Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 532.5 :534.1

ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ОКЕАНА ОТ ЧАСТОТЫ БРЕНТА — ВЯЙСЯЛЯ

Рындина В. В.

При условии, что минимум частоты Брента— Вяйсяля (ЧБВ) больше параметра Кориолиса, получено параметрическое представление дисперсионных кривых (ДК) внутренних гравитационных волн в океане постоянной глубины с непрерывно меняющейся ЧБВ. Это представление используется при получении оценок смещения ДК в зависимости от смещения ЧБВ и при выделении ЧБВ, допускающих однозначное восстановление по последовательности ДК.

1. Постановка задачи. Рассматривается горизонтальный непрерывно стратифицированный океан постоянной глубины $\mathbf{H}$. Верхняя поверхность океана — плоскость x/y, ось z направлена вертикально вверх. ДК внутренних гравитационных волн определяются [1] как собственные значения $\omega^2 = \omega_n^2(k^2)$ краевой задачи

$$W'' - \frac{\mu(z)}{g}W' + \frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}k^2W = 0, \quad W(-\mathbf{H}) = W(0) = 0 \tag{1.1}$$

где $\mu(z)$ — квадрат ЧБВ, f — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести, k — волновое число, ω — частота свободных гармонических волн. При выводе (1.1) в [1] под $W(z)$ подразумевалась амплитуда вертикальной составляющей скорости частиц жидкости. При спектральном анализе задачи (1.1) смысл величины $W(z)$ безразличен. Для удобства припишем величине $W(z)$ размерность длины, т. е. такую же размерность, как у переменной z.

Было показано [1], что при естественном условии $\min\{\mu(z): z \in [-\mathbf{H}, 0]\} > f^2$ существует счетная система собственных кривых $\{\omega^2 = \omega_n^2(k^2)\}$, функции $\omega_n^2(k^2)$ положительны и возрастают с ростом k^2, причем

$$\lim_{k\to 0}\omega_n^2(k^2) = f^2, \quad \lim_{k\to\infty}\omega_n^2(k^2) = \max_{[-\mathbf{H},0]}\mu(z)$$

и имеет место асимптотическое представление

$$\omega_n^2(k^2) = f^2 + k^2/\lambda_n^\circ + O(k^4), \quad k \to 0 \tag{1.2}$$

где λ_n° — n-е собственное значение краевой задачи

$$(\rho_* W')' + \lambda^0(\mu(z) - f^2)\rho_* W = 0, \quad W(-\mathbf{H}) = W(0) = 0 \tag{1.3}$$

$$\rho_*(z) = \exp\left[g^{-1}\int_z^0 \mu(\xi)\,d\xi\right]$$

Краевая задача (1.3) имеет счетную последовательность положительных и простых собственных значений $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \ldots$.

Цель работы — получение параметрического представления ДК, а также использование его при рассмотрении обратной спектральной задачи и для оценки смещения $\omega_n^2(k^2)$ в зависимости от смещения ЧБВ.

2. Построение функции Грина и сведение краевой задачи (1.1) к интегральному уравнению. Как в работе [1], от краевой задачи (1.1) перейдем к задаче

$$(2.1)\qquad (\rho_* W')' + \lambda(\mu(z) - f^2)\rho_* W - k^2\rho_* W = 0$$
$$W(-\mathrm{H}) = W(0) = 0, \quad \lambda = k^2(\omega^2 - f^2)^{-1}$$

Поскольку уравнение

$$(\rho_* W')' + (\lambda\mu - \lambda^2 g^2)\rho_* W = 0$$

имеет решения [2]

$$(2.2)\qquad W_1^*(z) = \int_{-\mathrm{H}}^{z} \frac{1}{\rho_*(z)} e^{\lambda g(z-2x)} dx, \qquad W_2^*(z) = \int_{z}^{0} \frac{1}{\rho_*(z)} e^{\lambda g(z-2x)}\, dx$$

удобно уравнение (2.1) записать в виде

$$(\rho_* W')' + (\lambda\mu(z) - \lambda^2 g^2)\rho_* W = (-\lambda^2 g^2 + \lambda f^2 + k^2)\rho_* W$$

и от параметров λ и k перейти к параметрам λ и s, где $s = \lambda^2 g^2 - \lambda f^2 - k^2$.

Вместо краевой задачи (2.1) рассмотрим соответствующую ей краевую задачу

$$(2.3)\qquad (\rho_* W')' + (\lambda\mu(z) - \lambda^2 g^2)\rho_* W = -s\rho_* W$$
$$W(-\mathrm{H}) = W(0) = 0$$

Проверкой можно убедиться, что $s = 0$ не является собственным значением задачи (2.3) ни при каком вещественном λ. Поэтому при помощи решений (2.2) для краевой задачи (2.3) может быть построена функция Грина, имеющая вид

$$(2.4)\qquad G(z, t, \lambda) = \frac{-1}{\mathrm{a}(\lambda)} \begin{cases} W_1^*(z) W_2^*(t), & z \leqslant t \\ W_1^*(t) W_2^*(z), & z \geqslant t \end{cases}$$
$$\mathrm{a}(\lambda) = \int_{-\mathrm{H}}^{0} \frac{1}{\rho_*(z)} e^{-2\lambda g z}\, dz$$

Краевая задача (2.3) эквивалентна интегральному уравнению

$$(2.5)\qquad y(z) = s\int_{-\mathrm{H}}^{0} K(z, t, \lambda)\, y(t)\, dt$$
$$y(z) = \sqrt{\rho_*(z)}\, W(z), \qquad K(z, t, \lambda) = -\sqrt{\rho_*(z)\rho_*(t)}\, G(z, t, \lambda)$$

3. Параметрические уравнения ДК. Для ядра $K(z, t, \lambda)$ выполнены условия осцилляционности [3] при любом вещественном λ. Поэтому интегральное уравнение (2.5) имеет счетное множество положительных и простых характеристических значений $s_1(\lambda) < s_2(\lambda) < \ldots$ при любом вещественном λ [3].

Пара уравнений

$$(3.1)\qquad k^2(\omega^2 - f^2)^{-1} = \lambda, \; s_n(\lambda) = \lambda^2 g^2 - \lambda f^2 - k^2$$

определяет ДК $\omega^2 = \omega^2_{m_n}(k^2)$ в параметрическом виде при условии, что параметр λ пробегает множество значений функции

$$\lambda_n(k^2) = k^2(\omega^2_{m_n}(k^2) - f^2)^{-1}$$

рассматриваемой на луче $(0, +\infty)$. Было показано [1], что $d\lambda_n/dk^2 > 0$ при $k^2 \in (0, +\infty)$. Поэтому множество значений функции λ_n — луч $(\mathrm{c}_n, +\infty)$, где $\mathrm{c}_n = \lim \lambda_n(k^2)$ при $k \to 0$. Из асимптотического представления (1.2) следует, что $\mathrm{c}_n = \mathring{\lambda}_{m_n}$.

Последовательность $\{\mathrm{c}_n\}$ возрастающая.

Действительно, при фиксированном $\lambda > c_n$ одна из точек пересечения линий

$$(3.2)\qquad k^4g^2(\omega^2-f^2)^{-2}-k^2f^2(\omega^2-f^2)^{-1}-k^2=s_n(\lambda)$$
$$k^2(\omega^2-f^2)^{-1}=\lambda,\ k^2>0,\ \omega^2>0$$

в плоскости $k^2\omega^2$ лежит на m_n-й ДК. Введем обозначения $y=k^2$, $x=k^2\ (\omega^2-f^2)^{-1}$. Линии (3.2) будут пересекаться тогда и только тогда, когда в плоскости xy будут пересекаться линии

$$(3.3)\qquad x=\lambda,\ y=g^2x^2-f^2x-s_n(\lambda),\ x>0,\ y>0$$

Линии же (3.3) пересекаются в единственной точке при тех и только тех λ, при которых справедливо неравенство

$$(3.4)\qquad \lambda>F_n(\lambda),\quad F_n(\lambda)=(2g^2)^{-1}[f^2+\sqrt{f^4+4g^2s_n(\lambda)}]$$

Число c_n определяется, очевидно, как значение λ, при котором в (3.4) достигается знак равенства. Так как $c_n=F_n(c_n)<F_{n+1}(c_n)$, то $c_{n+1}>c_n$.

Из возрастания последовательностей $\{c_n\}$, $\{\lambda_n{}^\circ\}$ следует, что $m_n=n$.

Решая систему уравнений (3.1) относительно k^2 и ω^2, получим параметрические уравнения ДК $\omega^2=\omega_n{}^2(k^2)$ в виде

$$(3.5)\qquad k^2=\lambda^2g^2-\lambda f^2-s_n(\lambda),\quad \omega^2=\lambda g^2-\lambda^{-1}s_n(\lambda),\quad \lambda\in(\lambda_n{}^\circ+\infty)$$

4. Задание ДК в неявном виде. Из (3.1) следует, что уравнение

$$(4.1)\qquad s_n\left(\frac{k^2}{\omega^2-f^2}\right)=\frac{g^2k^4}{(\omega^2-f^2)^2}-\frac{f^2k^2}{\omega^2-f^2}-k^2$$

определяет n-ю ДК в неявном виде.

В частном случае $\mu(z)\equiv\mu_0$ получаем

$$s_n(\lambda)=g^2\lambda^2-\mu_0\lambda+n^2\pi^2\mathrm{H}^{-2}+{}^1/_4\,\mu_0{}^2g^{-2}$$

и уравнение (4.1) имеет решение

$$\omega^2=f^2+k^2(\mu_0-f^2)(k^2+n^2\pi^2\mathrm{H}^{-2}+{}^1/_4\,\mu_0{}^2g^{-2})^{-1}$$

совпадающее с известным представлением n-й ДК [1].

В общем случае рассчитывать на явный вид зависимости s_n от λ не приходится. Однако можно утверждать, что $s_n(\lambda)$ — голоморфная функция на вещественной оси [4].

В самом деле, семейство интегральных операторов $K(\lambda)$ с симметричным вещественным ядром $K(z, t, \lambda)$ — самосопряженное и голоморфное семейство типа (A) компактных операторов, определенных на вещественной оси, и оператор $K(\lambda)$ при любом $\lambda\in R$ имеет простые характеристические значения, не обращающиеся в нуль.

Ниже рассмотрены некоторые приложения параметрического представления ДК (3.5).

5. Оценка смещения частоты свободных колебаний в зависимости от смещения ЧБВ. Ограничимся функциями $\mu(z)$, принадлежащими параметрическому семейству Г, состоящему из многочленов не выше фиксированной степени r

$$\sum_{j=0}^{r}c_jz^j,\quad c_j\in[c_1^{(j)},\ c_2^{(j)}],\quad j=0,1,2,\ldots,r$$

и удовлетворяющему условию $m=\min\{\mu(z): z\in[-\mathrm{H},0],\ \mu\in\Gamma\}>$ $>f^2$.

Для допустимого значения $\mathbf{c}=(c_0, c_1, \ldots, c_r)$ функцию из семейства Г обозначим $\mu(z, \mathbf{c})$. Ядро $K(z, t, \lambda)=K(z, t, \lambda, \mathbf{c})$ интегрального оператора в (2.5) аналитически зависит от λ и $\mathbf{c}$ при вещественных λ; $\mathbf{c}\in\Pi=$ $=[c_1{}^{(0)}, c_2{}^{(0)}]+[c_1{}^{(1)}, c_2{}^{(1)}]\times\ldots\times[c_1{}^{(r)}, c_2{}^{(r)}]$. Характеристические значения интегрального оператора с ядром $K(z, t, \lambda, c)$ обозначим $s_n(\lambda, c)$. Рассуждая, как и выше, получим, что $s_n(\lambda, c)$ — голоморфные функции от λ и c на $R \times \Pi$. Соответствующие собственные функции краевой задачи (2.3), нормированные условием

$$\int_{-H}^{0} \rho_*(z) W_n^2(z, \lambda, c)\, dz = d^3$$

где d — величина, численно равная единице и имеющая размерность длины, также голоморфно зависят от параметров λ и c на $R \times \Pi$.

Рассмотрим функции $\mu(z, \gamma) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_r z^r$ $(\gamma = \alpha, \beta)$, принадлежащие семейству Γ. Этим функциям соответствуют последовательности характеристических значений $\{s_n(\lambda, \gamma)\}$ и последовательности ДК $\{\omega^2 = \omega_n^2(k^2, \gamma)\}$.

Получим глобальную и локальную оценки вида

$$|\Delta\omega_n^2| \leqslant A \|\Delta\mu\|, \quad \Delta\mu = \mu(z, \alpha) - \mu(z, \beta)$$

$$\Delta\omega_n^2 = \omega_n^2(k^2, \alpha) - \omega_n^2(k^2, \beta)$$

с различными значениями A и определенной ниже нормой $\|\Delta\mu\|$.

Рассмотрим уравнение

$$s_n(\lambda_1, \alpha) - s_n(\lambda_2, \beta) = g^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - f^2(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{5.1}$$

относительно вещественных переменных λ_1 и λ_2, имеющих ту же размерность, что и $k^2\omega^{-2}$. Из (4.1) следует, что уравнение (5.1) имеет решение

$$\lambda_1 = y_1 = k^2[\omega_n^2(k^2, \alpha) - f^2]^{-1}, \quad \lambda_2 = y_2 = k^2[\omega_n^2(k^2, \beta) - f^2]^{-1}$$

Вычитая и прибавляя $s_n(\lambda_2, \alpha)$ к левой части уравнения (5.1), применяя формулу Тейлора и тождественные преобразования, получим уравнение

$$\left[\frac{\partial s_n}{\partial\lambda}(\lambda_1, \alpha) + f^2\right](\lambda_1 - \lambda_2) - (g^2 - \delta)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \tag{5.2}$$

$$- g^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \tau = 0, \qquad \delta = g^2 - {}^1/_2 \frac{\partial^2 s_n}{\partial\lambda^2}(\lambda_1 + \theta_1(\lambda_2 - \lambda_1), \alpha)$$

$$\tau = s_n(\lambda_2, \alpha) - s_n(\lambda_2, \beta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (\alpha_j - \beta_j) \frac{\partial s_n}{\partial c_j}(\lambda_2, \beta + \theta_2(\alpha - \beta)), \qquad \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$$

Для нахождения $\partial s_n/\partial\lambda\,(\lambda, c)$ положим в уравнении (2.3) $s = s_n(\lambda, c)$, $\mu(z) = \mu(z, c)$, $W = W_n(z, \lambda, c)$ и полученное тождество продифференцируем по переменной λ. Умножим затем обе части полученного равенства на $W_n(z, \lambda, c)$ и проинтегрируем их по отрезку $[-H, 0]$. В результате найдем, что

$$\frac{\partial s_n}{\partial\lambda}(\lambda, c) = 2\lambda g^2 - \nu(\lambda, c) - f^2 \tag{5.3}$$

$$\nu(\lambda, c) = d^{-3} \int_{-H}^{0} (\mu(z, c) - f^2)\, \rho_*(z, c)\, W_n^2(z, \lambda, c)\, dz$$

Аналогично получается равенство

$$\frac{\partial s_n}{\partial c_j}(\lambda, c) = -d^{-3} \int_{-H}^{0} Q(z, \lambda, c)\, W_n^2(z, \lambda, c)\, dz \tag{5.4}$$

$$Q(z, \lambda, c) = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial z}(z^j \rho_*(z, c)) + \lambda z^j \rho_*(z, c)$$

Подставляя в (5.2) выражение для $\partial s_n/\partial\lambda(\lambda_1, \alpha)$ из (5.3), придем к уравнению

(5.5) $$\delta(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \nu(\lambda_1, \alpha)(\lambda_1 - \lambda_2) + \tau = 0$$

Выделим два случая: 1) $\delta = 0$ ($\delta = 0$ в случае $\mu \equiv \mathrm{const}$), 2) $\delta \neq 0$ (можно показать, что $\delta > 0$, если $\mu \not\equiv \mathrm{const}$, $n = 1$). Из (5.5) имеем, что в первом случае $\lambda_1 - \lambda_2 = \tau\nu^{-1}(\lambda_1, \alpha)$, во втором случае $\lambda_1 - \lambda_2 = (2\delta)^{-1}[\nu(\lambda_1, \alpha) \pm \sqrt{\nu^2(\lambda_1, \alpha) - 4\delta\tau}]$.

Займемся более детально вторым случаем. В дальнейших выкладках вместо λ_1, λ_2 будем соответственно подставлять y_1, y_2.

Из (5.1) для τ следует представление

(5.6) $$\tau = s_n(y_2, \alpha) - s_n(y_1, \alpha) - g^2(y_2^2 - y_1^2) + f^2(y_2 - y_1)$$

Используя (5.3), получаем

(5.7) $$y_1 - y_2 = \tau\left[\frac{1}{y_2 - y_1}\int\limits_{y_1}^{y_2} \nu(\lambda, \alpha)\, d\lambda\right]^{-1}$$

Из формулы (5.7) вытекает неравенство

(5.8) $$|y_1 - y_2| < \frac{|\tau|}{(m(\alpha) - f^2)}, \quad \alpha, \beta \in \Pi$$

$$m(\alpha) = \min\{\mu(z, \alpha) \colon z \in [-\mathrm{H}, 0]\}$$

От разности $m(\alpha) - f^2$ в знаменателе удается избавиться, если ограничиться оценкой $|y_1 - y_2|$ для фиксированного $\alpha \in \Pi$ и β, достаточно близких к α.

Из голоморфности $s_n(\lambda, \mathbf{c})$ по λ и $\mathbf{c}$ на R и Π, (5.3), (5.4) вытекает голоморфность дисперсионных кривых $\omega^2 = \omega_n^2(k^2, \mathbf{c})$ по $\mathbf{c}$ на Π. Поэтому при фиксированном k^2 разность $y_1 - y_2$ стремится к нулю при $\beta \to \alpha$. Так как при $\beta \to \alpha$ имеем $\tau \to 0$, $\nu(y_1, \alpha) \geqslant m^2 - f^2 > 0$, δ ограничена, то при $\beta \to \alpha$

$$y_1 - y_2 = (2\delta)^{-1}[\nu(y_1, \alpha) - \sqrt{\nu^2(y_1, \alpha) - 4\delta\tau}]$$

Поскольку при $\beta = \alpha$ имеем $\nu^2(y_1, \alpha) - 4\delta\tau = \nu^2(y_1, \alpha) > 0$, то существует окрестность $\Pi(\alpha) = [\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_1 + \varepsilon_1'] \times \ldots + [\alpha_r - \varepsilon_r, \alpha_r + \varepsilon_r']$, $\varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_j' > 0$, $j = 0, 1, \ldots, r$ точки α, содержащаяся в Π, такая, что для $\beta \in \Pi(\alpha)$ справедливо неравенство $\nu^2(y_1, \alpha) - 4\delta\tau > 0$ и, следовательно, справедлива оценка

(5.9) $$|y_1 - y_2| < 2|\tau|\nu^{-1}(y_1, \alpha), \quad \beta \in \Pi(\alpha)$$

Оценим сверху $|\tau|$. Используя в выражении, определяющем τ, равенство (5.4) и учитывая что $\partial\rho_*/\partial z = -\mu\rho_*/g$, получим

$$\tau = d^{-3}\int\limits_{-\mathrm{H}}^{0} \rho_*(z, \beta + \theta_2(\alpha - \beta))\left[\frac{1}{2g}\frac{\partial(\Delta\mu)}{\partial z} + y_2\Delta\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2g^2}\mu(z, \beta + \theta_2(\alpha - \beta))\Delta\mu\right] W_n^2(z, y_2, \beta + \theta_2(\alpha - \beta))\, dz$$

Положив

$$\|\Delta\mu\| = \max\left\{\max_{[-\mathrm{H}, 0]}|\Delta\mu|,\ d\max_{[-\mathrm{H}, 0]}\left|\frac{\partial(\Delta\mu)}{\partial z}\right|\right\}$$

получим из предыдущего равенства оценку

$$|\tau| \leqslant \|\Delta\mu\|\left[\frac{1}{2gd} + \frac{\mathrm{M}(\beta + \theta_2(\alpha - \beta))}{2g^2} + y_2\right],$$
$$\mathrm{M}(\mathbf{c}) = \max\{\mu(z, \mathbf{c}) : z \in [-\mathrm{H}, 0]\}$$

Так как $\mu(z, \beta + \theta_2(\alpha - \beta)) = \theta_2\mu(z, \alpha) + (1 - \theta_2)\mu(z, \beta)$, то $\mathbf{M}(\beta + \theta_2(\alpha - \beta)) \leqslant \max\{\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(\beta)\} = \mathbf{M}(\alpha, \beta)$ и для $|\tau|$ получается неравенство

$$|\tau| \leqslant y_2\left[1 + \frac{1}{y_2}\left(\frac{1}{2gd} + \frac{1}{2g^2}\mathbf{M}(\alpha, \beta)\right)\right]\|\Delta\mu\| \tag{5.10}$$

Для нахождения нужной оценки снизу для $\nu(y_1, \alpha)$ положим в уравнении (2.1) $\lambda = y_1$, $\mu(z) = \mu(z, \alpha)$, $W = W_n(z, y_1, \alpha)$. Умножив обе части полученного тождества на $W_n(z, y_1, \alpha)$ и проинтегрировав затем полученное выражение по отрезку $[-\mathbf{H}, 0]$, найдем

$$\nu(y_1, \alpha) = \frac{1}{y_1}\left[k^2 + d^{-3}\int\limits_{-\mathbf{H}}^{0} \rho_*(z, \alpha) W_n'^2(z, y_1, \alpha)\,dz\right] \geqslant \tag{5.11}$$

$$\geqslant \frac{k^2}{y_1} = \omega_n^2(k^2, \alpha) - f^2$$

Из (5.8), (5.10) следует оценка

$$|\Delta\omega_n^2| \leqslant \frac{\omega_n^2(k^2, \alpha) - f^2}{m(\alpha) - f^2}\left[1 + \frac{\Gamma(\alpha, \beta)}{y_2}\right]\|\Delta\mu\| \tag{5.12}$$

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \frac{1}{2gd} + \frac{\mathbf{M}(\alpha, \beta)}{2g^2}$$

Из (5.12) вытекает оценка

$$|\Delta\omega_n^2| < \mathbf{A}(k, \alpha, \beta)\frac{\omega_n^2(k^2, \alpha) - f^2}{m(\alpha) - f^2}\|\Delta\mu\|$$

$$\mathbf{A}(k, \alpha, \beta) = 1 + k^{-2}(\mathbf{M}(\beta) - f^2)\,\Gamma(\alpha, \beta)$$

Из (5.12) можно получить также оценку, не зависящую от k

$$|\Delta\omega_n^2| > \mathbf{B}(\alpha, \beta)\frac{\mathbf{M}(\alpha) - f^2}{m(\alpha) - f^2}\|\Delta\mu\|, \quad \alpha, \beta \in \Pi \tag{5.13}$$

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = 1 + \frac{\mathbf{H}}{8d}\left(1 + \frac{d\mathbf{M}(\alpha, \beta)}{g}\right)\exp[\mathbf{H}g^{-1}\mathbf{M}(\beta)] < \mathbf{B}$$

Оценка (5.13) следует из неравенства $y_2 > \lambda_n^\circ(\beta)$, где $\lambda_n^\circ(\beta)$ — n-е собственное значение краевой задач (1.3) при $\mu(z) = \mu(z, \beta)$ и оценки снизу $\lambda_n^\circ(\beta)$, получаемой при сведении краевой задачи (1.3) к интегральному уравнению.

Из (5.9), (5.10), (5.11) получаются оценки

$$|\Delta\omega_n^2| < 2\mathbf{A}(k, \alpha, \beta)\|\Delta\mu\|, \quad |\Delta\omega_n^2| < 2\,\mathbf{B}(\alpha, \beta)\|\Delta\mu\|,$$

$$\beta \in \Pi(\alpha)$$

Из оценки (5.13) вытекает, что $|\Delta\omega_n^2|$ равномерно стремится к нулю по k^2 на $(0, +\infty)$ и n на множестве натуральных чисел при $\|\Delta\mu\| \to 0$.

Аналогичные рассмотрения можно провести для параметрических семейств Г другого вида и при условии свободной поверхности на верхней границе океана.

6. Применение функции Грина к задаче восстановления ЧБВ по известному закону дисперсии. Знание явного вида функции Грина оказывается полезным при выяснении возможности единственного восстановления функции $\mu(z)$ по последовательности ДК. Заметим, что для определения $\mu(z)$ достаточно уметь восстанавливать по последовательности ДК функцию $\mathbf{a}(\lambda)$ с точностью до постоянного множителя. В самом деле, для $\mathbf{a}_1(\lambda) = \mathbf{Aa}(\lambda)$, где $\mathbf{A}$ — постоянная, отличная от нуля, имеем представление

$$\mathbf{a}_1(\lambda)=\mathbf{A}\int\limits_0^{\mathbf{H}}\frac{1}{\rho_*(t-\mathbf{H})}\,e^{-2\lambda g(t-\mathbf{H})}\,\mathrm{d}t$$

Используя формулу обращения преобразования Лапласа и связь функции ρ_* с μ, получим при $t\in(0,\ \mathbf{H})$, $\sigma>0$

$$\mu(t-\mathbf{H})=g\frac{d}{dt}\Big(\ln\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathbf{a}_1(\lambda)\,e^{2\lambda g(t-\mathbf{H})}\,\mathrm{d}\lambda\Big) \tag{6.1}$$

Таким образом, μ (z) однозначно восстанавливается по функции $\mathbf{Aa}$ (λ) и результат восстановления не зависит от постоянной **A**.

Покажем, что функция $\mathbf{a}(\lambda)$ с точностью до постоянного множителя в ряде случаев однозначно определяется при помощи первого следа $\mathbf{A}_1$ (λ) интегрального оператора с ядром K $(z,\ t,\ \lambda)$.

Для $\mathbf{A}_1$ (λ) можно записать две формулы, используя (2.4)

$$\mathbf{A}_1(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s_k(\lambda)},\quad \mathbf{A}_1(\lambda)=\int\limits_{-\mathbf{H}}^{0}K(z,z,\lambda)\,dz=\frac{\mathbf{b}(\lambda)}{\mathbf{a}(\lambda)} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{b}(\lambda)=\int\limits_{-\mathbf{H}}^{0}\rho_*(z)\,W_1{}^*(z)\,W_2{}^*(z)\,dz$$

Функция $\mathbf{A}_1(\lambda)$ вполне определяется последовательностью ДК первой из формул (6.2). Это следует из (4.1) и аналитичности функций s_n (λ), $\mathbf{A}_1$ (λ) на вещественной прямой.

По второй из формул (6.2) функция $\mathbf{a}$ (λ) с точностью до постоянного множителя однозначно определяется по $\mathbf{A}_1$ (λ), если функции $\mathbf{a}$ (λ) и $\mathbf{b}$ (λ) не имеют общих нулей.

Итак, если известно, что функция μ (z) принадлежит множеству функций, для которых $\mathbf{a}(\lambda)$ и $\mathbf{b}(\lambda)$ не имеют обших нулей, то по последовательности ДК из соответствующего этому множеству класса кривых функция μ (z) восстанавливается однозначно по формуле (6.1).

Если μ $(z)\equiv\mu_0$, то функции

$$\mathbf{a}(\lambda)=\frac{\mathbf{H}\,\mathrm{sh}\,\Lambda}{\Lambda}e^{\Lambda},\quad \mathbf{b}(\lambda)=\frac{\mathbf{H}^3e^{\Lambda}}{2\Lambda^2}\left[\mathrm{ch}\,\Lambda-\frac{\mathrm{sh}\,\Lambda}{\Lambda}\right]$$

$$\Lambda=\mathbf{H}\,(\lambda g-{}^1/_2\,\mu_0/g)$$

не имеют общих нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
3. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.— Л.: Гостехиздат, 1950. 360 с.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
14.V.1985