели двойного континуума [1] анализируется система условий сохранения массы и импульса жидкой и твердой фаз на поверхности разрыва в дисперсной среде. Рассматривается случай высокой концентрации твердых частиц по одну сторону разрыва при малой или равной нулю концентрации их по другую сторону. При этом в области высокой концентрации твердой фазы вдали от разрыва сила инерции жидкой фазы мала по сравнению с силой межфазного взаимодействия и справедлив закон Дарси, а вблизи поверхности разрыва в переходном слое малой толщины обе силы имеют одинаковый порядок величины. Предполагается, что поверхность разрыва непроницаема для частиц твердой фазы. Эффекты, обусловленные возможным наличием на разрыве поверхностного натяжения, не рассматриваются.

В сделанных предположениях строится решение исходной системы уравнений движения и неразрывности фаз в стационарном приближении с учетом переходного слоя, удовлетворяющее условию непрерывности давления и скорости огибающего агента на границах слоя. Замена переходного слоя разрывом приводит к скачкообразному изменению указанных параметров при пересечении разрыва, что в рассматриваемом случае требует модификации полной системы граничных условий на поверхности разрыва [1—3]. Приводятся примеры построения полей течения жидкой и твердой фаз при движении локальной неоднородности концентрации частиц в псевдооживленном слое.

Инерционные (динамические) эффекты на разрывах при медленной фильтрации газа в пористых средах рассматривались ранее [4, 5]. При анализе движения пузырей в псевдооживленном слое использовалась ([6, 7] и др.) безынерционная модель огибающего агента.

**1. Формулировка задачи.** В континуальном приближении огибающий агент и совокупность твердых частиц феноменологически моделируются двумя взаимопроникающими взаимодействующими сплошными средами (жидкая и твердая фаза соответственно). Для простоты предположим, что они обладают свойствами идеальных жидкостей, причем вязкость огибающего агента проявляется лишь на микроуровне и после процедуры усреднения фигурирует в исходных уравнениях только в члене, описывающем межфазное взаимодействие. Плотности  $d_f$  и  $d_s$  огибающего агента и частиц будем считать постоянными. Тогда локально усредненные уравнения сохранения импульса и массы жидкой и твердой фаз можно записать в виде [8]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} d_f \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right] \mathbf{v} &= -\nabla p_f + d_f \epsilon \mathbf{g} - \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla (\epsilon \mathbf{v}) = 0 \\ d_s \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) \right] \mathbf{w} &= -\nabla p_s + d_s \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{w}) = 0 \\ \epsilon + \rho &= 1, \quad \Phi(p_s, \rho, \dots) = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  — скорости,  $p_f$ ,  $p_s$  — давления жидкой и твердой фаз,  $\rho$  — концентрация твердой фазы ( $\epsilon$  — пористость системы),  $\mathbf{g}$  — ускорение внешней массовой силы (силы тяжести). Последнее уравнение (1.1) представляет собой «уравнение состояния» твердой фазы.

Для силы межфазного взаимодействия  $\mathbf{f}$  примем двучленное выражение

$$(1.2) \quad \mathbf{f} = -\rho \nabla p_f - \rho (\mathbf{w} - \mathbf{v}) F(|\mathbf{w} - \mathbf{v}|, \rho)$$

справедливое, в частности, в случае взвеси частиц в газе, когда  $d_f/d_s \ll \ll 1$ . При этом эффекты присоединенных масс не учитываются, а второе слагаемое в (1.2) представляет собой силу межфазного трения без учета силы Бассэ.

Предположим, что распределение концентрации твердой фазы  $\rho = \rho(r, t)$  меняется скачком при пересечении некоторой поверхности, аппроксимирующей переходный слой малой толщины  $\Delta$ , в котором параметры системы претерпевают резкое изменение.

Введем связанную с бесконечно малым плоским элементом поверхности разрыва прямоугольную систему координат  $xyz$ , отсчитывая  $z$  по нормали к поверхности. Условимся отмечать штрихом величины, относящиеся к области течения  $z < 0$ . Скачок какой-либо величины при переходе из области  $z > 0$  в область  $z < 0$  будем обозначать квадратными скобками.

Запишем систему граничных условий на разрыве, полученную ранее [1—3] из интегральных уравнений баланса массы и импульса жидкой и твердой фаз в охватывающем поверхность разрыва элементарном объеме переходом к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} z = 0, \quad [\varepsilon v_z] = 0, \quad [\rho w_z] = 0 \\ \varepsilon v_z [v_\tau] = 0, \quad \rho w_z [w_\tau] = 0, \quad [p_f + \frac{1}{2}d_f v_z^2] = 0 \\ [p_f + p_s + d_f \varepsilon v_z^2 + d_s \rho w_z^2] = 0 \quad ([\zeta] = \zeta' - \zeta) \end{aligned}$$

( $v_\tau, w_\tau$  — компоненты скоростей фаз, касательные к поверхности разрыва).

Система аналогичных условий в модели безынерционной жидкой фазы ( $d_f = 0$ ) имеет вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} z = 0, \quad [\varepsilon v_z] = 0, \quad [\rho w_z] = 0, \quad \rho w_z [w_\tau] = 0 \\ [p_f] = 0, \quad [p_f + p_s + d_s \rho w_z^2] = 0 \end{aligned}$$

Условия (1.3) и (1.4) справедливы для плоского разрыва, а также для элемента поверхности разрыва произвольной кривизны в отсутствие поверхностного натяжения.

Отсутствие в системе (1.4) граничного условия на касательную компоненту скорости жидкой фазы связано с отбрасыванием в безынерционном приближении конвективного слагаемого со старшей (в данном случае первой) производной скорости. Вследствие малости инерционного члена вне прилегающего к разрыву переходного слоя толщиной  $\Delta$  третье условие (1.3) (полученное при  $\Delta \rightarrow 0$ ) можно рассматривать как условие непрерывности касательной составляющей скорости жидкости на границах переходного слоя.

Система условий (1.3) или (1.4) должна быть дополнена соображениями о характере разрыва.

Ограничимся рассмотрением разрывов фиксированной формы в дисперсной системе с постоянным во времени (в системе координат, связанной с разрывом) распределением концентрации твердой фазы. Вдали от разрыва  $z = 0$  система однородна с концентрацией частиц  $\rho$  при  $z > 0$  и  $\rho'$  при  $z < 0$ . Аналогичное условие принималось [6] при анализе движения одиночного газового пузыря в псевдооживленном слое и соответствует простейшему «уравнению состояния» твердой фазы в виде  $\rho = \text{const}$ .

Силу межфазного взаимодействия будем аппроксимировать выражением, линейным по скорости относительного движения частиц и жидкости. В этом случае функцию  $F(|w - v|, \rho)$  в формуле (1.2) в предположении сферической формы и тождественности всех частиц можно представить в виде [8]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} F(|w - v|, \rho) \equiv F(\rho) = K(\rho) \tau_0^{-1} d_s \\ K(\rho) = (1 - \rho)^{-11/4}, \quad \tau_0 = \frac{2}{9} a_p^2 \gamma / \nu_f, \quad \gamma = d_s / d_f \gg 1 \end{aligned}$$

( $\tau_0$  — время релаксации скорости частиц радиуса  $a_p$  в потоке газа с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu_f$ ). Движение фаз в координатной системе, связанной с разрывом, будем считать установившимся.

Запишем стационарные уравнения движения и неразрывности фаз в безразмерном виде. (сохранив для безразмерных величин прежние обозначения), для чего введем следующие масштабы параметров двухфазного течения:  $v_0$ ,  $U_s$  — скорости жидкой и твердой фазы,  $l$  — длины,  $J$ ,  $J'$  — градиентов давления жидкой фазы в областях  $z > 0$  и  $z < 0$ ,  $P$ ,  $P'$  — давлений дисперсной фазы в областях  $z > 0$  и  $z < 0$ .

Например, в случае псевдооживленного слоя  $v_0$  — скорость псевдооживления в области однородного слоя вдали от разрыва [8]:  $v_0 = v_0(\rho) = (1 - \rho) d_{sg} [F(\rho)]^{-1}$ ,  $V_s$  — скорость распространения разрыва в слое, равная, например, в случае движения пузыря скорости его подъема в слое,  $J$  — вес единицы объема слоя в области  $z > 0$ :  $J = (d_f \varepsilon + d_s \rho) g$  (соответственно,  $J' = (d_f \varepsilon' + d_s \rho') g$  при  $z < 0$ ). В задаче о движении газового поршня в аппарате со взвешенным слоем в качестве линейного масштаба  $l$  может быть выбран диаметр аппарата или локальный радиус кривизны поверхности разрыва, а в задаче о движении пузыря или пакета в безграничном псевдооживленном слое — соответствующий характерный размер области неоднородности.

Уравнения (1.1) в стационарном приближении в безразмерных переменных принимают вид]

$$(1.6) \quad \begin{aligned} z > 0, \quad \text{Ar}^* (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -(\varepsilon (\gamma \rho)^{-1} + 1) \nabla p_f + (\gamma \rho)^{-1} \mathbf{i}_g + \delta \mathbf{w} - \mathbf{v} \\ \text{Fr}^* (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} &= -P_s \nabla p_s - (\rho \varepsilon^{-1} + \gamma^{-1}) \nabla p_f + \varepsilon^{-1} \mathbf{i}_g - \delta \mathbf{w} + \mathbf{v} \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{w} = 0, \quad \rho = \text{const} \\ z < 0, \quad \text{Ar}^{*'} (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' &= -\omega_f (\varepsilon' (\gamma \rho')^{-1} + 1) \nabla p_f' + \omega_f (\gamma \rho')^{-1} \mathbf{i}_g + \\ &+ \delta \mathbf{w}' - \mathbf{v}' \\ \text{Fr}^{*'} (\mathbf{w}' \nabla) \mathbf{w}' &= -P_s' \nabla p_s' - \omega_s \varepsilon^{-1} (\rho' + \varepsilon' \gamma^{-1}) \nabla p_f' + \\ &+ \omega_s \varepsilon^{-1} \mathbf{i}_g - \delta \mathbf{w}' + \mathbf{v}' \\ \nabla \mathbf{v}' &= 0, \quad \nabla \mathbf{w}' = 0, \quad \rho' = \text{const}, \quad \mathbf{i}_g = \mathbf{g}/g \end{aligned}$$

Безразмерные параметры связаны с параметрами дисперсной системы следующим образом:

$$(1.7) \quad \text{Ar}^* = \frac{(1 - \rho)^{15/2}}{162 \rho} \text{Ar} \frac{a_p}{l}, \quad \text{Ar}^{*'} = \sigma^{-1} \text{Ar}^*$$

$$\text{Ar} = \frac{8 a_p^3 g \gamma}{\nu_f^2}, \quad \omega_f = \left( \frac{1 - \rho'}{1 - \rho} \right)^{15/4}, \quad \sigma = \frac{\rho'}{\rho \omega_f}$$

$$(1.8) \quad \text{Fr}^* = \frac{U_s^2}{g l (1 - \rho)}, \quad \text{Fr}^{*'} = \omega_s \text{Fr}^*, \quad \omega_s = \left( \frac{1 - \rho'}{1 - \rho} \right)^{11/4}$$

$$(1.9) \quad P_s = \frac{P}{d_s \rho g l \varepsilon}, \quad P_s' = \frac{P' \omega_s}{d_s \rho' g l \varepsilon}, \quad \delta = \frac{U_s}{v_0}$$

Здесь  $\text{Ar}^*$ ,  $\text{Ar}^{*'}$ ,  $\text{Fr}^*$ ,  $\text{Fr}^{*'}$  — модифицированные числа Архимеда и Фруда в областях  $z > 0$  и  $z < 0$ ,  $\text{Ar}$  — число Архимеда.

**2. Анализ граничных условий. Модель дисперсной фазы.** На основании безразмерных уравнений движения (1.6) и соотношений (1.7)—(1.9) проанализируем общие условия сохранения (1.3) на разрыве концентрации в псевдооживленном слое. В соответствии со сказанным в п. 1 ограничимся рассмотрением случая, когда объемная концентрация твердых частиц по одну сторону разрыва мала, а по другую — велика. При этом предполагаем концентрацию частиц в области разреженного слоя настолько малой, что сила инерции жидкой фазы и сила межфазного взаимодействия в этой области имеют одинаковый порядок величины. Пусть для определенности  $\rho' \ll 1$  в области  $z < 0$ , а в области  $z > 0$  слой плотный, так что  $\rho \cong 0,5$ .

Фигурирующие в безразмерных уравнениях сохранения импульса жидкой фазы модифицированные критерии Архимеда  $Ar^*$  и  $Ar^{*'}$  характеризуют относительный вклад инерционных членов в сравнении с силами межфазного взаимодействия. Из физических соображений следует, что с уменьшением концентрации дисперсной фазы в одной из областей течения инерция жидкой фазы становится существенной и влияет на формирование структуры потоков фаз в рассматриваемой области. Отметим, что вкладом инерционного члена нельзя пренебречь также в предельном случае полного отсутствия твердых частиц по одну из сторон разрыва, например при анализе поля течения внутри пузырей в псевдооживленном слое.

Проведем оценку безразмерных параметров в уравнениях (1.6) на основании следующих модельных представлений о дисперсных частицах псевдооживленного слоя. Будем считать частицы достаточно мелкими:  $a_p/l = \lambda \ll 1$  (что соответствует континуальному подходу), тяжелыми:  $\gamma \gg 1$ , а скорость псевдооживления частиц с такими свойствами — конечной. Запишем последнее условие с учетом соотношения для скорости псевдооживления (п. 1), приняв во внимание, что  $U_s \sim (gl)^{1/2}$  [8—10], в виде

$$(2.1) \quad \delta = \frac{U_s}{v_0} \sim (gl)^{1/2} \frac{v_f}{a_p^2 \gamma g} \sim \frac{1}{G_*^{1/2} \lambda^2 \gamma} \sim 1, \quad G_* = \frac{gl^3}{v_f^2}$$

Вместе с предположениями  $\lambda \ll 1$ ,  $\gamma \gg 1$  будем считать  $G_* \gg 1$  (в реальных системах  $G_* = 10^5 \div 10^8$ ). Наряду с малыми параметрами  $\lambda$ ,  $\gamma^{-1}$ ,  $G_*^{-1}$  будем рассматривать в качестве четвертого независимого малого параметра задачи концентрацию частиц  $\rho'$  в области разреженного слоя  $z < 0$ .

Принятое в модели предположение о линейности межфазного взаимодействия (что соответствует малым числам Рейнольдса  $Re_p$  для отдельной твердой частицы) остается приближенно справедливым вплоть до весьма больших значений числа Архимеда: условию  $Re_p = 2a_p v_0(\rho)/v_f \ll 1$  отвечает ограничение  $Ar \ll 20\rho^{-1/4} \cong 10^2 \div 10^3$ ,  $\rho \gtrsim 0,3$  (псевдооживление в плотном слое) [8, 11]. В связи с этим положим  $Ar \sim \lambda^{-m} \gg 1$ , где  $0 < m < 1$  (в случае  $m = 0$   $Ar \sim 1$ ). На основании соотношений (1.7), (2.1) будем иметь  $Ar = 8G_* \lambda^3 \gamma \sim G_*^{1/2} \lambda \sim \lambda^{-m}$ . Это условие дает связь параметров  $G_*$ ,  $\lambda$  в виде  $G_* \sim \lambda^{-2(m+1)}$ .

В области с малой концентрацией твердой фазы, где силы инерции и межфазного взаимодействия являются, по предположению, величинами одного порядка, модифицированное число Архимеда  $Ar^{*'} \sim 1$ . При помощи второго равенства (1.7) получим выражение для параметра  $Ar^{*'}$  в области  $z < 0$  при  $\rho' \ll 1$  в виде  $Ar^{*' } \sim G_* \gamma \lambda^4 / \rho' \sim 1$ . Отсюда следует связь между параметрами  $\rho'$ ,  $\lambda$ :  $\rho' \sim \lambda^{1-m}$ .

Будем, далее, иметь

$$\sigma \sim \lambda^{1-m} \ll 1, \quad \omega_{f,s} \sim 1, \quad Ar^* \sim \lambda^{1-m} \ll 1 \\ \gamma \rho \sim \lambda^{m-1} \gg 1, \quad \gamma \rho' \sim 1$$

При этом для безразмерных межчастичных расстояний  $\kappa$ ,  $\kappa'$  в областях  $z > 0$ ,  $z < 0$  соответственно получим

$$\kappa \sim \rho^{-1/3} \lambda \sim \lambda \ll 1, \quad \kappa' \sim \rho'^{-1/3} \lambda \sim \lambda^{(m+2)/3} \ll 1$$

Таким образом, для рассматриваемого типа разрывов задача определения поля течения жидкой фазы в области плотного слоя характеризуется тем, что исходное уравнение движения газа содержит малый параметр  $Ar^* \sim \lambda^{1-m}$  при старшей производной скорости. Поэтому в плотном слое

вдали от разрыва (на масштабах длины, сравнимых с  $l$ ) инерция газа пренебрежимо мала в сравнении с межфазным трением, так что с точностью до старших по малому параметру  $Ar^*$  членов порядок уравнения, описывающего фильтрацию газа во взвешенном слое, понижается. Действительно, из первого уравнения (1.6) на удалении от разрыва получаем  $-\nabla p_f + \delta w - v = 0$ , что соответствует закону Дарси.

Вместе с тем, наряду с упрощением исходного уравнения в основном объеме плотной части слоя, возникает необходимость рассмотрения вблизи поверхности разрыва переходной области (аналог пограничного слоя Прандтля), в которой инерционный член существен наряду с межфазным взаимодействием. Толщина  $\Delta$  переходной зоны имеет порядок модифицированного числа Архимеда в области плотного слоя:  $\Delta \sim Ar^*$ . Подобные инерционные эффекты вблизи граничных поверхностей при медленной фильтрации в пористых средах исследовались ранее [4].

При помощи второго равенства (1.7) запишем уравнение движения жидкой фазы в области  $z < 0$  в виде

$$(2.2) \quad Ar^* (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = -\omega_f \sigma (\epsilon' / (\gamma \rho')^{-1} + 1) \nabla p_f' + (\gamma \rho)^{-1} \mathbf{i}_g + \sigma (\delta w' - \mathbf{v}')$$

Все слагаемые в (2.2) имеют одинаковый порядок величины:  $O(Ar^*)$ . Следовательно, учет инерции газа в области низкой концентрации дисперсных частиц подразумевает сохранение членов  $O(Ar^*)$  также в уравнении движения жидкой фазы в плотном слое и использование граничного условия на скачок давления газа на разрыве в виде  $[p_f + 1/2 d_f v_z^2] = 0$ . В нулевом приближении по малому параметру  $Ar^* \sim \lambda^{1-m}$  ограничиваются анализом уравнения Дарси в плотной части слоя, полагая на поверхности разрыва  $p_f = 0$ ,  $[p_f] = 0$  [6].

Таким образом, построение полей течения и распределения давлений фаз в дисперсной системе с «сильным» разрывом концентрации предполагает интегрирование исходных уравнений (1.6) внутри переходного слоя и вне его с последующим сращиванием решений на условных границах переходной области. В рамках модели, допускающей непрерывное изменение концентрации дисперсной фазы в переходном слое от  $\rho'$  до  $\rho$ , полученные решения при сращивании должны удовлетворять требованию непрерывности параметров двухфазного течения. В пренебрежении толщиной переходного слоя эти параметры при пересечении поверхности разрыва изменяются скачком.

В уравнениях движения твердой фазы в (1.6) модифицированное число Фруда  $Fr^* \sim 1$ . Действительно, многочисленные эксперименты и теоретические оценки показывают, что при движении пузырей и газовых поршней, например, скорость их подъема в псевдооживленном слое  $U_s \sim (gl)^{1/2}$ . Важно подчеркнуть, что в соответствии с равенствами (1.8) отношение величины инерционного члена в твердой фазе к силе межфазного взаимодействия не зависит от концентрации частиц в слое, т. е. всегда  $Fr^*/Fr^{*'} \sim 1$ . Будем предполагать также, что числа подобия  $P_s, P_s'$  имеют порядок единицы.

**3. Движение фаз в переходном слое.** Подобно тому, как это предполагается в теории пограничного слоя, будем считать, что поля скоростей и распределения давлений фаз вне переходной области известны из решения соответствующей задачи о движении двухфазного потока с разрывом концентрации.

Введем в области переходного слоя новые безразмерные координаты  $\eta, \vartheta, n$  по формулам

$$(3.1) \quad \eta = x, \quad \vartheta = y, \quad n = \text{Ar}^{*-1}z \quad (\eta, \vartheta, n \sim 1)$$

где  $\eta, \vartheta$  — касательные координаты,  $n$  — растянутая нормальная к границе координата. В качестве масштаба давления жидкой фазы в переходном слое в соответствии с (1.6) целесообразно выбрать величину перепада на разрыве  $[p_f] \sim d_f v_0^2$  (другие масштабы остаются теми же, что и при выводе уравнений (1.6)).

Записывая безразмерные исходные уравнения (1.1) ( $\partial/\partial t = 0$ ) в переменных (3.1) и сравнивая порядки членов, приходим к следующей системе уравнений движения и неразрывности фаз в переходном слое:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} v_n^\circ \frac{\partial v_\tau^\circ}{\partial n} &= \sigma(\rho^\circ, \rho) (\delta w_\tau^\circ - v_\tau^\circ) \\ v_n^\circ \frac{\partial v_n^\circ}{\partial n} &= -\frac{\partial p_f^\circ}{\partial n} + \sigma(\rho^\circ, \rho) (\delta w_n^\circ - v_n^\circ) \\ w_n^\circ \frac{\partial w_\tau^\circ}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \text{Fr}^* \frac{w_n^{\circ 2}}{2} + P_s^\circ p_s^\circ \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} (\varepsilon^\circ v_n^\circ) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} (\rho^\circ w_n^\circ) = 0 \\ \rho^\circ &= \rho^\circ(\rho, \rho') = \begin{cases} \rho, & n \rightarrow \infty \\ \rho', & n \rightarrow 0 \end{cases}, \quad \sigma(\rho^\circ, \rho) = \begin{cases} 1, & n \rightarrow \infty \\ O(\text{Ar}^*), & n \rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $v_\tau^\circ, w_\tau^\circ$  — касательные к разрыву компоненты скоростей фаз (см. (1.3)),  $\rho^\circ(\rho, \rho')$  — некоторая функция своих аргументов, обладающая указанными свойствами (фактически — уравнение состояния твердой фазы в переходном слое). Параметры течения в области переходного слоя в (3.2) и везде далее отмечаются индексом  $^\circ$ .

Условия асимптотического сращивания решения системы (3.2) с решениями вне переходного слоя запишем в виде

$$(3.3) \quad \begin{aligned} n \rightarrow \infty, \quad A^\circ(\eta, \vartheta, n) &\rightarrow A(\eta, \vartheta, 0) = \lim_{z \rightarrow +0} A(x, y, z) \\ n \rightarrow 0, \quad A^\circ(\eta, \vartheta, n) &\rightarrow A'(\eta, \vartheta, 0) = \lim_{z \rightarrow -0} A(x, y, z) \end{aligned}$$

где символ  $A$  означает любую из трех величин:  $v_n, v_\tau, p_f$ . В последнем случае  $|A(\eta, \vartheta, 0)| = \infty$  ввиду того, что для отношения величин масштабов давления жидкой фазы в плотном слое и в переходной области имеем  $d_s \rho g l / (d_f v_0^2) = O(\text{Ar}^{*-1}) \gg 1$ .

Рассмотрим ряд частных случаев, в которых система (3.2) упрощается.

1°. *Фильтрация в однородном пористом теле* ( $w \equiv 0, \rho^\circ = \text{const} = \rho, \sigma(\rho^\circ, \rho) = 1$ ). Переходно-слоиные уравнения (3.2) принимают вид [4]

$$(3.4) \quad v_n^\circ \frac{\partial v_\tau^\circ}{\partial n} = -v_\tau^\circ, \quad \frac{\partial p_f^\circ}{\partial n} = -v_n^\circ, \quad \frac{\partial v_n^\circ}{\partial n} = 0$$

Интегрирование системы (3.4) дает

$$(3.5) \quad \begin{aligned} v_n^\circ &= l(\eta, \vartheta), \quad p_f^\circ = -f(\eta, \vartheta)n + \varphi(\eta, \vartheta) \\ v_\tau^\circ &= \Psi(\eta, \vartheta) \exp(-n/f(\eta, \vartheta)) \end{aligned}$$

Неизвестные функции  $f(\eta, \vartheta), \varphi(\eta, \vartheta), \Psi(\eta, \vartheta)$  должны быть определены из условий сращивания (3.3). Очевидно,  $f(\eta, \vartheta) = v_n(\eta, \vartheta, 0)$ . Отметим, что на участках поверхности переходного слоя, где  $f(\eta, \vartheta) > 0$ , жидкость втекает в область плотного слоя. Напротив, при  $f(\eta, \vartheta) < 0$  на части поверхности разрыва жидкость вытекает из области плотного слоя в область разреженного.

В рассматриваемой модели разрыва не удается удовлетворить условию (3.3) для нормальной компоненты скорости жидкой фазы при  $n \rightarrow 0$ . В этом случае на границе переходного слоя с областью малой концентрации частиц будет скачок нормальной составляющей скорости, равный

$$v_n'(\eta, \vartheta, 0) - v_n(\eta, \vartheta, n) = f(\eta, \vartheta) (\varepsilon/\varepsilon' - 1)$$

Соответствующий скачок давления ожижающего агента на границе  $n = 0$  равен  $[p_f] = -[1/2 v_n^2]$ . Последнее условие определяет функцию  $\varphi(\eta, \vartheta)$  в виде

$$\varphi(\eta, \vartheta) = 1/2 f^2(\eta, \vartheta) (\varepsilon^2/\varepsilon'^2 - 1) + p_f'(\eta, \vartheta, 0)$$

Из второго соотношения (3.5) следует, что если  $f(\eta, \vartheta) > 0$  ( $f < 0$ ), то градиент давления в переходном слое отрицателен (положителен), что соответствует падению (росту) давления при втекании газа в плотный слой (вытекании газа из области плотного слоя).

Из третьего равенства (3.5) и условий сращивания (3.3) следует, что на участках втекания ввиду сильных ограничений, накладываемых на систему (3.2) в рамках принятой модели, распределение касательной скорости газа в переходном слое не может быть непрерывно сращено с обоими распределениями  $v_\tau(\eta, \vartheta, 0)$  и  $v_\tau'(\eta, \vartheta, 0)$  вне переходной области. Поскольку при этом  $v_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $f(\eta, \vartheta) < 0$ , что физически нереально, на участках вытекания ожижающего агента из плотной части слоя переходной области не образуется (ср. [4]).

2°. *Разрыв концентрации дисперсной фазы в псевдооживленном слое.* Рассмотрим дисперсную систему более сложного вида — псевдооживленный слой ( $w \neq 0$ ). Предположим, что поверхность разрыва непроницаема для твердых частиц, т. е.  $w_n = w_n' = 0$ ,  $z = 0$ . Разрывом такого типа является, например, граница между взвешенным слоем и областью, занятой чистым ожижающим агентом. Пусть, как и в предыдущей модели,  $\rho^\circ = \text{const} = \rho$  ( $\sigma(\rho^\circ, \rho) = 1$ ). Из предпоследнего уравнения системы (3.2) при  $\rho^\circ = \text{const}$  следует  $\partial w_n^\circ / \partial n = 0$ , откуда  $w_n^\circ(\eta, \vartheta) = w_n(\eta, \vartheta, 0) \equiv \equiv \lim_{z \rightarrow +0} w_z(x, y, z) = 0$  по условию. Таким образом,  $w_n^\circ = 0$  в переходной области.

Уравнения (3.2) принимают вид

$$(3.6) \quad v_n^\circ \frac{\partial v_\tau^\circ}{\partial n} = \delta w_\tau^\circ - v_\tau^\circ, \quad \frac{\partial p_f^\circ}{\partial n} = -v_n^\circ, \\ \frac{\partial p_s^\circ}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v_n^\circ}{\partial n} = 0$$

( $w_\tau^\circ = w_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n)$  — произвольная функция).

Интегрирование второго и пятого уравнений (3.6) рассмотрено выше в п. 1°. Из четвертого уравнения (3.6) следует

$$p_s^\circ = p_s^\circ(\eta, \vartheta) = p_s(\eta, \vartheta, 0) \equiv \lim_{z \rightarrow +0} p_s(x, y, z)$$

т. е. распределение давления твердой фазы в области плотного слоя непрерывно вплоть до границы  $n = 0$ .

Скачок давления  $p_s$ , определяемый общей системой граничных условий (1.3), сосредоточен на этой границе. В известных решениях (например, [6, 7, 10]) при фиксировании формы разрыва в предположении стационарности полей течения и давлений фаз граничному условию для давления в дисперсной фазе удается удовлетворить не на всей поверхности разрыва, а лишь локально, в окрестностях некоторых ее точек. Это поз-

воляет оценить значение скорости  $U_s$ , т.е. величину фигурирующего в уравнениях параметра  $\delta$ .

Решение первого уравнения (3.6) представим в виде

$$(3.7) \quad v_{\tau}^{\circ\pm}(\eta, \vartheta, n) = \varphi^{\pm}(\eta, \vartheta) \exp(-n/f(\eta, \vartheta)) + I^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$$

$$I^{\pm}(\eta, \vartheta, n) =$$

$$= \frac{1}{f(\eta, \vartheta)} \exp\left(-\frac{n}{f(\eta, \vartheta)}\right) \int_{\substack{-\infty, f>0 \\ +\infty, f<0}}^n \exp\left(\frac{n'}{f(\eta, \vartheta)}\right) \chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n') dn'$$

$$\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n) \equiv \delta w_{\tau}^{\circ}(\eta, \vartheta, n)$$

Здесь и везде далее верхний индекс плюс означает параметры на участках втекания ( $f > 0$ ), а минус — вытекания ( $f < 0$ ) жидкой фазы из плотного слоя.

В отличие от модели п. 1° распределение  $v_{\tau}^{\circ}$  в (3.7) зависит теперь от двух произвольных функций:  $\varphi^{\pm}(\eta, \vartheta)$  и  $\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$ , что позволяет сравнить это распределение с решениями  $v_{\tau}$  и  $v_{\tau}'$  вне переходного слоя.

Поведение функции  $I^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$  при  $n \rightarrow 0, \infty$  определяется некоторыми предельными и дифференциальными свойствами распределения касательной составляющей скорости твердой фазы в области переходного слоя. Предположим, например, что функции  $\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$  при  $n \rightarrow 0$  представимы в виде равномерно по  $\eta, \vartheta$  сходящихся степенных рядов, т.е. являются аналитическими вблизи плоскости  $n = 0$ . В этом случае

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow 0} I^{\pm}(\eta, \vartheta, n) = \sum^{\pm}(\eta, \vartheta)$$

$$\sum^{\pm}(\eta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^k(\eta, \vartheta) \frac{\partial^k}{\partial n^k} \chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n) \Big|_{n=0}$$

Допуская, что функции  $\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$  при  $n \rightarrow +\infty$  равномерно по  $\eta, \vartheta$  имеют предел и представимы сходящимися асимптотическими рядами, получим

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty, f \geq 0} I^{\pm}(\eta, \vartheta, n) = a_0^{\pm}(\eta, \vartheta) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty, f \geq 0} \chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$$

На основании выражений (3.8), (3.9) из условий срачивания (3.3) находим, что для функций  $\varphi^{\pm}(\eta, \vartheta)$ ,  $\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$  на участках втекания и вытекания соответственно должны быть выполнены соотношения

$$(3.10) \quad f(\eta, \vartheta) > 0, \quad a_0^+(\eta, \vartheta) = v_{\tau}^+(\eta, \vartheta, 0),$$

$$\varphi^+(\eta, \vartheta) = v_{\tau}'(\eta, \vartheta, 0) - \sum^+(\eta, \vartheta)$$

$$f(\eta, \vartheta) < 0, \quad a_0^-(\eta, \vartheta) = v_{\tau}^-(\eta, \vartheta, 0)$$

$$\varphi^-(\eta, \vartheta) = 0, \quad \sum^-(\eta, \vartheta) = v_{\tau}'(\eta, \vartheta, 0)$$

причем ряды предполагаются сходящимися равномерно по  $\eta, \vartheta$ .

Из формул (3.10) следует, что необходимость удовлетворить условиям асимптотического срачивания касательных компонент скорости ожижающего агента на границах области переходного слоя при вытекании газа из плотного слоя ( $f < 0$ ) накладывает на функцию  $\chi^{\pm}(\eta, \vartheta, n)$ , описывающую распределение касательной скорости твердой фазы в переходном слое, более жесткие ограничения, чем в случае участков втекания, где требуется лишь, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi^+(\eta, \vartheta, n) = v_{\tau}^+(\eta, \vartheta, 0)$$

В качестве примера рассмотрим простое модельное распределение касательной скорости дисперсной фазы в переходном слое  $\chi = \delta w_\tau^\circ$  в виде

$$\begin{aligned} f(\eta, \vartheta) > 0, \quad \chi^+(\eta, \vartheta, n) &= a_0^+(\eta, \vartheta) + b_0^+(\eta, \vartheta) e^{-n} \\ f(\eta, \vartheta) < 0, \quad \chi^-(\eta, \vartheta, n) &= a_0^-(\eta, \vartheta) + b_0^-(\eta, \vartheta) e^{-n} \end{aligned}$$

На участках втекания и вытекания соответственно будем иметь

$$(3.11) \quad \begin{aligned} f > 0, \quad a_0^+(\eta, \vartheta) &= v_\tau^+(\eta, \vartheta, 0), \quad \varphi^+(\eta, \vartheta) = \Delta_\tau^+(\eta, \vartheta) - \\ &- b_0^+(\eta, \vartheta) (1 - f(\eta, \vartheta))^{-1} \\ f < 0, \quad a_0^-(\eta, \vartheta) &= v_\tau^-(\eta, \vartheta, 0), \quad \varphi^-(\eta, \vartheta) = 0, \\ b_0^-(\eta, \vartheta) &= \Delta_\tau^-(\eta, \vartheta) (1 - f(\eta, \vartheta)) \end{aligned}$$

при условии  $|f(\eta, \vartheta)| < 1$  равномерно по  $\eta, \vartheta$  (напомним, что  $f(\eta, \vartheta)$  — безразмерная нормальная компонента скорости жидкой фазы в области плотного слоя, т. е.  $|f(\eta, \vartheta)| \sim 1$ ). В соотношениях (3.11)  $\Delta_\tau^\pm(\eta, \vartheta) = v_\tau^\pm(\eta, \vartheta, 0) - v_\tau'(\eta, \vartheta, 0)$  — скачок касательной компоненты скорости газа при переходе через разрыв.

Отметим, что функция  $\chi^\pm(\eta, \vartheta, n)$  в соответствии с (3.11) однозначно определяется условиями сращивания на участках вытекания, тогда как на участках втекания функция  $b_0^+(\eta, \vartheta)$ , вообще говоря, произвольна. Если потребовать, чтобы касательная компонента скорости твердой фазы была непрерывна на границе  $n = 0$  (требование это дополнительное и не следует необходимо из граничных условий (1.3), так как при  $w_n|_{z=0} = w_n'|_{z=0} = 0$  скачок  $w_\tau$  на разрыве может быть произвольным), то получим

$$b_0^+(\eta, \vartheta) = \delta w_\tau'^+(\eta, \vartheta, 0) - a_0^+(\eta, \vartheta) = \delta w_\tau'^+(\eta, \vartheta, 0) - v_\tau^+(\eta, \vartheta, 0)$$

Известно [5], что в задаче о движении сферического пузыря в псевдооживленном слое поля скоростей вне пузыря обладают свойством  $v_\tau(\eta, \vartheta, 0) = \delta w_\tau(\eta, \vartheta, 0)$ , откуда следует

$$v_\tau(\eta, \vartheta, 0) = a_0(\eta, \vartheta) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta w_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n) = \lim_{z \rightarrow +0} \delta w_\tau(x, y, z)$$

т. е. непрерывность касательной скорости твердой фазы на границе  $n = +\infty$  переходной области с плотным слоем (что справедливо, очевидно, как для участков втекания, так и вытекания).

Существенным различием моделей, рассмотренных в пп. 1°, 2°, является то, что в случае неподвижной дисперсной фазы поток за задней кромкой неоднородности ( $f < 0$ ) распространяется без образования переходного слоя [4]. Как отмечалось выше, ограничения модели не позволяют непрерывно срастить на границах переходного слоя ( $f > 0$ ) распределения  $v_\tau(x, y, z)$ ,  $v_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n)$ ,  $v_\tau'(x, y, z)$ .

В модели с подвижной дисперсной фазой переходный слой формируется на поверхности разрыва независимо от направления, в котором разрыв пересекается потоком жидкой фазы. В нулевом приближении по толщине переходного слоя условие непрерывности касательной компоненты скорости жидкой фазы при пересечении разрыва не является необходимым вдоль всей его поверхности.

3°. *Разрыв в псевдооживленном слое с непрерывным распределением концентрации дисперсной фазы в переходной области.* Система переходнослойных уравнений в рассматриваемой модели имеет вид

$$(3.12) \quad \begin{aligned} v_n^\circ \frac{\partial v_\tau^\circ}{\partial n} &= \sigma(\eta, \vartheta, n) (\delta w_\tau^\circ - v_\tau^\circ), \quad v_n^\circ \frac{\partial v_n^\circ}{\partial n} = - \frac{\partial p_f^\circ}{\partial n} - \sigma(\eta, \vartheta, n) v_n^\circ \\ \frac{\partial p_s^\circ}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} (\varepsilon^\circ v_n^\circ) = 0, \quad w_n^\circ = 0 \\ \rho^\circ &= \rho^\circ(\rho, \rho') = \begin{cases} \rho, & n \rightarrow +\infty \\ \rho', & n \rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\delta w_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n) \equiv \chi(\eta, \vartheta, n)$  — произвольная функция (как и прежде, рассматриваются непроницаемые для частиц разрывы).

Введение непрерывного распределения концентрации в переходном слое, дающее при интегрировании системы (3.12) дополнительный произвол в виде некоторой функции  $\rho^\circ$  с указанными свойствами при  $n \rightarrow 0, +\infty$ , позволяет получить непрерывные на границах переходной области распределения давления и нормальной компоненты скорости оживающего агента. В частности, в последнем случае  $v_n^\circ = f(\eta, \vartheta)/\varepsilon^\circ$ , где  $f(\eta, \vartheta) = \varepsilon v_n(\eta, \vartheta, 0) = \varepsilon' v_n'(\eta, \vartheta, 0)$  в соответствии с условиями сращивания (3.3) и первым условием (1.3). Предполагается, что функция  $\rho^\circ(\eta, \vartheta, n)$  и связанные с ней функции  $\varepsilon^\circ, \sigma(\rho^\circ, \rho)$  удовлетворяют дополнительным ограничениям, накладываемым на них при построении непрерывных «с учетом» переходного слоя распределений  $v_z, p_f$ .

Для касательной к разрыву составляющей скорости газа получаем выражение

$$\begin{aligned} v_\tau^{\circ\pm}(\eta, \vartheta, n) &= \Phi^\pm(\eta, \vartheta) E(\eta, \vartheta, n) + I^\pm(\eta, \vartheta, n) \\ I^\pm(\eta, \vartheta, n) &= \frac{E(\eta, \vartheta, n)}{f(\eta, \vartheta)} \int_{\substack{-\infty, f > 0 \\ +\infty, f < 0}}^n E^{-1}(\eta, \vartheta, n') \kappa^\pm(\eta, \vartheta, n') dn' \\ E(\eta, \vartheta, n) &= \exp \left[ -\frac{1}{f(\eta, \vartheta)} \int_0^n \sigma(\eta, \vartheta, n_1) \varepsilon^\circ(\eta, \vartheta, n_1) dn_1 \right] \\ \kappa^\pm(\eta, \vartheta, n) &= \chi^\pm(\eta, \vartheta, n) \sigma(\eta, \vartheta, n) \varepsilon^\circ(\eta, \vartheta, n) \end{aligned}$$

которое переходит в соотношение (3.7) при  $\sigma(\rho^\circ, \rho) = 1$ .

Предположим, что существуют пределы

$$(3.13) \quad I_\infty^\pm(\eta, \vartheta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I^\pm(\eta, \vartheta, n), \quad I_0^\pm(\eta, \vartheta) = \lim_{n \rightarrow 0} I^\pm(\eta, \vartheta, n)$$

Ввиду произвольности функции  $\chi^\pm(\eta, \vartheta, n) = \delta w_\tau^\circ(\eta, \vartheta, n)$  для непроницаемых разрывов требования (3.13) являются весьма общими, что позволяет построить непрерывное во всей области течения распределение  $v_\tau$ , если известно решение вне переходного слоя. Из условий сращивания (3.3) при этом следует

$$\begin{aligned} f(\eta, \vartheta) > 0, \quad v_\tau^+(\eta, \vartheta, 0) &= I_\infty^+(\eta, \vartheta), \\ \Phi^+(\eta, \vartheta) &= v_\tau'(\eta, \vartheta, 0) - I_0^+(\eta, \vartheta) \\ f(\eta, \vartheta) < 0, \quad v_\tau^-(\eta, \vartheta, 0) &= I_\infty^-(\eta, \vartheta), \quad \Phi^-(\eta, \vartheta) = 0, \\ v_\tau'(\eta, \vartheta, 0) &= I_0^-(\eta, \vartheta) \end{aligned}$$

Оценим безразмерную толщину  $\Delta$  переходной области на разрыве. Из соотношений (2.1) следует, что  $\Delta \sim \text{Ar}^* \sim \lambda^{1-m}$ . Отсюда видно, что выбором величин  $m \in (0, 1)$  и  $\lambda$  можно добиться того, что толщина переходного слоя по отношению к межчастичному расстоянию  $\Delta/\kappa$ ,  $\kappa \sim \lambda$  будет достаточно большой ( $\Delta/\kappa \sim \lambda^{-m}$ ) для соблюдения условия применимости континуального подхода для описания течения в переходной области и вместе с тем достаточно малой по сравнению с величиной макронеоднородности (пакета, пузыря). Последнее обстоятельство позволяет пренебречь наличием переходной области при описании течения вдали от разрыва.

В нулевом приближении по толщине переходного слоя система граничных условий (1.3) должна быть изменена. В частности, на непроницаемом для дисперсионной фазы «сильном» разрыве ( $\rho \gg \rho'$ ) касательная компонента скорости оживающего агента может испытывать произвольный скачок даже в случае ненулевого потока газа через поверхность разрыва ( $v_n \neq 0$ ). Изменение параметров  $p_f, v_n, v_\tau, P_f = p_f + 1/2 v_n^2$  при пересече-

чении разрыва схематически изображено на фиг. 1 в двух случаях: с учетом переходного слоя и в предположении бесконечно тонкой переходной зоны.

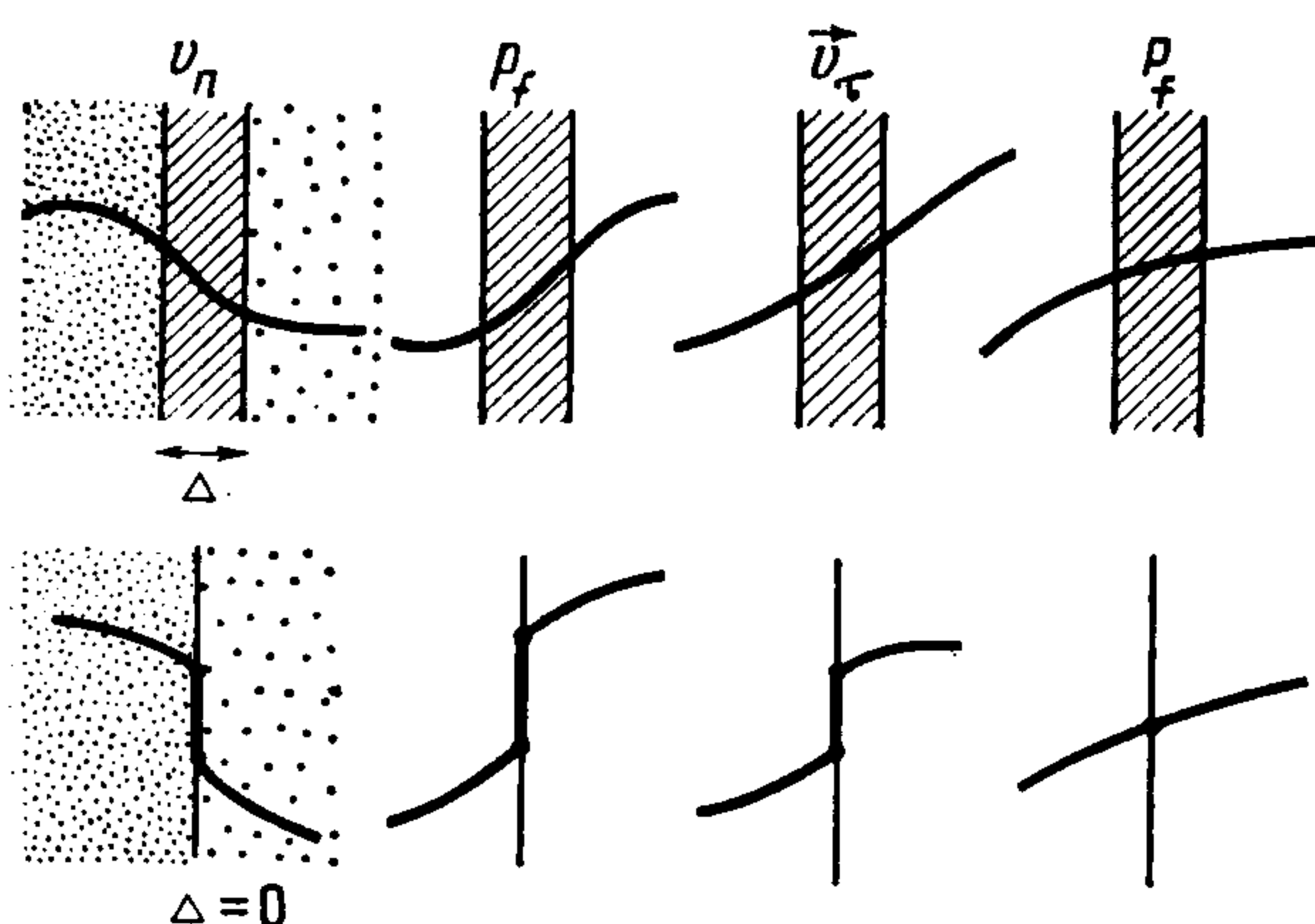
Модифицированная система граничных условий на разрыве рассматриваемого типа в приближении  $\Delta = 0$  имеет вид

$$(3.14) \quad [\epsilon v_z] = 0, \quad w_z = 0, \quad w_z' = 0, \quad [p_f] = -\frac{1}{2} d_f [v_z^2] \\ [p_f + p_s + d_f \epsilon v_z^2] = 0$$

В модели малой, но конечной инерции изменение динамического давления жидкой фазы при пересечении разрыва следует учитывать при построении поля течения газа в области

низкой концентрации частиц (см. п. 2, (2.2)).

В модели безынерционного ожижающего агента ( $d_f = 0$ ) на границе слоя с областью, заполненной чистым газом, приближенно полагают [5, 8]



Фиг. 1

$$[\epsilon v_z] = 0, \quad w_z = 0, \quad p_f = \text{const}, \\ p_\Sigma = \text{const}, \quad p_\Sigma = p_f + p_s$$

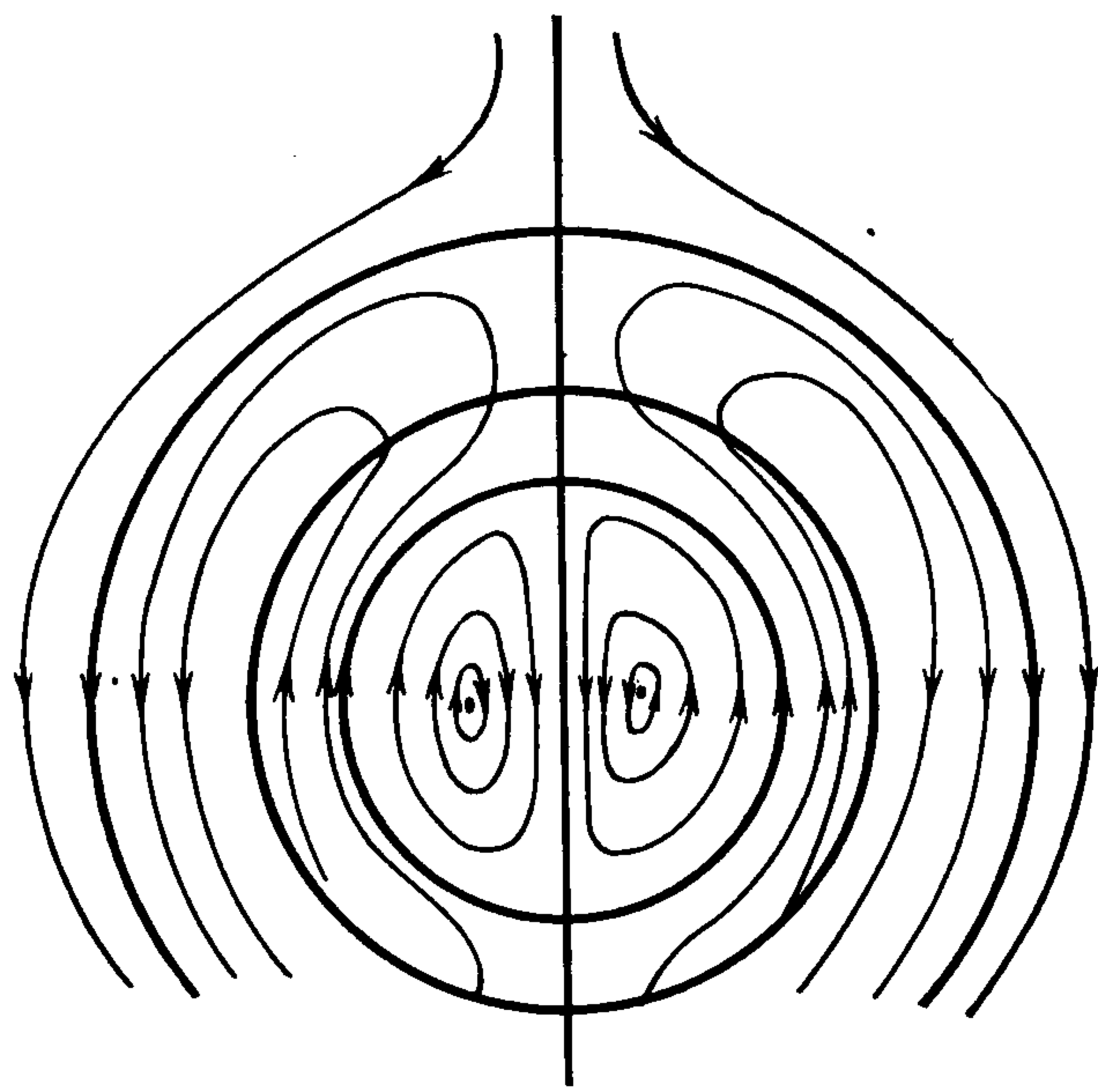
В рамках этой модели, вообще говоря, теряется информация о картине течения жидкой фазы вне плотного слоя.

4. Движение пузыря в псевдооживленном слое. На основании полученных результатов рассмотрим модельную задачу о квазистационарном движении в псевдооживленном слое постоянной по форме и размерам сферической полости, свободной от твердых частиц ([6—8, 12] и др.). Физическая постановка задачи об отыскании полей течения ожижающего агента и дисперсной фазы в окрестности пузыря включает исходные уравнения (1.1) ( $\partial/\partial t = 0$ ) в предположении линейности межфазного взаимодействия (см. (1.2), (1.5)), граничные условия (3.14), которые должны выполняться на сферической поверхности пузыря, являющейся поверхностью разрыва концентрации частиц рассмотренного выше типа, а также условия равномерности потоков газа и частиц вдали от неоднородности. Используется связанная с центром пузыря сферическая система координат  $(r, \theta, \varphi)$ , полярная ось которой параллельна вектору внешней массовой силы.

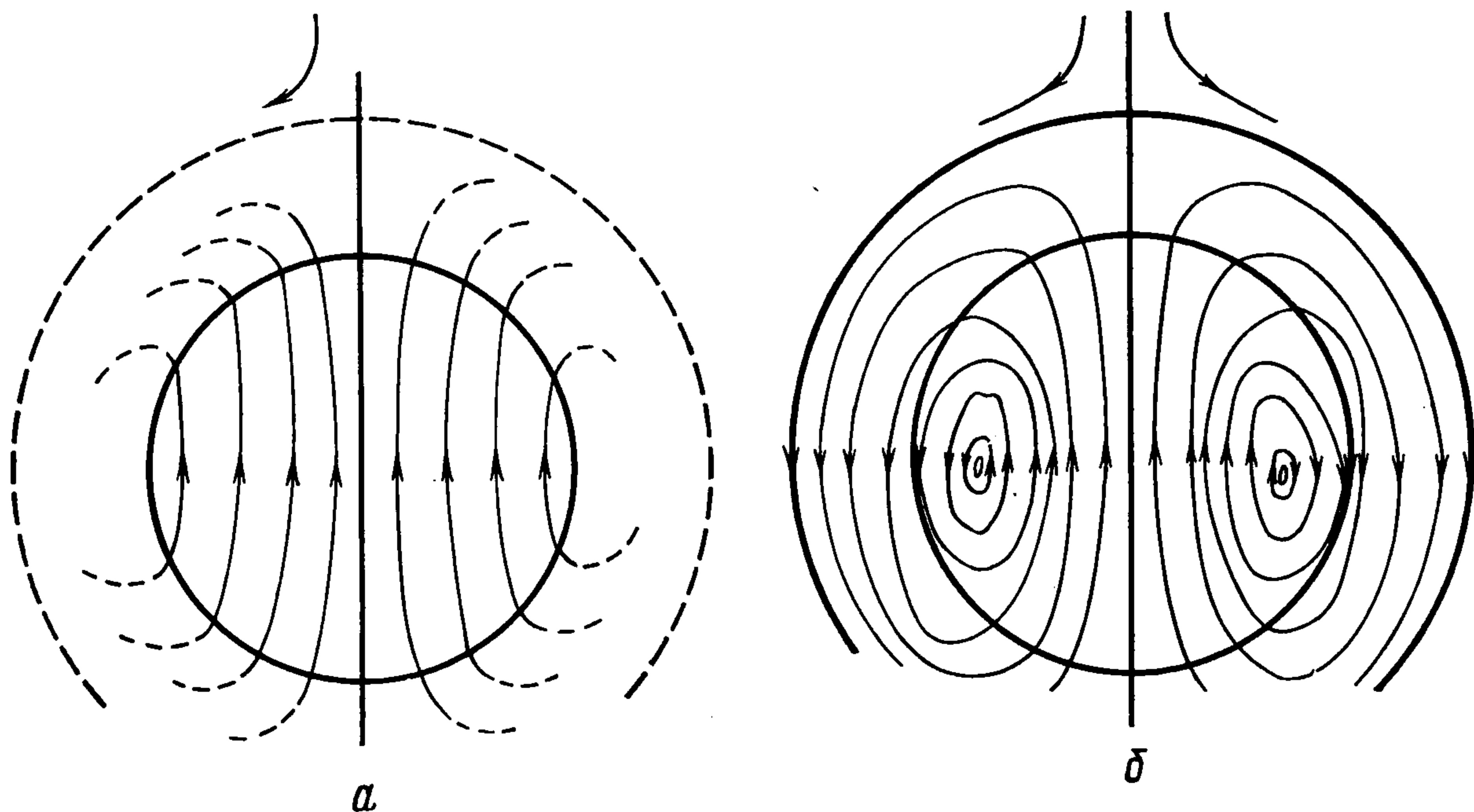
В рамках принятой модели задача о движении фаз может быть решена без использования граничного условия для давления дисперсной фазы на поверхности пузыря. Отметим, что представления о физической природе давления псевдогаза частиц, а также о явлениях, аналогичных поверхностному натяжению в жидкостях, в случае псевдооживленных систем в настоящее время нельзя считать сформировавшимися. Корректная формулировка условия баланса полных нормальных напряжений в дисперсной системе (записанного в (3.14) в упрощенном виде) сопряжена со значительными трудностями и требует дополнительных исследований.

Применив операцию вихря к исходным уравнениям, приходим к следующим соотношениям для безразмерных функций тока жидкой и твердой фаз ( $\bar{\psi} = \psi/v_0 a^2$ ,  $a$  — радиус пузыря,  $\bar{r} = r/a$ , черточки далее опущены), удовлетворяющим вне пузыря условию однородности потоков фаз на бесконечности ( $V_b$  — скорость всплытия пузыря)

$$(4.1) \quad r > 1, \quad \psi_f = (Mr^{-1} + (\delta - 1)r^2/2) \sin^2 \theta, \quad \psi_s = \\ = (Gr^{-1} + \delta r^2/2) \sin^2 \theta \\ r < 1, \quad \psi_f' = (A + Cr^2) r^2 \sin^2 \theta, \quad \delta = V_b/v_0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При помощи граничных условий (3.14) получим следующую алгебраическую систему для определения неизвестных коэффициентов  $M, G, A, C$ :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon (2M + \delta - 1) &= 2(A + C), \quad G + \delta/2 = 0 \\ M - G + 1 &= 0, \quad (M - \delta + 1)^2 = 4(A^2 - AC - C^2) \end{aligned}$$

решая которую, находим

$$(4.3) \quad G = -\delta/2, \quad M = -(\delta/2 + 1)$$

$$C_{1,2} = -\frac{9\varepsilon}{4}(1 \pm \sqrt{b}), \quad A_{1,2} = \frac{3\varepsilon}{4}(1 \pm 3\sqrt{b}), \quad b = \frac{\delta^2 + 5\varepsilon^2}{9\varepsilon^2}$$

Два различных набора коэффициентов  $A, C$  в решении соответствуют двум действительным корням последнего уравнения (4.3), имеющего вид

$$(9b - 5)(X + 1)^2 = 4(X^2 - X - 1), \quad X = A/C$$

Первому корню ( $X = X_1, |X_1| < 1$ ) соответствует знак плюс, второму ( $X = X_2, |X_2| > 1$ ) — знак минус в выражениях для коэффициентов  $A_{1,2}, C_{1,2}$ .

Подчеркнем, что в соответствии с формулами (4.1) и (4.2) картина течения фаз вне пузыря совпадает с найденной в модели Дэвидсона [6]. Отличие обсуждаемых ниже результатов от полученных в [6] касается лишь характера течения оживающего агента в области  $r < 1$  внутри пузыря.

Рассмотрим возможность образования внутри пузыря замкнутых линий тока жидкой фазы. Из третьего равенства (4.1) следует, что для этого необходимо выполнение условия  $A_{1,2} + C_{1,2}r^2 = 0$ . Последнее уравнение при учете соотношений (4.3) приводит к следующему выражению для безразмерного радиуса сферической границы облака внутри пузыря:

$$\bar{a}_c'^2 = \left( \frac{\bar{a}_c'}{a} \right)^2 = - \frac{A_{1,2}}{C_{1,2}} = 1 - \frac{2}{3(1 \pm \sqrt{b})}$$

Очевидно, облако с циркулирующим газом может существовать в рассматриваемой области лишь в случае  $\bar{a}_c' = \bar{a}_{c1}'$ ,  $|\bar{a}_{c1}'| < 1$ . Второе решение дает зависимость  $\bar{a}_c' = \bar{a}_{c2}'$ ,  $|\bar{a}_{c2}'| > 1$ , что физически означает отсутствие замкнутых токов оживающего агента, формирующих внутри пакета шаровое облако. Отметим, что возможность возникновения шаровой области замкнутой циркуляции внутри пузырей, подобной вихрю Хилла, косвенно подтверждается, например, экспериментальными данными по изучению массообмена пузырей в псевдооживленном слое [13] (см. также [6]). С ростом величины параметра  $b$  облако быстро увеличивается в размере и занимает практически всю внутренность пузыря.

На фиг. 2 схематически изображена область замкнутой циркуляции газа в пузыре при  $b \cong 2,33$  ( $\epsilon = 0,5$ ,  $\delta = 2$ ,  $\bar{a}_c' = 0,858$ ). При этом вне пузыря также существует облако ( $\bar{a}_c = ((\delta + 2)/(\delta - 1))^{1/2} \cong 1,58$ ).

Изменение картины линий тока внутри пузыря, соответствующее второму решению (4.3), схематически представлено на фиг. 3, а, б. В этом случае при  $5/9 < b < 25/9$  (фиг. 3, а) внутренность пузыря проточна. Для быстро всплывающих пузырей ( $b > 25/9$ , фиг. 3, б) реализуются условия возникновения внутри полости торообразного кольцевого вихря, охватывающего пузырь по экватору. Для среднего диаметра вихря имеет место соотношение  $d_m = 1 - (2/3)^{1/2} (\sqrt{b} - 1)^{-1/2}$ . Размер вихря, как и размер сферического облака, имеет тенденцию к росту с увеличением скорости всплывания пузыря.

Таким образом, для поля течения жидкости внутри пузыря модель, использованная в данной работе, допускает два решения исходной системы уравнений (1.1) с граничными условиями (3.14), соответствующие двум различным картинам линий тока жидкой фазы при  $r < 1$ . Первое решение соответствует наличию внутри пузыря сферического облака жидкой фазы, размеры которого определяются размером пузыря и свойствами дисперсной системы. Второе решение характеризуется проточностью медленно всплывающих пузырей и возникновением внутри них приэкваториального кольцевого вихря в случае, когда скорость всплытия достаточно велика. Это решение в известной мере подобно решению [14], полученному, однако, в рамках модели Дэвидсона без учета скачка давления оживающего агента на границе пузыря и при некорректном использовании условия непрерывности касательной компоненты скорости газа на этой границе.

Приведенный выше анализ выполнен без предположения Дэвидсона о постоянстве давления газа внутри пузыря и учитывает инерцию жидкой фазы и скачок ее динамического давления при пересечении поверхности пузыря. В рамках принятой модели вопрос о том, какое из двух найденных решений предпочтительнее, остается открытым. Видимо, в действительности могут реализовываться обе упомянутые возможности. Проверка адекватности полученных результатов требует более тонких экспериментов с целью изучения картины течения оживающего агента внутри пузырей в псевдооживленных системах.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика за замечания и советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 2, с. 184—195.
2. *Бувич Ю. А., Гупало Ю. П.* О поверхностях разрыва в дисперсных системах.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 722—734.
3. *Крайко А. Н.* К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц — ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 96—106.
4. *Вайсман А. М., Гольдштик М. А.* Динамическая модель движения жидкости в пористой среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 89—95.
5. *Гольдштик М. А.* Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. 163 с.
6. *Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д.* Псевдоожигение твердых частиц. М.: Химия, 1965. 184 с.
7. *Jackson R.* The mechanics of fluidized beds. Pt II: The motion of fully developed bubbles.— Trans. Instn Chem. Engrs, 1963, v. 41, No. 1, p. 22—28.
8. *Бородуля В. А., Гупало Ю. П.* Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. 208 с.
9. Псевдоожигение / Под ред. *И. Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона.* М.: Химия, 1974. 725 с.
10. *Collins R.* The rise velocity of Davidson's fluidization bubble.— Chem. Eng. Sci., 1965, v. 20, No. 8, p. 788—789.
11. *Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б.* Основы техники псевдоожигения. М.: Химия, 1967. 664 с.
12. *Бобков Н. Н., Гупало Ю. П.* О движении твердой и жидкой фаз вблизи местной неоднородности концентрации в псевдоожигенном слое.— Теорет. основы хим. технологии, 1984, т. 18, № 4, с. 495—505.
13. *Lignola P. G., Donsi G., Massimilla L.* Mass spectrometric measurements of gas composition profiles associated with bubbles in a two-dimensional bed.— Paper AIChE 74th Ann. Meet. New Orleans, LA, 1981.
14. *Pyle D. L., Rose P. L.* Chemical reaction in bubbling fluidized beds.— Chem. Eng. Sci., 1965, v. 20, No. 1, p. 25—31.

Москва

Поступила в редакцию  
9.IV.1985