Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 532.5

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА В ГИДРОДИНАМИКЕ ЗАВИХРЕННОЙ И СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЕЙ

Владимиров В. А.

Представлены утверждения типа теоремы Лагранжа для трех новых классов течений идеальной несжимаемой жидкости. Первый класс составляют состояния покоя неоднородной по плотности (непрерывно стратифицированной) жидкости, находящейся во внешнем поле массовых сил. Ко второму и третьему классам относятся некоторые вихревые (вращающиеся) течения однородной по плотности жидкости. В отличие от ситуаций, изучавшихся ранее, течения второго и третьего классов не являются состояниями относительного или абсолютного покоя и не обладают свободными границами. В то же время формулировки и доказательства утверждений для всех трех случаев практически повторяют одно другое.

Вопрос о существовании аналога теоремы Лагранжа в гидродинамике изучался в ряде работ ([1—4] и др.).

1. Стратифицированная жидкость. Замкнутый покоящийся сосуд заполнен идеальной несжимаемой неоднородной по плотности (непрерывно стратифицированной) жидкостью и находится во внешнем поле массовых сил. Для простоты изучается двумерная (плоская) постановка. На плоскости декартовых координат x, y внутренности сосуда соответствует область τ. В каждой точке ее границы $\partial\tau$ однозначно определена нормаль $\mathbf{n}$. Пусть $\mathbf{u} = (u, v)$ — поле скорости, а ρ и p — поля плотности и давления. Поле массовых сил $\mathbf{g}\ (x, y)$ имеет потенциал $U\ (x, y)$, так что $\mathbf{g} = -\nabla U$. Уравнения движения записываются в форме

$$\rho D\mathbf{u} = -\nabla p - \rho\nabla U, \quad D\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$
$$D \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$$

На границе $\partial\tau$ выполняются условия непротекания

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{1.2}$$

Задача для (1.1), (1.2) имеет два первых интеграла

$$E = \int_\tau \rho\left(\frac{u^2+v^2}{2} + U\right)d\tau = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

$$I = \int_\tau \Phi(\rho)\,d\tau = \mathrm{const} \quad (d\tau \equiv dx\,dy) \tag{1.4}$$

первый из которых имеет смысл полной энергии, второй определяется через произвольную функцию $\Phi\ (\rho)$ и является интегральным выражением неизменности плотности и объема каждой жидкой частицы.

Широко используется также приближенная форма уравнений (1.1), носящая название приближения Буссинеска [5] и в безразмерных переменных имеющая вид

$$D\mathbf{u} = -\nabla p - \rho\nabla U, \quad D\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.5}$$

Интеграл энергии для (1.5), (1.2) отличается от (1.3)

$$E^* = \int_\tau \left(\frac{u^2+v^2}{2} + \rho U\right)d\tau = \mathrm{const} \tag{1.6}$$

Интеграл (1.4) остается неизменным.

Случаям покоящейся жидкости ($\mathbf{u} = 0$) как для уравнений (1.1), так и для (1.5) соответствуют одни и те же состояния гидростатического равновесия (покоя)

$$(1.7) \qquad u = v = 0, \quad \rho = \rho_0 (x, y), \quad p = p_0 (x, y)$$

функции ρ_0 и p_0 в которых связаны соотношением

$$(1.8) \qquad \nabla p_0 + \rho_0 \nabla U = 0$$

Применение к (1.8) операции вихря дает $\nabla \rho_0 \times \nabla U = 0$, что позволяет записать функциональную зависимость $f(U, \rho_0) = 0$, или, при выполнении условий теоремы о неявной функции

$$(1.9) \qquad U = \varphi (\rho_0)$$

Удобно ввести следующие обозначения. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = \nabla U / |\nabla U|$ — поле единичных нормалей к поверхностям $U = \mathrm{const}$. Тогда

$$(1.10) \qquad \nabla \rho = \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla \rho_0) \equiv \mathbf{v} \rho_{0\nu}, \quad \mathbf{g} = g \mathbf{v}, \quad N^2 \equiv g \rho_{0\nu}$$

$$dU / d\rho_0 = \varphi' (\rho_0) \equiv d\varphi / d\rho_0 = -(N / \rho_{0\nu})^2$$

Величина N для (1.5) имеет смысл частоты плавучести (Брента — Вяйсяля) [5].

Пусть теперь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $\rho = \rho_0 (x, y) + \sigma (x, y, t)$ — некоторое точное нестационарное решение задачи (1.5), (1.2), соответствующее возмущению состояния покоя (1.7).

Утверждение 1. Пусть во всей области τ выполнено неравенство

$$(1.11) \qquad 0 \leqslant c^- \leqslant (N / \rho_{0\nu})^2 \leqslant c^+ < \infty$$

с постоянными c^-, c^+. Тогда возмущения u, v, σ оцениваются через свои начальные значения u_*, v_*, σ_* следующим образом:

$$(1.12) \qquad \int_\tau (u^2 + v^2 + c^- \sigma^2) \, d\tau \leqslant \int_\tau ({u_*}^2 + {v_*}^2 + c^+ {\sigma_*}^2) \, d\tau$$

Доказательство. Из (1.6), (1.4) составляется сохраняющийся функционал

$$F(u, v, \rho) \equiv E^* + I = \int_\tau \left[\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho U + \Phi (\rho) \right] d\tau = F(0, 0, \rho_0) + F_1 + F_2$$

$$F_1 \equiv \int_\tau \sigma [\varphi (\rho_0) + \Phi' (\rho_0)] \, d\tau$$

$$F_2 \equiv \int_\tau \left[\frac{u^2 + v^2}{2} + \Phi (\rho_0 + \sigma) - \Phi (\rho_0) - \Phi' (\rho_0) \sigma \right] d\tau$$

В F_1 функция U заменена согласно (1.9). Пользуясь произвольностью $\Phi (\rho_0)$, выбираем $\Phi' (\rho_0) = -\varphi (\rho_0)$. При этом $F_1 \equiv 0$ и функционал F_2 оказывается также не зависящим от времени. Далее из (1.11), (1.10) вытекает неравенство

$$(1.13) \qquad c^- \leqslant \Phi'' \leqslant c^+$$

справедливое на промежутке изменения ρ_0 в области τ. Пусть функция $\Phi (\rho)$ доопределена для всех остальных значений ρ с сохранением неравенства (1.13). Тогда для любого числа a двукратным интегрированием можно получить

$$(1.14) \qquad {}^1/_2 c^- a^2 \leqslant \Phi (\rho + a) - \Phi (\rho) - \Phi' (\rho) a \leqslant {}^1/_2 c^+ a^2$$

Из сохранения F_2 и (1.14) вытекает (1.12).

Проведенное доказательство основано на методе связки интегралов [6, 3] в форме [7, 8].

Наличие оценки сверху (1.12) произвольного возмущения через свои начальные данные означает устойчивость решения (1.7) в смысле Ляпунова [6, 3].

Несколько более точные, чем (1.12), оценки устойчивости могут быть получены в двух важных случаях.

Утверждение 2. Если во всей области τ

$$(1.15)\qquad 0 \leqslant (N/\rho_{0v})^2 = \mathrm{const} < \infty$$

то для задачи (1.5), (1.2) имеет место устойчивость решения (1.7) в смысле независимости от времени интеграла

$$(1.16)\qquad \int\limits_{\tau} [u^2 + v^2 + (N/\rho_{0v})^2\,\sigma^2]\,d\tau = \mathrm{const}$$

Доказательство вытекает из совпадения при условии (1.15) величины (1.16) с F_2. Условие (1.15) выполняется в часто встречающемся случае однородного поля тяжести $\mathbf{g} = (0, g)$, $g = \mathrm{const}$, линейной зависимости $\rho_0\,(y)$ и постоянной частоты плавучести N.

Утверждение 3. Если во всей области τ: $0 \leqslant N^2 < \infty$, то для линеаризованной на состоянии (1.7) задачи (1.5), (1.2) имеет место устойчивость в смысле независимости от времени интеграла (1.16).

Доказательство проводится прямыми вычислениями.

Приведенный способ получения оценок фактически основан на наличии вариационного принципа. Действительно, пусть δu, δv и $\delta\rho$ — независимые вариации функций u, v и ρ, уже никак не связанные с уравнениями движения. Тогда для первой и второй вариации функционала $F = E^* + I$ в точке (1.7) справедливы представления

$$\delta F = \int\limits_{\tau} \delta\rho\,[\varphi\,(\rho_0) + \Phi'\,(\rho_0)]\,d\tau$$

$$\delta^2 F = \int\limits_{\tau} [(\delta u)^2 + (\delta v)^2 + \Phi''\,(\rho_0)\,(\delta\rho)^2]\,d\tau$$

Уже упомянутый выбор $\Phi' = -\varphi$ и неравенства (1.11), (1.13) приводят к равенству $\delta F = 0$ и положительной определенности $\delta^2 F$. Таким образом, функционал F имеет на состоянии (1.7) абсолютный изолированный минимум. Этот минимум одновременно является условным минимумом энергии E^* на множестве допустимых функций, подчиненных условию $I = \mathrm{const}$. Достаточно заметить, что $F = E^* + \lambda I$ с множителем Лагранжа $\lambda = 1$. Минимум E^* может интерпретироваться также как условный минимум потенциальной энергии в соответствии с классическими формулировками прямой теоремы Лагранжа [1—4].

Все результаты п. 1 с небольшими изменениями переносятся на точную задачу (1.1), (1.2) о движении стратифицированной жидкости. Двумерность задачи также не принципиальна. Все утверждения просто обобщаются на пространственный случай.

2. Вращающиеся течения с трансляционной симметрией. Рассматриваются движения однородной по плотности жидкости во вращающейся с постоянной скоростью $\Omega/2$ системе координат. Уравнения движения записываются так [3]:

$$(2.1)\qquad (\partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p^*, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

($\mathbf{u}$ — вектор скорости, p^* — модифицированное давление, включающее в себя «центробежную» добавку).

Пусть $\mathbf{k}$ — единичный вектор, задающий фиксированное (во вращающейся системе) направление и составляющий с вектором $\boldsymbol{\Omega}$ угол θ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Изучается класс решений уравнений (2.1), в которых $\mathbf{u}$ и p^* не изменяются вдоль направления $\mathbf{k}$. Вводится система декартовых координат x, y, z так, что ось z параллельна вектору $\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Для рассматриваемых движений поля скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и давления p^*

не зависят от координаты z

$$u = u(x, y, t), \quad p^* = p^*(x, y, t) \tag{2.2}$$

После введения обозначений

$$\begin{gathered}\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), \quad \rho \equiv w + \Omega_1 y - \Omega_2 x \\ g = (g_1, g_2, g_3) \equiv \mathbf{k} \times \Omega = (-\Omega_2, \Omega_1, 0)\end{gathered} \tag{2.3}$$

система уравнений (2.1) для движений (2.2) может быть преобразована к форме

$$\begin{gathered}Du = -p_x + \rho g_1, \quad Dv = -p_y + \rho g_2 \\ D\rho = 0, \quad u_x + v_y = 0; \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $p \equiv p^* - \Omega_3\psi + {}^1/_2\,(\Omega_2 x - \Omega_1 y)^2$, ψ — функция тока, для которой $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$. Индексы из независимых переменных всюду обозначают частные производные.

Если движение (2.2) происходит в фиксированной области, то ее граница должна иметь форму цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси z, т. е. задаваться выражением

$$f(x, y) = 0 \tag{2.5}$$

На плоскости xy кривая (2.5) ограничивает область течения τ, которая может и не быть односвязной. Ее граница $\partial\tau$ (2.5) может быть как замкнутой, так и уходить в бесконечность. Граничные условия непротекания на (2.5) дают

$$uf_x + vf_y = 0 \tag{2.6}$$

Замечательный факт состоит в совпадении (2.4)—(2.6) с уравнениями и соответствующими граничными условиями для плоских движений неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости в приближении Буссинеска (1.5), (1.2). Поэтому все результаты, справедливые для плоских движений стратифицированной жидкости, одновременно имеют место и для вращающихся течений с трансляционной симметрией.

В частности, аналогами состояний гидростатического равновесия (1.7) будут течения, описываемые равенствами

$$u = v = 0, \; \rho = \rho(y_0) \tag{2.7}$$

с координатой y_0, отсчитываемой вдоль направления вектора g (2.3). В исходных терминах (2.1) представление (2.7) задает сдвиговое течение одного направления

$$u = v = 0, \quad w = w(y_0) \tag{2.8}$$

с произвольной функцией $w(y_0)$. На течения (2.7), (2.8) без изменений переносятся все результаты п. 1.

Конкретную реализацию (2.7), (2.8) дают, например, сдвиговые течения одного направления в щели между двумя параллельными вращающимися плоскостями. Вектор Ω должен быть параллелен плоскостям, а вектор g (и ось y_0) — перпендикулярен к ним. Утверждения 1—3 (п. 1) будут давать условия устойчивости течений (2.8) относительно возмущений, не зависящих от координаты z. Для возмущений с другими направлениями инвариантности течения (2.8) не будут аналогами состояний покоя. В этих случаях будет иметь место эквивалентность течений (2.8) плоскопараллельным течениям стратифицированной жидкости.

3. Течения с винтовой симметрией. Движения однородной по плотности жидкости в цилиндрической системе координат φ, r, z описываются уравнениями

$$(3.1)\qquad Du+\frac{uv}{r}=-\frac{p_\varphi}{r},\quad Dv-\frac{u^2}{r}=-p_r,\quad Dw=-p_z$$
$$v_r+\frac{v}{r}+\frac{u_\varphi}{r}+w_z=0;\quad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

где u, v, w — φ-, r-, z-составляющие скорости, p — давление. Для движений с винтовой симметрией u, v, w и p — функции трех независимых переменных t, r и $\mu\equiv a\varphi-bz$

$$(3.2)\qquad p=p\,(t,r,\mu)\ \text{и т. д.}$$

где b — любое вещественное число, а параметр a можно без ограничения общности считать принимающим только два значения: 0 и 1.

При $a=1$ все решения вида (3.2) будут периодическими по μ с периодом 2π и достаточно рассматривать значения из интервала

$$(3.3)\qquad 0\leqslant\mu\leqslant 2\pi$$

При $a=0$ (случай вращательной симметрии) решения могут и не быть периодическими.

Используя обозначения

$$(3.4)\qquad \alpha\equiv au-brw,\quad \beta\equiv bru+aw$$
$$R\equiv a^2+b^2r^2,\quad g\equiv b^2r/R^2,\quad K\equiv 2ab/R^2$$

уравнения (3.1) для движений (3.2) можно преобразовать к форме

$$(3.5)\qquad Dv-K\beta\alpha-(a\alpha/R)^2/r=-p_r+g\beta^2$$
$$D\,(r\alpha/R)+K\beta rv=-p_\mu,\quad D\beta=0$$
$$v_r+\frac{v}{r}+\frac{\alpha_\mu}{r}=0;\quad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}$$

Если движения (3.2) происходят в фиксированной области, то ее границы должны обладать требуемой симметрией, т. е. задаваться выражением

$$(3.6)\qquad f\,(r,\mu)=0$$

На плоскости переменных $r\mu$ кривая (3.6) ограничивает область течения τ. Условия непротекания для истинных компонент скорости (3.1), записанные в терминах (3.4), (3.6), дают

$$(3.7)\qquad vf_r+(\alpha/r)\,f_\mu=0$$

Задача (3.5)—(3.7) весьма похожа на уравнения и граничные условия для плоских движений стратифицированной жидкости, записанные в полярной системе координат. При $a=1$ роль угловой переменной играет величина μ с обычным интервалом изменения (3.3), а роль μ — компоненты скорости — величина α. Соответствующее поле массовых сил направлено по радиусу. Для вращательно-симметричных движений ($a=0$) отмеченное сходство переходит в эквивалентность. Уравнения (3.5) редуцируются к форме

$$(3.8)\qquad Dv=-p_r+\rho g,\quad Dw=-p_z,\quad D\rho=0$$
$$v_r+\frac{v}{r}+w_z=0;\quad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}+w\frac{\partial}{\partial z}$$
$$g=r^{-3},\quad \rho\equiv\beta^2=(ru)^2$$

без ограничения общности выбрано $b = -1$. Система (3.8) является частным случаем (1.5) при направленном по радиусу поле массовых сил и наличии осевой симметрии.

Винтовая геометрия стенок (3.6) может показаться надуманной, однако именно винтовые трубы активно используются в теплообменных аппаратах [9]. В то же время важным частным случаем (3.6) является труба кругового сечения и пара коаксиальных цилиндров.

Для общего случая задачи (3.5) — (3.7) имеет место интеграл энергии E в виде суммы фиктивных «кинетической» T и «потенциальной» Π энергий

$$E = T + \Pi = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

$$T \equiv \frac{1}{2}\int\limits_\tau \left(\frac{\alpha^2}{R} + v^2\right) d\tau, \quad \Pi \equiv \int\limits_\tau \beta^2 U\, d\tau$$

$$d\tau \equiv r\, dr\, d\mu, \quad U(r) \equiv \int\limits_0^r g(\xi)\, d\xi$$

В исходных переменных (3.1) E представляет собой взятую на одном периоде кинетическую энергию. Другой интеграл (3.5) — (3.7) задается выражением

$$I = \int\limits_\tau \Phi(\beta)\, d\tau \tag{3.10}$$

с произвольной функцией $\Phi(\beta)$. Интегралы (3.9), (3.10) — аналоги (1.6), (1.4).

Аналогами состояний гидростатического равновесия для (3.5) являются течения, описываемые равенствами

$$v = \alpha = 0, \quad \beta = \beta_0(r) \tag{3.11}$$

где функция $\beta_0(r)$ произвольна. В исходных терминах (3.1) представление (3.11) задает винтовое течение

$$v = 0, \quad u = u_0(r), \quad w = w_0(r) \tag{3.12}$$

для которого в силу $\alpha = 0$ только одна из функций $u_0(r)$ или $w_0(r)$ произвольна, а вторая определяется из соотношения $au_0 = brw_0$.

Для вращательно-симметричных движений (3.8) аналогами состояний гидростатики будут течения с круговыми линиями тока

$$v = w = 0, \quad u = u_0(r) \tag{3.13}$$

где функция $u_0(r)$ задается произвольно.

Пусть теперь $\alpha = \alpha(r, \mu, t)$, $v = v(r, \mu, t)$, $\beta = \beta(r, \mu, t)$ — некоторое точное нестационарное решение (3.5), (3.7), рассматриваемое как возмущение «состояния покоя» (3.11), (3.12).

Утверждение 6. Пусть во всей области течения τ

$$0 \leqslant c^- \leqslant g/(\beta_0^2)_r \leqslant c^+ < \infty$$

с постоянными c^- и c^+. Тогда возмущения $\alpha, v, \sigma \equiv \beta^2 - \beta_0^2$ течения (3.11) оцениваются через свои начальные значения α_*, v_*, σ_* следующим образом:

$$\int\limits_\tau \left(\frac{\alpha^2}{R} + v^2 + c^-\sigma^2\right) d\tau \leqslant \int\limits_\tau \left(\frac{\alpha_*^2}{R} + v_*^2 + c^+\sigma_*^2\right) d\tau \tag{3.14}$$

Доказательство оценки (3.14) основано на наличии интегралов (3.9), (3.10). Рассуждения проводятся по схеме, повторяющей использованную при получении (1.12). Таким же образом формулируются и доказываются аналоги утверждений 2 и 3 (п. 1).

При наличии вращательной симметрии движений (т. е. для задачи (3.8), (3.7)) оценка (3.14) редуцируется к форме

$$(3.15) \qquad \int (v^2 + w^2 + c^- \sigma^2)\, d\tau \leqslant \int (v_*{}^2 + w_*{}^2 + c^+ \sigma_*{}^2)\, d\tau$$

где $\sigma \equiv r^2 (u^2 - u_0{}^2)$ с $u_0(r)$ из (3.13); постоянные c^+ и c^- дают максимум и минимум величины $g/(r^2 u_0{}^2)_r$. Оценка (3.15) имеет смысл, если точка $r = 0$ не принадлежит области течения (например, для течения между коаксиальными цилиндрами). В противном случае при $r \to 0$ имеется $g/(r^2 u_0{}^2)_r \to \infty$, конечной постоянной c^+ не существует и формулировка (3.15) должна быть изменена.

Неравенство (3.15) представляет собой нелинейный вариант широко известного в линейной теории устойчивости критерия Релея [10], гарантирующего «центробежную» устойчивость течения относительно вращательно-симметричных возмущений при условии нарастания квадрата циркуляции $r^2 u_0{}^2$ с увеличением радиуса r.

Замечания. 1°. Полученные оценки (1.12), (3.14), (3.15), свидетельствующие об устойчивости в среднеквадратическом, могут для некоторых целей оказаться неудовлетворительными. Действительно, если измерять отклонения решений не средними, а максимальными значениями возмущений, то, как заметил еще Ляпунов [1, 2], сохранение энергии оказывается недостаточным для получения утверждений об устойчивости. Для получения соответствующих оценок необходимо вводить дополнительные ограничения на решения, задача обоснования этих ограничений остается открытой [1—4].

2°. Утверждения об устойчивости вихревых течений являются условными в том смысле, что устойчивость потоков (2.8), (3.12), (3.13) гарантируется только в специальных классах возмущений, обладающих той же симметрией, что и основные течения.

3°. Оба примера редукции двумерных уравнений движения однородной по плотности жидкости к уравнениям плоских движений стратифицированной жидкости основаны на наличии симметрии вихревых потоков и допускают интерпретацию с точки зрения групповых свойств уравнений идеальной несжимаемой жидкости [11, 12]. Построенные примеры отвечают решениям уравнений Эйлера, инвариантным относительно преобразований переноса, вращения и их комбинации. Было показано [12], что других групп инвариантности, не вовлекающих в преобразование временную переменную, не существует. Поэтому других случаев обсуждаемой редукции, по-видимому, также нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости.— В кн.: Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 5—113.
2. *Ляпунов А. М.* Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости.— В кн.: Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 237—360.
3. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью.— Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 2, с. 291—294.
5. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.
6. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
7. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5, с. 975—978.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
9. *Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Ярхо С. А.* Интенсификация теплообмена в каналах. М.: Машиностроение, 1981. 207 с.
10. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
11. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
12. *Бучнев А. А.*, Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости.— Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1971, вып. 7, с. 212—214.

Новосибирск

Поступила в редакцию 24.IV.1985