

УДК 533.6.011

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СВОЙСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ

Башкиров А. Г.

На основании законов сохранения массы, энергии и импульса в потоке газа перед ударным фронтом (УФ), в ударном слое (УС) и за УФ выводятся граничные условия на искривленной ударной волне (УВ). От известных граничных условий, учитывающих вязкость и теплопроводность газа, они отличаются дополнительными членами, пропорциональными кривизне УФ, главный из которых — поверхностное давление с коэффициентом поверхностного натяжения. Следует отметить, что если у равновесных межфазных поверхностей поверхностное натяжение связано с анизотропией среднего вириала силы межмолекулярного взаимодействия, то в УВ оно обуславливается анизотропией вязких напряжений в ударном слое и достигает значений 1 Н/м при $M_0 = 10$ и 10 Н/м при $M_0 = 30$. Учет поверхностного натяжения при анализе устойчивости плоской УВ относительно слабого возмущения поверхности разрыва приводит к абсолютной неустойчивости режима спонтанного излучения звука, ранее считавшегося нейтрально устойчивым.

1. Граничные условия на разрыве. Система законов сохранения плотностей массы, импульса и энергии во всем объеме газа, включая УС, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \operatorname{Div} (p - \sigma + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + \frac{1}{2} \rho v^2) + \operatorname{div} [(u + p - \sigma + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v}] = - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Для описания течения внутри УС необходимо учитывать вязкие напряжения $\sigma(x, t)$ и тепловой поток \mathbf{q} . В набегающем потоке и потоке за УФ плотность $\rho(x, t)$, скорость $\mathbf{v}(x, t)$, давление $p(x, t)$, тензор вязких напряжений $\sigma(x, t)$, плотность внутренней энергии $u(x, t)$ и тепловой поток $\mathbf{q}(x, t)$ переходят в функции $\rho_0, v_0, p_0, u_0, \sigma_0 = q_0 = 0$ и $\rho_1, v_1, p_1, \sigma_1, u_1, q_1$ соответственно, описываемые уравнениями гидродинамики идеальной или вязкой жидкости. Внутри УС профили этих величин могут быть получены либо в приближении Навье—Стокса (для слабых УВ), либо методами кинетической теории газов.

Поскольку в дальнейшем структура УВ не представляет самостоятельного интереса, разномасштабное течение газа можно описать приближенно, рассматривая УС как поверхность разрыва.

Для вывода соотношений между гидродинамическими параметрами ρ_0, v_0, p_0, u_0 и $\rho_1, v_1, p_1, \sigma_1, u_1, q_1$ на разрыве поместим внутри УС поверхность $\Sigma(t)$ (зависимость от времени отражает деформации разрыва) и определим избыточные значения параметров течения ρ^*, v^*, \dots в виде

$$(1.2) \quad \rho^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\Sigma} [\rho(x, t) - \rho_0] dz + \int_{\Sigma}^{\infty} [\rho(x, t) - \rho_1] dz$$

где ось z направлена вдоль нормали \mathbf{n} к Σ по потоку газа.

Перемещая $\Sigma(t)$ внутри УС, можно добиться обращения в нуль любого одного из избыточных параметров. Далее для определенности выберем положение $\Sigma(t)$ таким образом, чтобы $v_n^* = 0$. Если профиль $v_n(z)$

в стационарной УВ приближенно представить в виде

$$(1.3) \quad v_n(z) = 1/2 (v_0 + v_1) - 1/2 (v_0 - v_1) \operatorname{th} (2z/\delta)$$

где δ — толщина УВ, то вследствие равенства $\rho(z)v_n(z) = \rho_0 v_0$ из (1.2) получаем

$$(1.4) \quad \rho^* = -1/4 \rho_0 \delta (v_0/v_1 - 1) \ln (v_0/v_1)$$

Применяя к законам сохранения (1.1) операцию, определенную формулой (1.2), получаем

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho^* + \operatorname{div}_\tau (\rho v_\tau)^* &= (v_{0n} - v_\Sigma) \rho_0 - (v_{1n} - v_\Sigma) \rho_1 - \\ &- (\rho v_n)^* \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v})^* + \operatorname{Div}_\tau (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \sigma)^* + \nabla_\tau p^* &= \mathbf{n} (p_0 - p_1 + \sigma_1) + \\ &+ [\rho_0 \mathbf{v}_0 (v_{0n} - v_\Sigma) - \rho_1 \mathbf{v}_1 (v_{1n} - v_\Sigma)] - \frac{1}{R_1} (\rho v_n^2 - \rho v_{x1}^2)^* - \\ &- \frac{1}{R_2} (\rho v_n^2 - \rho v_{x2}^2)^* + \frac{1}{R_1} (\sigma_{nn}^* - \sigma_{11}^*) + \frac{1}{R_2} (\sigma_{nn}^* - \sigma_{22}^*) \\ \frac{\partial}{\partial t} (u + 1/2 \rho v^2)^* + \operatorname{div}_\tau J_\tau^* &= (u_0 + 1/2 \rho_0 v_0^2) (v_{0n} - v_\Sigma) - (u_1 + \\ &+ 1/2 \rho_1 v_1^2) (v_{1n} - v_\Sigma) + p_0 v_{0n} - p_1 v_{1n} + \\ &+ \sigma_{1nn} v_{1n} - q_{1n} - J_n^* \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ J &= (u + p + 1/2 \rho v^2 - \sigma) \mathbf{v} + \mathbf{q} \end{aligned}$$

Здесь использованы известные выражения (см., например, [1, с. 29]) для дивергенции вектора и тензора в криволинейных координатах z, x_1, x_2 , связанных с поверхностью Σ . Радиусы кривизны R_1 и R_2 определяются через коэффициенты Ламе $H_z = 1, H_1, H_2$ в виде

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z}$$

Поверхностные дивергенции вводятся соотношениями типа

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial a_z}{\partial z} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) a_z + \operatorname{div}_\tau \mathbf{a}_\tau \\ (\operatorname{Div} T)_z &= \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_1} (T_{zz} - T_{11}) + \frac{1}{R_2} (T_{zz} - T_{22}) + (\operatorname{Div}_\tau T)_z \end{aligned}$$

Анализ поверхностных законов сохранения (1.5) проведем далее для частного случая слабой деформации плоской нормальной УВ:

$$z = \zeta(x, t) = \zeta \exp \{i(kx - \omega t)\}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -k^2 \zeta$$

Общий случай произвольной поверхности $\Sigma(t)$ не вносит принципиальной сложности, но громоздок и излишен для рассматриваемой ниже задачи об устойчивости плоской УВ.

Оценим сначала члены в левых частях (1.5). Поскольку все избыточные плотности пропорциональны $\delta(M)$, где $M = M_0 \cos(\partial \zeta / \partial x)$, то $\partial \rho^* / \partial t \sim \sim \rho^* k^2 \omega \zeta^2$, $\partial u^* / \partial t \sim u^* k^2 \omega \zeta^2$, $\partial (\rho v_\tau)^* / \partial t \sim \rho^* v_0 k \omega \zeta$

Аналогичным образом убеждаемся, что из всех членов с пространственными производными в левых частях (1.5) вклад первого порядка малости по $k\zeta$ дает только $\operatorname{div}_\tau (\rho v_\tau)^* \approx -\rho^* v_0 k^2 \zeta$.

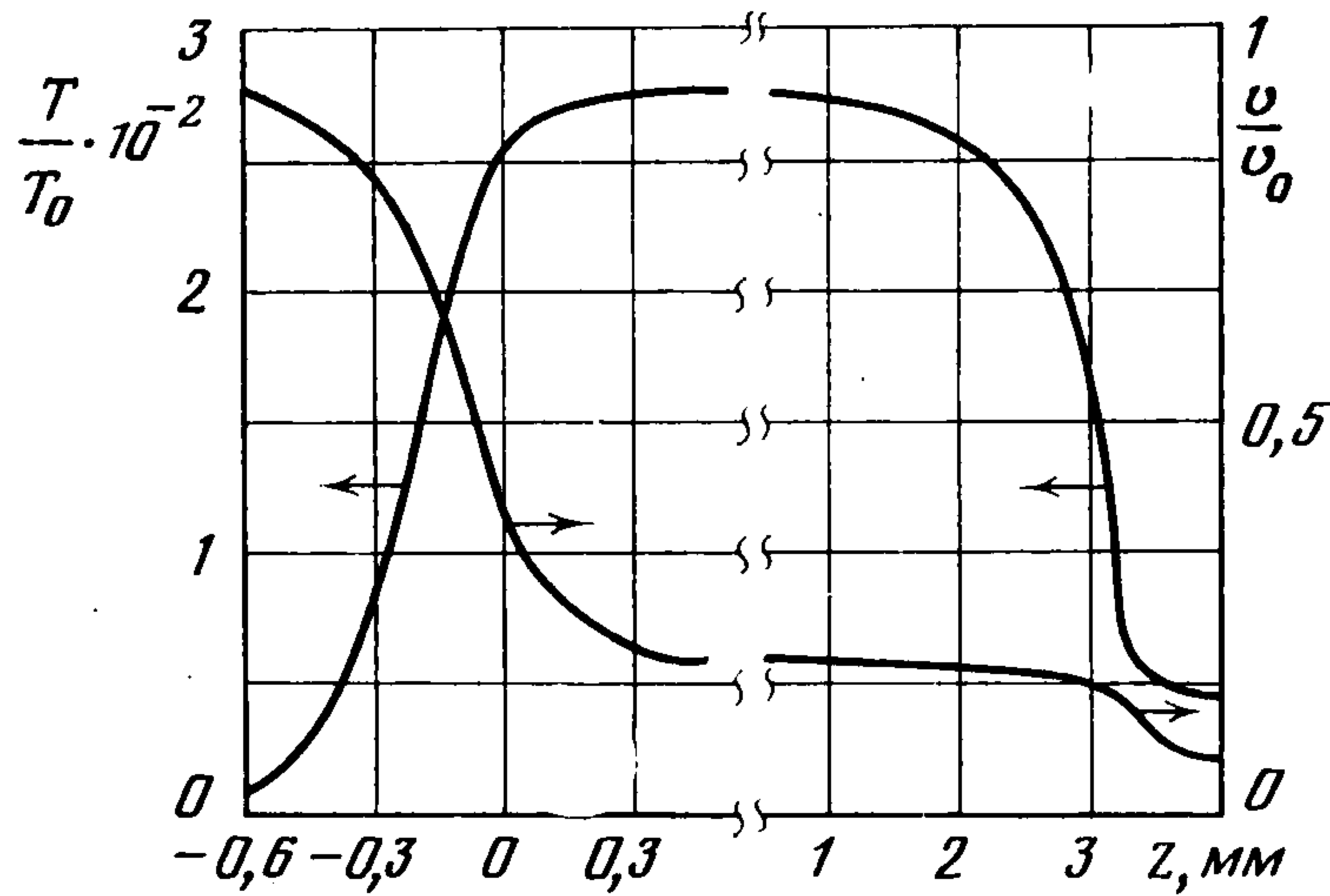
Таким образом, в линейном приближении по $k\zeta$ из (1.5) получаем граничные условия на искривленной поверхности

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \rho_0 (v_{0n} - v_\Sigma) &= \rho_1 (v_{1n} - v_\Sigma) - \rho^* v_0 k^2 \zeta \\ \rho_0 + \rho_0 v_{0n} (v_{0n} - v_\Sigma) &= p_1 + \rho_1 v_{1n} (v_{1n} - v_\Sigma) - \sigma_{1nn} + p_\Sigma \\ \rho_0 v_{0\tau} (v_{0n} - v_\Sigma) &= \rho_1 v_{1\tau} (v_{1n} - v_\Sigma) - \sigma_{1n\tau} + \rho^* v_0 k \omega \zeta \\ (u_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2) (v_{0n} - v_\Sigma) + \rho_0 v_{0n} &= (u_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2) (v_{1n} - v_\Sigma) + \\ &+ (p_1 - \sigma_{1nn}) v_{1n} + q_{1n} \end{aligned}$$

В правой части второго из этих соотношений стоит поверхностное давление с коэффициентом поверхностного натяжения

$$(1.7) \quad p_\Sigma = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma, \quad \gamma = - (\sigma_{nn}^* - \sigma_{\tau\tau}^*) = - \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_{nn} - \sigma_{\tau\tau}) dz$$

($\sigma_{nn}(z)$, $\sigma_{\tau\tau}(z)$ — вязкие напряжения в УС).



2. Оценка коэффициента поверхностного натяжения. В приближении Навье — Стокса в нулевом порядке по кривизне УС из (1.7) имеем

$$(2.1) \quad \gamma_{NS} = - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mu(z) \frac{\partial v_n}{\partial z} dz$$

Полагая $\mu(z) \sim (T(z))^\alpha$ и зависимости $T(z)$ и $v_n(z)$ в форме (1.3), находим

$$(2.2) \quad \gamma_{NS} = \frac{2}{1+\alpha} \mu_0 (v_0 - v_1) \frac{(T_1/T_0)^\alpha - 1}{(T_1/T_0) - 1} \approx \frac{2}{\alpha+1} \mu_1 (v_0 - v_1)$$

При наличии ионизации или диссоциации характерные профили температуры и скорости в УС имеют вид [2], изображенный на фигуре ($M_0 = 30$, $p_0 = 1,0$ мм рт. ст., $T_0 = 300$ К, аргон). Аналитически эти профили приближенно можно представить в виде

$$U(z) = \frac{U_0 + U^\circ}{2} + \frac{U^\circ - U_0}{2} \operatorname{th} \frac{2z}{\delta_0}, \quad -\infty < z < z^\circ$$

$$U(z) = \frac{U^\circ + U_1}{2} + \frac{U_1 - U^\circ}{2} \operatorname{th} \frac{2(z - z_1)}{\delta_1}, \quad z^\circ < z < \infty,$$

$$z_1 \gg z^\circ > 0$$

$U = vT$, $U^\circ = v^\circ$, T° — значения на плато релаксационной зоны. В этом случае из (2.1) получаем

$$(2.3) \quad \gamma_{NS} \approx \frac{2}{\alpha+1} (v_0 - v_1) \mu(T^\circ)$$

Тогда из (1.7) следует

$$\frac{\sigma_{1nn}}{\rho_1 v_1^2} \sim \frac{\mu_1}{\rho_1 v_1^2} \frac{\partial v_{1n}}{\partial z} \sim \frac{\mu_1}{\rho_1 v_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \varepsilon_R$$

$$\frac{p_\Sigma}{\rho_1 v_1^2} \sim \left(\frac{T^\circ}{T_1} \right)^\alpha \frac{v_0}{v_1} \varepsilon_R$$

где ε_R — обратное число Рейнольдса по кривизне фронта.

Для данных, представленных на фигуре, $v_0/v_1 \simeq 20$, $T^\circ/T_1 \simeq 6$. Показатель α зависит от межмолекулярного взаимодействия и меняется от 0,5 до 1,2, так что p_Σ может превышать σ_{1nn} на два порядка.

Подобным образом делается оценка и для газа с колебательно-вращательной релаксацией. Согласно кинетической теории [3] УВ, в азоте $v_0/v_1 \simeq 15$, $T^0/T_1 \simeq 3$ при $M_0 = 20$, так что p_Σ на порядок превышает вязкие напряжения.

Из этих оценок видно, что при записи граничных условий [4] на разрыве с точностью до ε_R необходимо учитывать p_Σ .

Приведенная выше оценка γ получена в рамках гидродинамической теории структуры УВ. Известно [5], что эта теория удовлетворительно описывает структуру УС лишь при очень малых числах Маха $M_0 \approx 1$, в то время как в рассматриваемой далее задаче о неустойчивости УВ интерес представляют большие M_0 . Однако γ — интегральная характеристика слоя, поэтому можно надеяться, что приближенная гидродинамическая теория дает удовлетворительное ее описание.

Чтобы убедиться в этом, вычислим величину (2.3) для идеального одноатомного газа и сопоставим найденное значение с результатом расчета методом кинетической теории.

В случае одноатомного газа твердых сфер

$$(2.4) \quad \mu_0 = \frac{5\pi}{32} \lambda_0 \rho_0 \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad \lambda_0 = \frac{m}{\sqrt{2\pi r_0^2 \rho_0}}$$

$$\gamma_{NS} = \frac{25}{96} \sqrt{\frac{3\pi}{10}} \lambda_0 \rho_0 \frac{(\eta - 16M_0^2)^{3/2} - 64M_0^3}{M_0^2 (5M_0^2 + 3)},$$

$$\eta = 5M_0^4 + 30M_0^2 - 3$$

При малых и больших M_0 это выражение переходит в следующее:

$$(2.5) \quad \gamma_{NS}|_{M_0 \rightarrow 1} = \frac{25}{8} \sqrt{\frac{3\pi}{10}} (M_0 - 1) \lambda_0 \rho_0 \approx 3,03 \lambda_0 \rho_0 (M_0 - 1)$$

$$(2.6) \quad \gamma_{NS}|_{M_0 \rightarrow \infty} \approx 0,57 \lambda_0 \rho_0 M_0^2$$

Рассмотрим выражение для коэффициента поверхностного натяжения, к которому приводит наиболее известная кинетическая теория структуры плоской нормальной УВ — теория Тамма—Мотт-Смита [6, 7]. В этой теории функция распределения молекул по скоростям представляет собой сумму двух максвелловских функций распределения

$$(2.7) \quad f(z) = f_0(z) + f_1(z)$$

$$f_\alpha(z) = n_\alpha(z) \left(\frac{m}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m(c - v_\alpha)^2}{2k T_\alpha} \right\}, \quad \alpha = 0, 1$$

где T_α и v_α считаются постоянными, а плотности числа частиц зависят от координат:

$$(2.8) \quad n_0(z) = \frac{n_0}{2} \left(1 - \operatorname{th} \frac{Bz}{2\lambda_0} \right), \quad n_1(z) = \frac{n_1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{Bz}{2\lambda_0} \right)$$

Коэффициент B имеет вид ¹

$$B = \frac{24}{5} \sqrt{\frac{5}{3\pi}} \frac{(M_0^2 - 1)(\eta + (M_0^2 - 1)^2)}{(5M_0^2 + 3)(M_0^2 + 3)\eta^{1/2}}$$

¹ Великодный В. Ю. Уравнения переноса многокомпонентных газовых смесей и сильно неравновесных газов: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1982. 22 с.

При помощи функции распределения (2.7) вычислим среднюю скорость потока, а также компоненты тензора давления $\Pi_{ii} = p - \sigma_{ii}$

$$v(z) = \frac{\langle c_z \rangle}{n_0(z) + n_1(z)} = \frac{n_0(z)v_0 + n_1(z)v_1}{n_0(z) + n_1(z)}$$

$$(2.9) \quad \Pi_{\tau\tau}(z) = m\langle c_x^2 \rangle = m\langle c_y^2 \rangle = n_0(z)kT_0 + n_1(z)kT_1$$

$$(2.10) \quad \Pi_{nn}(z) = m\langle (c_z - v(z))^2 \rangle = \Pi_{\tau\tau}(z) + m \frac{n_0(z)n_1(z)}{n_0(z) + n_1(z)} (v_0 - v_1)^2$$

Отсюда видно, что для плоского УС кинетическая теория, как и теория Навье—Стокса, приводит к диагональной форме тензора давления с нормальной компонентой, отличающейся от тангенциальных.

Подставив (2.9) и (2.10) в определение (1.7), после интегрирования поперек слоя получаем ² коэффициент поверхностного натяжения в приближении Мотт-Смита

$$(2.11) \quad \gamma_{MS} = \frac{25}{96} \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \lambda_0 p_0 \frac{(5M_0^2 + 3)(M_0^2 + 3)\eta^{1/2}}{\eta + (M_0^2 - 1)^2}$$

В пределах очень слабых и очень сильных ударных волн

$$(2.12) \quad \gamma_{MS}|_{M_0 \rightarrow 1} = \frac{25}{8} \sqrt{\frac{3\pi}{10}} \lambda_0 p_0 (M_0 - 1) \approx 3,03 \lambda_0 p_0 (M_0 - 1)$$

$$(2.13) \quad \gamma_{MS}|_{M_0 \rightarrow \infty} \approx 0,92 \lambda_0 p_0 M_0^2$$

Отметим, что (2.12) точно совпадает с (2.5), а (2.13) отличается от (2.6) менее чем в два раза. Это позволяет полагать, что теория Навье — Стокса дает правильное описание интегральных характеристики УС (по порядку величины), поскольку теория Мотт-Смита хорошо соответствует экспериментальным данным [5] по структуре УВ в одноатомных газах.

При $T_0 = 300$ К из (2.6) и (2.13) получаем $\gamma \sim 1$ Н/м для $M_0 = 10$ и $\gamma \sim 10$ Н/м для $M_0 = 30$. Численное интегрирование результатов [8] для $\Pi_{nn}(z)$ и $\Pi_{\tau\tau}(z)$, полученных методом Монте-Карло при $M_0 = 8$ и $T_0 = 300$ К, дает $\gamma \sim 1$ Н/м. Аналогичная обработка экспериментальных результатов [9] по измерению Π_{nn} и $\Pi_{\tau\tau}$ в УВ в гелии при $M_0 = 1,59$ и $T_0 = 160$ К приводит к $\gamma \sim 0,26$ Н/м. Эти значения хорошо согласуются с формулами (2.4) и (2.11).

Столь значительное поверхностное натяжение УВ (напомним для сравнения, что у поверхности воды при нормальных условиях $\gamma = 0,07$ Н/м) не может не сказаться на ее свойствах. В частности, им можно объяснить имеющиеся экспериментальные данные об избыточном давлении за фронтом сферической УВ [10].

3. Система уравнений для малых возмущений разрыва и потока. В этом и следующем пункте сначала ограничимся приближением гидродинамики и идеальной жидкости для газа за УС. Рассмотрим плоскую стационарную УВ произвольной интенсивности, удовлетворяющей условиям $M_0 > 1$, $M_1 = v_1/c_1 < 1$. Зададим слабое возмущение УФ в виде $\zeta(x, t) = \zeta \exp\{i(kx - \omega t)\}$, так что $v_x = -i\omega\zeta$. Возмущение УФ порождает гармонические возмущения энтропии δs , давления δp , скорости δv и удельного объема δV в потоке за УФ ($z > 0$). Они должны удовлетворять уравнениям гидродинамики идеальной жидкости, вытекающим из (1.1), и четырем линеаризованным граничным условиям (1.6). В результате получается однородная система из восьми уравнений для восьми перемен-

² Башкиров А. Г., Корольков Г. А. Поверхностное натяжение фронта ударной волны.— В кн.: Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: Изд-е МФТИ, 1983 с. 8—9.

ных ζ , δp_2 , δv_{1x} , δv_{1z} , δv_{2x} , δv_{2z} , δV_1 , δV_2 , где индекс 1 относится к энтропийным возмущениям, а 2 — к акустическим

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & k\delta v_{1x} + (\omega/v_1)\delta v_{1z} = 0, \quad \delta p_2 + (c^2/V^2)\delta V_2 = 0 \\
 & (v_1 l - \omega)\delta v_{2x} + V_1 k \delta p_2 = 0, \quad (v_1 l - \omega)\delta v_{2z} + V_1 l \delta p_2 = 0 \\
 & \delta v_{1x} + \delta v_{2x} - ik(v_0 - v_1)\zeta + k\omega\rho^*V_0\zeta = 0 \\
 & \delta v_{1z} + \delta v_{2z} + \frac{v_0 - v_1}{2} \left[\frac{\delta p_2 + \delta p_\Sigma}{p_1 - p_0} - \frac{\delta V_1 + \delta V_2}{V_0 - V_1} \right] = 0 \\
 & \frac{\delta p_2 + \delta p_\Sigma}{p_1 - p_0} + \frac{\delta V_1 + \delta V_2}{V_0 - V_1} - 2i \frac{\omega}{v_0} \zeta = 0 \\
 & \delta p_2 + \Phi \delta p_\Sigma - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_H (\delta V_1 + \delta V_2) = 0 \\
 & \Phi = -\frac{3}{2} V_1 \left[\frac{\partial w_1}{\partial p_1} - \frac{1}{2} (V_1 + V_0) \right]^{-1} \\
 & \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_H = - \left[\frac{\partial w_1}{\partial V_1} - \frac{1}{2} (p_1 - p_0) \right] \left[\frac{\partial w_1}{\partial p_1} - \frac{1}{2} (V_1 + V_0) \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

$((\partial p/\partial V)_H)$ — производная вдоль обычной ударной адиабаты Гюгонио).

Детальный вывод такой системы уравнений содержится в работе [11]. Основное отличие от уравнений [11] связано с появлением в последних трех граничных условиях избыточной плотности и поверхностного давления $\delta p_\Sigma = -\gamma k^2 \zeta$.

4. Акустически-энтропийная неустойчивость УВ. Нетривиальное решение однородной линейной системы уравнений (3.1), т. е. существование отличных от нуля амплитуд акустических и энтропийно-вихревых возмущений, возможно лишь при условии равенства нулю ее характеристического определителя, что дает характеристическое уравнение (здесь и далее опускаем индекс 1)

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \left(1 + \frac{\omega^2}{h^2 v^2} \right) \left(2 \frac{\omega}{kv} - i\Phi\Gamma\varphi \right) + \left(\beta - iP \frac{\omega}{kv} + \frac{\omega^2}{k^2 v^2} \right) \times \\
 & \times \left(\frac{l}{k} - \frac{\omega}{kv} \right) (1 + \varphi) - i\Gamma \left(\frac{\omega}{kv} \frac{l}{k} (1 + \varphi) + 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v^2} \varphi \right) = 0 \\
 & P = -\frac{\beta\rho^*kv}{\rho_0(v_0 - v)}, \quad \Gamma = \frac{\beta\gamma k}{p - p_0}, \quad \varphi = j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H, \quad \beta = \frac{v_0}{v}
 \end{aligned}$$

Это уравнение отличается от полученного в [11] членами с P и Γ , учитывающими поверхностные свойства УВ.

Совместно с дисперсионным уравнением для акустических возмущений в потоке за УФ

$$(4.2) \quad (\omega - vl)^2 = c^2 (k^2 + l^2)$$

уравнение (4.1) определяет зависимость ω и l от k и φ .

Условие неустойчивости УВ заключается в существовании экспоненциально растущего со временем решения, при $z \rightarrow \infty$ эта решение должно экспоненциально убывать, т. е.

$$(4.3) \quad \text{Im } \omega > 0, \quad \text{Im } l > 0$$

Таким образом, задача определения области неустойчивости УВ сводится к определению области значений параметра φ , при которых решения $\omega(k, \varphi)$ и $l(k, \varphi)$ системы уравнений (4.1) и (4.2) удовлетворяют обоим неравенствам (4.3).

Найдем сначала пороговые значения φ , соответствующие границе области устойчивости $\text{Im } \omega = 0$, $\text{Im } l > 0$, а затем исследуем устойчивость УВ при выходе за эти границы.

В безразмерных переменных $g + ih = -i\omega/(kv)$, $t + iu = il/k$ система уравнений (4.1), (4.2) принимает (при $g = 0$) вид

$$(4.4) \quad t = -[\Gamma\chi + Ph(u + h)(1 + \varphi)] / [(1 + \varphi)(\beta + h^2)]^{-1}$$

$$(4.5) \quad 2h(1 + h^2) = (1 + \varphi)(\beta + h^2)(h + u) + \Gamma th(1 + \varphi)$$

$$(4.6) \quad M_1^2 [t^2 - (h + u)^2] = t^2 - u^2 - 1, \quad M_1^2 t(h + u) = tu \\ \chi = \Phi\varphi(1 + h^2) + (1 - h^2\varphi) - uh(1 + \varphi)$$

Согласно второму из условий (4.3), величина $t = -\text{Im } l/k < 0$. Это означает, что для неустойчивости необходимо выполнение условия

$$(4.7) \quad \Gamma\chi + Ph(u + h)(1 + \varphi) \geq 0, \quad \varphi \geq -1$$

Из второго уравнения (4.6) находим $u = M_1^2 h / (1 - M_1^2)$, после чего из (4.5) видно, что величина h может быть равна нулю.

При $h = 0$ из первого уравнения (4.6) с учетом (4.3) получаем $t = -1/\sqrt{1 - M_1^2}$. Совместно с (4.4) это дает нижнее пороговое значение φ :

$$(4.8) \quad \varphi_H = -(1 + \Gamma\sqrt{1 - M_1^2})(1 - \Gamma\Phi\sqrt{1 - M_1^2})^{-1}$$

Полученное выражение отличается от найденной в [11] нижней границы области абсолютной устойчивости $\varphi = -1$ на величину порядка Γ (т. е. порядка числа Кнудсена относительно длины волны возмущения). Поверхностное натяжение практически не влияет на устойчивость УФ относительно возмущения, не носящего волновой характер ($\text{Re } \omega = -hkv = 0$). Поэтому, как и в теории [11], при $\varphi < -1$ УВ становится абсолютно неустойчивой.

Для порогового значения φ_0 неустойчивости относительно периодического возмущения ($h \neq 0$) из системы уравнений (4.4)–(4.6) получаем

$$(4.9) \quad \varphi_0 = \varphi_I + O(\Gamma^2), \quad \varphi_I = (1 - M_1^2 - \beta M_1^2)(1 - M_1^2 + \beta M_1^2)^{-1}$$

где величина φ_I совпадает с полученной ранее [12, 13] границей между областью устойчивости УВ и «нейтрально устойчивой» (при $\varphi_I < \varphi < 1 + 2M_1$) областью спонтанного излучения звука.

Учет поверхностного натяжения практически не влияет на положение границы области спонтанного излучения звука, но, как будет показано п. 5, делает эту область абсолютно неустойчивой.

Из уравнений (4.5), (4.6) с учетом условия $\text{Re } \omega > 0$ находим остальные решения

$$(4.10) \quad h_0 = -\sqrt{1 - M_1^2}/M_1, \quad u_0 = -M_1/\sqrt{1 - M_1^2}$$

Поскольку $u = \text{Re } l/k = \text{ctg } \vartheta$ (ϑ — угол между волновым вектором акустической волны и осью z), найденное выражение u_0 свидетельствует о том, что спонтанное излучение звука начинается (при $\varphi = \varphi_0$) с угла $\vartheta_0 > \pi/2$ ($\cos \vartheta_0 = -M_1$). При этом вектор l направлен навстречу потоку, который «сносит» звуковую волну [13].

Подставив решения (4.10) в условие (4.7), получаем его в виде неравенства

$$(4.11) \quad \Gamma\varphi(\Phi - 1) + P(1 + \varphi) > 0$$

Второе слагаемое заведомо больше нуля, а первое больше нуля при условии

$$(4.12) \quad [\partial w / \partial p - (V_0 - 2V)/2] [\partial w / \partial V - (p - p_0)/2]^{-1} > 0$$

Следовательно, необходимое условие нарушения устойчивости (4.1) заведомо выполняется в случае положительных сомножителей в (4.12). Из приведенного в (3.1) определения производной $(\partial p/\partial V)_H$ видно, что с ростом v_0 обе эти величины (положительные при малых v_0) остаются положительными на всем участке прямого хода ударной адиабаты, где она непрерывна и $(\partial p/\partial V)_H < 0$. Знаменатель в (4.12) сохраняет положительный знак и при изменении знака производной $(\partial p/\partial V)_H$, если она проходит через $\pm\infty$. В этой точке $\partial w/\partial p = (V_0 + V)/2$, так что числитель (4.12) остается положительным в окрестности подобной точки. При этом неравенство (4.11) выполняется.

И наоборот, изменение знака $(\partial p/\partial V)_H$ при непрерывном переходе через локальный максимум ударной адиабаты соответствует изменению знака знаменателя дроби в (4.12), в этом случае неравенство (4.12) нарушается и может нарушиться неравенство (4.11).

Для доказательства абсолютной неустойчивости режима спонтанного излучения звука положим $\varphi = \varphi_0 + \Delta$ и рассмотрим систему уравнений (4.1), (4.2) в линейном приближении по Δ с учетом $\text{Im } \omega \neq 0$ ($g \neq 0$). Тогда вместо (4.4)–(4.6) получим линейную неоднородную систему уравнений

$$(4.13) \quad a_i h' + b_i t' + c_i u' + d_i g = e_i \Delta, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i, e_i выражаются через решения h_0, t_0, u_0, φ_0 системы (4.4)–(4.6), штрихами обозначены линейные по Δ отклонения от этих решений. Отсюда

$$(4.14) \quad \text{Im } \omega = kv g = - \frac{1 - M_1^2}{M_1^2 (1 + \varphi_0)} t_0 k v \Delta$$

Если условие (4.7) выполнено, то $t_0 < 0$ и $\text{Im } \omega > 0$ при $\Delta > 0$, а $\text{Im } \omega < 0$ при $\Delta < 0$. Следовательно, учет поверхностного натяжения УФ делает режим спонтанного излучения звука абсолютно неустойчивым.

5. Влияние вязкости на устойчивость УВ. Учет вязкости в уравнениях гидродинамики потока газа за УФ и в граничных условиях (1.5) – (1.7), (1.11) приводит к появлению дополнительных членов в линеаризованных уравнениях (3.1), в результате чего характеристическое уравнение (4.1) принимает вид

$$(5.1) \quad \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2 v^2}\right) \left(2 \frac{\omega}{kv} - i\Phi\Gamma\varphi\right) + \left(\beta - iP \frac{\omega}{kv} + \frac{\omega^2}{k^2 v^2}\right) \left(\frac{l}{k} - \frac{\omega}{kv}\right) \times \\ \times (1 + \varphi) - i\Gamma \left(\frac{\omega}{kv} \frac{l}{k} (1 + \varphi) + 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v^2} \varphi\right) - i\varepsilon\Psi\left(\frac{l}{k}, \frac{\omega}{kv}, \varphi, \varepsilon\right) = 0 \\ \varepsilon = \mu k/(\rho v), \quad \Gamma \sim \varepsilon (T^0/T)^{\alpha\beta}$$

где Ψ — полином с действительными коэффициентами, T^0 — максимальная температура газа внутри УС.

Дисперсионное акустическое уравнение (4.2) в вязком газе принимает вид

$$(5.2) \quad \left(\frac{\omega}{kv} - \frac{l}{k}\right)^2 + \frac{4}{3} i\varepsilon \left(\frac{\omega}{kv} - \frac{l}{k}\right) = \frac{1}{M_1^2} \left(1 + \frac{l^2}{k^2}\right)$$

На границе устойчивости ($g = 0$) вместо (4.4)–(4.6) имеем систему уравнений, отличающуюся от (4.4)–(4.6) добавлением к правой части (4.4) слагаемого, пропорционального $-\varepsilon \text{Re}\Psi$, к правой части (4.5) — слагаемого $\varepsilon \text{Im}\Psi$, а к (4.6) — членов с ε из (5.2).

При анализе этой системы уравнений учитывается, что из действительности коэффициентов полинома Ψ и условия $g = 0$ следует, что $\text{Im } \Psi \sim t \sim \varepsilon$, поэтому величины $\Gamma t \sim \varepsilon \text{Im } \Psi \sim \varepsilon^2$ и ими можно пренебречь. По той же причине можно отбросить члены с εt .

Ограничимся исследованием влияния вязкости на границу области спонтанного излучения звука, т. е. в окрестности решений h_0, u_0 и φ_0 , полученных выше в нулевом приближении по ε . Вместо (4.10) и (4.9) находим

$$(5.3) \quad h_1 \approx h_0, \quad u_1 \approx -(1 + \xi) u_0$$

$$(5.4) \quad \varphi_1 = \varphi_0 \left(1 - 4\xi \frac{M_1^2}{1 - M_1^2} \frac{1 - (1 + \beta/2) M_1^2}{1 - (1 + \beta) M_1^2} + 2\xi \frac{M_1^2}{1 - M_1^2}\right)$$

где $\xi = \frac{2}{3} \varepsilon/t < 0$. Можно убедиться, что $|\xi| \ll 1$, в частности $|\xi| < 10^{-2}$ в аргоне и CO_2 при $\varphi \simeq \varphi_0$.

Поскольку $M_1^2 \ll 1$ и $|\xi| \ll 1$, эти соотношения означают, что учет влияния вязкости потока газа в УФ приводит к незначительному смещению границы области спонтанного излучения звука ($\varphi_1 > \varphi_0$).

Исследование устойчивости окрестности $\varphi = \varphi_1 + \Delta$ сводится к анализу системы уравнений, отличающейся от (4.13) появлением слагаемых $\sim \varepsilon$ в коэффициентах b_1, d_1, a_2, c_2 и e_1 , возникающих из разложений $\text{Im}\Psi$ и $\text{Re}\Psi$ по малым возмущениям h', t', u', Δ, g . В результате для мнимой части частоты вместо (4.14) получается

$$\text{Im } \omega = kv g = - \frac{1 - M_1^2 (1 - \xi)}{M_1^2 (1 + \varphi_1)} t_1 \Delta$$

где t_1 определяется формулой типа (4.4), к которой добавлено слагаемое с $-\varepsilon \text{Re } \Psi$ при $h = h_1, u = u_1, \varphi = \varphi_1$.

Непосредственная оценка явного выражения $\Psi(h_1, u_1, \varphi_1)$ дает $\text{Re}\Psi > 0$. Этого следовало ожидать и из общих соображений: вязкость потока должна усиливать пространственное затухание акустических возмущений.

Таким образом, $|t_1| > |t_0|$ и при выполнении условия (4.11) заведомо выполняется неравенство $t_1 < 0$, откуда вытекает абсолютная неустойчивость фронта УВ относительно генерации акустических возмущений при $\Delta > 0$ и абсолютная устойчивость при $\Delta < 0$.

Этот вывод противоречит результату работы [14], где было показано, что учет вязкости обеспечивает устойчивость УВ. Однако полученное в [14] вязкое затухание возмущений фронта УВ не зависит от граничных условий на УВ, что физически не оправданно. По-видимому, в [14] это явилось следствием не вполне корректного учета вязких напряжений на искривленной поверхности.

6. Обсуждение результатов. Основной результат статьи — новые граничные условия (1.5) на искривленной УВ, включающие члены первого порядка по обратному числу Рейнольдса ε_R . Учет поверхностных свойств УВ привел к появлению дополнительных членов, превышающих введенные ранее [4] вязкие напряжения в потоке за УФ.

Использование новых граничных условий в классической задаче об устойчивости плоской УВ в релаксирующем газе относительно малых возмущений поверхности разрыва привело к новому условию неустойчивости, существенно отличающемуся от известных результатов [11—13]. Учет поверхностных эффектов привел к снижению границы области спонтанного получения и, что самое главное, к абсолютной неустойчивости этой области, которая ранее считалась нейтрально устойчивой. Физически это объясняется возбуждением капиллярных волн на поверхности ударного фронта и их взаимодействием с излучаемыми звуковыми волнами. Этот порог неустойчивости оказывается доступен для УВ в газах с диссоциацией или ионизацией.

Сравнение полученных результатов с экспериментом осложняется тем, что рассматриваемая здесь линейная теория позволяет лишь найти условия, при которых плоский УФ становится неустойчивым, но ничего не может сказать о конечной структуре, в то время как в эксперименте определяются условия возникновения структуры, существенно отличной от плоского УФ.

Была проведена [15] серия экспериментов, обнаруживших неустойчивости плоских УВ в аргоне и углекислом газе. Все случаи нарушения устойчивости имели место при $\varphi \gtrsim \varphi_0$ на участках «обратного хода» ударных адиабат (в CO_2 при $v_0 > 5$ км/с и в аргоне при $v_0 > 10$ км/с), прилегающих к вертикальным участкам, а также на участке «прямого хода» (в CO_2 при $v_0 \simeq 3,6$ км/с). На всех этих участках выполняется условие (4.11), так что изложенная здесь теория полностью согласуется с экспериментом Гриффитса и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
2. Chubb D. L. Ionizing shock structure in a monoatomic gases.— *Phys. Fluids*, 1968, v. 11, No. 11, p. 2363—2376.
3. Pai T. G., Ramachandra S. M. Structure of a shock wave in a vibrationally relaxing diatomic gas.— *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, No. 2, p. 166—174.
4. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной.— *Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и ест. наук*, 1953, вып. 2, № 3, с. 95—100.
5. Alsmeyer H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the adsorption of electron beam.— *J. Fluid Mech.*, 1976, v. 74, No. 3, p. 497—513.
6. Тамм И. Е. О ширине ударных волн большой интенсивности.— *Тр. физ. ин-та АН СССР*, 1965, т. 29, с. 239—249.
7. Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzmann equation for a shock wave.— *Phys. Rev.*, 1951, v. 82, No. 6, p. 885—892.
8. Bird G. A. Aspects of the structure of strong shock waves.— *Phys. Fluids*, 1970, v. 13, No. 5, p. 1172—1177.
9. Muntz E., Harnett L. Molecular velocity distribution function measurements in a normal shock waves.— *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, No. 10, p. 2027—2035.
10. Karnegay W. M., Fridman J. D., Worthington W. C. Studies of spherical waves at low ambient pressures.— In: *Rarefied Gas Dynamics*. N. Y.—L.: Acad. Press, 1969, v. 1, p. 863—873.
11. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн.— *Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ)*, 1954, т. 27, вып. 3, с. 288—295.
12. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны.— *ПММ*, 1957, т. 21, № 4, с. 465—472.
13. Конторович В. М. К вопросу об устойчивости ударных волн.— *Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ)*, 1957, т. 33, вып. 6, с. 1525—1526.
14. Зайдель Р. М. Развитие возмущений в плоских ударных волнах.— *Журн. прикл. механики и техн. физики (ЖПМТФ)*, 1967, № 4, с. 30—39.
15. Griffiths R. W., Sandeman R. J., Hornung H. G. The stability of shock waves in ionizing and dissociating gases.— *J. Phys. D*, 1976, v. 9, No. 12, p. 1681—1693.

Москва

Поступила в редакцию
24.XII.1985