Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 531.31

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПРИВОДИМЫЕ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Беков А. А.

Найдены новые интегрируемые случаи уравнения Гамильтона — Якоби. Предлагается метод приведения одного класса неавтономных динамических систем к канонической форме и указываются случаи их интегрируемости. Даются теоремы сравнения, позволяющие по виду гамильтониана определять интегрируемость динамической системы. Как приложение рассматривается задача двух тел переменной массы и ограниченная прямолинейная задача трех тел переменной массы в сопротивляющейся и гравитирующей среде.

1. Интегрирование канонических уравнений движения сводится к нахождению полного интеграла соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби. Наибольший интерес для приложений представляют случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби Лиувилля и Штеккеля [1] и их обобщения [2]. Установим новые случаи интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби вида

$$p+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}g^{ii}p_i^2+\sum_{i=1}^{n}h^ip_i-U=0\quad\left(p=\frac{\partial V}{\partial t},\quad p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\tag{1.1}$$

Они обобщают результат М. С. Яров-Ярового [2] и включают случаи интегрируемости В. Г. Демина [3], Лиувилля и Штеккеля [1].

Теорема 1.1. Если гамильтониан определяется формулой

$$H=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{b}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i(q_i)}\left(p_i-\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2-\tag{1.2}$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\Phi_j-\frac{\gamma}{b}\sum_{i=1}^{n}U_i(q_i)+\Phi_0(t)$$

$$b=\sum_{i=1}^{n}b_i(q_i),\quad \Phi_j=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}\Phi_{ij}(q_i)\quad(j=1,2,\ldots,k)\tag{1.3}$$

$$\sigma_j=\varphi_j^{\cdot}-c_j\gamma\quad(j=1,2,\ldots,k\leqslant n)\tag{1.4}$$

где a_i, b_i, U_i, Φ_0, Φ_{ij} — произвольные непрерывные функции, причем $a_i\neq 0$, $b\neq 0$, и Φ_j — дифференцируемые функции переменных q_i, а γ, σ_j, φ_j — непрерывные функции времени и c_j — произвольные постоянные, то уравнение Гамильтона — Якоби обладает полным интегралом

$$V=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\Phi_j-\int(h\gamma+\Phi_0)\,dt+W\tag{1.5}$$

$$W=\sum_{i=1}^{n}\int\left[2a_i\left(U_i+hb_i-\sum_{j=1}^{k}c_j\Phi_{ij}+\alpha_i\right)\right]^{1/2}dq_i\tag{1.6}$$

где h и α_i — произвольные постоянные, причем

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0\tag{1.7}$$

Доказательство. Решение уравнения

$$\frac{\gamma}{b}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2a_i}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}-\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2-U_i\right]-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\Phi_j+\Phi_0+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

ищем в виде (1.5), где W — неизвестная функция $q_1, q_2, \ldots, q_n$. В силу (1.3), (1.4) приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2a_i}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-U_i+\sum_{j=1}^{k}c_j\Phi_{ij}-hb_i\right]=0$$

имеющему решение (1.6), где постоянные α_i удовлетворяют условию (1.7). Остается проверить условие

(1.8) $\qquad \operatorname{Det}\|\partial^2 V/\partial q_i\partial\alpha_j\|\neq 0$

Имеем

$$\operatorname{Det}\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial\alpha_j}\right\|=b\prod_{i=1}^{n}a_i\left(p_i-\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^{-1}\neq 0$$

так как функции φ_j и $\partial\Phi_j/\partial q_i$ непрерывны и по условию $a_i\neq 0$, $b\neq 0$. Теорема доказана.

Следствия. 1°. Если в (1.4) $c_j=0$ ($j=1, 2, \ldots, l\leqslant k$), т. е. $\sigma_j=\varphi^{\bullet}_j$, а $\Phi_j(q)$ — произвольные непрерывные функции, то в формуле (1.6) суммирование по j ведется от $j=l+1$ до $j=k$.

2°. Если все $c_j=0$, то при $\Phi_0=0$, $\Phi_1=\Phi$, $\Phi_j=0$ ($j=2, \ldots, k$) получим интегрируемый случай [4].

3°. Полагая в (1.2) все $\Phi_j=0$, получаем интегрируемый случай [2], если к тому же $\gamma=\mathrm{const}$ и $\Phi_0=0$, то приходим к теореме Лиувилля [1].

Теорема 1.2. Пусть даны $n(n+1)$ функций $\varphi_{ij}(q_i)$ и $U_i(q_i)$ ($i, j=1, 2, \ldots, n$), для которых определитель $\Delta=\|\varphi_{ij}(q_i)\|\neq 0$ и непрерывные дифференцируемые функции $\Phi_j(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ($j=1, 2, \ldots, k$), и пусть, кроме того, даны непрерывные функции времени $\gamma, \varphi_j, \sigma_j, \Phi_0$ ($j=1, 2, \ldots, k$). Тогда, если гамильтониан определяется формулой

(1.9) $$H=\frac{1}{2}\gamma\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i}{a_i}\left(p_i-\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2-A_ib_i\right]-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\Phi_j-\gamma\sum_{i=1}^{n}A_iU_i+\Phi_0$$

(1.10) $$A_i=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}},\quad \Phi_j=\sum_{i=1}^{n}A_i\Phi_{ij}(q_i)\quad \begin{pmatrix}i=1, 2, \ldots, n\\ j=1, 2, \ldots, k\end{pmatrix}$$

(1.11) $\qquad \sigma_j=\varphi_j^{\bullet}-c_j\gamma \quad (j=1, 2, \ldots, k\leqslant n)$

а каждый из коэффициентов a_i, b_i, Φ_{ij} зависит только от соответствующей переменной q_i, причем $a_i\neq 0$, то уравнение Гамильтона — Якоби имеет полный интеграл вида (1.5), где

(1.12) $$W=\sum_{i=1}^{n}\int\left[a_i\left(b_i+2U_i+2h\varphi_{i1}-2\sum_{j=1}^{k}c_j\Phi_{ij}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j\varphi_{ij}\right)\right]^{1/2}dq_i$$

($h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные).

Доказательство. Решение соответствующего уравнения ищем в виде (1.5). Учитывая (1.10), (1.11) и используя тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1} A_i = 1$$

получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left[\frac{1}{a_i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)^2 - b_i - 2U_i + 2 \sum_{j=1}^{k} c_j \Phi_{ij} - 2h\varphi_{i1} \right] = 0$$

решение которого (1.12). Остается проверить условие (1.8). Здесь учтем, что $\alpha_1 = h$. Для полученного решения V имеем

$$\operatorname{Det} \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| = \Delta \cdot 2^{-n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i \left(p_i - \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} \right)^{-1} \neq 0$$

Следствия. 1°. Если в (1.11) $c_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, l \leqslant k)$, т. е. $\sigma_j = \varphi_j^{\cdot}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, а $\Phi_j(q)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ — произвольные непрерывные функции, то в (1.12) в первой сумме по j суммирование ведется от $j = l + 1$ до $j = k$.

2°. Если все $c_j = 0$, то при $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = \Phi$, $\Phi_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$ получим интегрируемый случай [4].

3°. Если в (1.9) $\Phi_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, то получим интегрируемый случай [2]. Полагая $\varphi_1 = 1$, $\varphi_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$, $c_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $\Phi_0 = 0$, $\gamma = \mathrm{const}$, приходим к теореме В. Г. Демина [3], обобщающей теоремы Штеккеля и Н. Д. Моисеева [5]. Интегрируемый случай Штеккеля [1] соответствует $\Phi_j \equiv 0$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$, $b_i \equiv 0$, $\gamma = \mathrm{const}$, $a_i = \mathrm{const}$ в формуле (1.9).

2. Пусть движение системы с n степенями свободы описывается уравнениями

(2.1) $\qquad q_i^{\cdot} = \partial H / \partial p_i, \quad p_i^{\cdot} = -\partial H / \partial q_i + \nu p_i$

(2.2) $\qquad H = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} g^{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^{n} h^i p_i - U$

где $\nu(t)$ — заданная функция времени и g^{ij}, h^i, U — функции координат и времени, причем $\det \| g^{ij} \| \neq 0$. Здесь и всюду далее, если не указано противное, индекс i принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

Дифференциальные уравнения ряда задач механики могут быть приведены к виду (2.1), в частности к ним относятся системы с диссипативными силами, некоторые задачи механики управляемого движения, механики тел переменной массы и состава при наличии реактивных сил и т. д. [6—8].

Лемма 2.1. Система (2.1) с гамильтонианом (2.2) заменой

(2.3) $\qquad p_i = p_i^* \psi(t), \quad \psi(t) = \exp\left(\int \nu \, dt\right)$

приводится к канонической форме

(2.4) $\qquad q_i^{\cdot} = \partial H^* / \partial p_i^*, \quad p_i^{*\cdot} = -\partial H^* / \partial q_i$

(2.5) $\qquad H^*(t, q, p^*) = \psi^{-1} H(t, q, p(p^*))$

Доказательство. Подстановкой (2.3) в (2.1) получим

(2.6) $\qquad q_i^{\cdot} = \partial H / \partial p_i, \quad p_i^{*\cdot} = -\psi^{-1} \partial H / \partial q_i$

Из (2.2) при помощи (2.5) находим

$$\psi^{-1}\frac{\partial H}{\partial q_i}=\psi\sum_{i,\,j=1}^{n}A_{ij}p_i^*p_j^*+\sum_{i=1}^{n}B_ip_i^*+\frac{C}{\psi}=\frac{\partial H^*}{\partial q_i} \tag{2.7}$$

где $A_{ij}(t, q)$, $B_i(t, q)$, $C(t, q)$ — соответственно производные коэффициентов гамильтониана (2.2) по координатам q_i.

Рассмотрим первую группу уравнений (2.6). Используя (2.5), получим

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}=\frac{\psi}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}g^{ij}p_j^*+h^i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.8}$$

Лемма доказана.

Согласно лемме 2.1, система вида (2.1) приводима к канонической форме заменой импульсов (2.3). В результате гамильтониан H^* имеет структуру

$$H^*=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}g^{*ij}p_i^*p_j^*+\sum_{i=1}^{n}h^{*i}p_i^*-U^* \tag{2.9}$$

$$g^{*ij}=\psi g^{ij},\quad h^{*i}=h^i,\quad U^*=\psi^{-1}U \tag{2.10}$$

причем $\det\|g^{*ij}\|\neq 0$.

Пусть каноническая система (КС) (2.4) интегрируема. Тогда в силу (2.3), (2.10) можем определить, в каких случаях интегрируемы динамические системы вида (2.1).

Теорема 2.1. Если интегрируема КС (2.4) с гамильтонианом H^* (2.9), то интегрируема система (2.1) с гамильтонианом H, коэффициенты g^{ij}, h^i, U которого определяются формулами (2.10), и общий интеграл системы (2.1) имеет вид

$$\partial V/\partial\alpha_i=\beta_i,\quad p_i=\psi\partial V/\partial q_i \tag{2.11}$$

где $V(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби приведенной КС (2.4), α_i, β_i — произвольные постоянные.

Теорема 2.2. Пусть КС (2.4) автономна и интегрируема, тогда интегрируема неавтономная система (2.1), если коэффициенты g^{ij}, h^i, U гамильтониана H имеют вид

$$g^{ij}=\psi^{-1}(t)\,g^{*ij}(q),\quad h^i=h^{*i}(q),\quad U=\psi(t)\,U^*(q) \tag{2.12}$$

и общий интеграл системы (2.1) имеет вид

$$\partial V/\partial\alpha_i=\beta_i,\quad p_i=\psi\partial V/\partial q_i,\quad V=-\alpha_1 t+W(q,\alpha) \tag{2.13}$$

где $V(t, q, \alpha)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби автономной КС (2.4).

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 следует из приводимости систем вида (2.1) к канонической форме согласно лемме 2.1.

Пусть структура гамильтониана H такова, что $h^i=0$. Тогда для систем (2.1) справедлива

Теорема 2.3. Пусть КС

$$q_i^{\cdot}=\partial H/\partial p_i,\quad p_i^{\cdot}=-\partial H/\partial q_i \tag{2.14}$$

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}g^{ij}p_ip_j-U \tag{2.15}$$

интегрируема. Тогда интегрируема система

(2.16) $q_i^{\cdot} = \partial H_1/\partial p_i, \quad p_i^{\cdot} = -\partial H_1/\partial q_i + \nu p_i$

(2.17) $$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_ip_j - \gamma(t)\,U$$

если выполняется соотношение

(2.18) $\nu = \gamma^{\cdot}/(2\gamma)$

Доказательство. Пусть уравнение Гамильтона — Якоби системы (2.14)

(2.19) $$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_ip_j - U + p = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial S}{\partial t},\ p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$$

интегрируется методом разделения переменных и обладает полным интегралом $S = S_0(t, \alpha) + W(q, \alpha)$. Согласно лемме 2.1, система (2.16) приводима к канонической форме, а соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

(2.20) $$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_i^*p_j^* - \frac{\gamma}{\psi^2}U + \frac{1}{\psi}p^* = 0 \qquad \left(p^* = \frac{\partial V}{\partial t},\ p_i^* = \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

Если выполняется условие (2.18), то в силу интегрируемости уравнения (2.19) интегрируемо и уравнение (2.20), полный интеграл которого

(2.21) $$V = \int \sqrt{\gamma}\,\frac{\partial S_0}{\partial t}\,dt + W(q, \alpha)$$

и общий интеграл системы (2.16) имеет вид

(2.22) $\partial V/\partial \alpha_i = \beta_i, \quad p_i = \sqrt{\gamma}\,\partial W/\partial q_i$

Следствие. Если система (2.14) автономна: $g^{ij} = g^{ij}(q)$, $U = U(q)$, $H = h = \mathrm{const}$ и интегрируема, полный интеграл $S = -ht + W(q, h, \alpha)$, то интегрируема неавтономная система (2.16) и полный интеграл

$$V = -h\int\sqrt{\gamma}\,dt + W(q, h, \alpha)$$

Можно указать обратную теорему.

Теорема 2.4. Пусть система (2.16) с гамильтонианом (2.15) интегрируема. Тогда интегрируема КС (2.14) с гамильтонианом (2.17), где величина γ заменена на $1/\gamma$, если выполняется соотношение

(2.23) $$\gamma = \exp\left(2\int \nu\,dt\right)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1, система (2.16) приводима к канонической форме (2.4). Пусть соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби

(2.24) $$\frac{\psi}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_i^*p_j^* - \psi^{-1}U + p^* = 0 \qquad \left(p^* = \frac{\partial V}{\partial t},\ p_i^* = \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

интегрируется методом разделения переменных и обладает полным интегралом $V = V_0(t, \alpha) + W(q, \alpha)$. Уравнение Гамильтона — Якоби для КС (2.14) имеет вид

(2.25) $$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_ip_j - \frac{1}{\gamma}U + p = 0 \qquad \left(p = \frac{\partial S}{\partial t},\ p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)$$

Пусть выполняется условие (2.23). Тогда в силу интегрируемости уравнения (2.24) интегрируемо и уравнение (2.25), полный интеграл которого

$$S=\int \exp\left(-\int \nu\, dt\right)\frac{\partial V_0}{\partial t}\, dt+W(q, \alpha)$$

Общий интеграл системы (2.16) имеет вид

$$\partial V/\partial\alpha_i=\beta_i, \quad p_i=\exp\left(\int \nu\, dt\right)\partial W/\partial q_i$$

а общий интеграл КС (2.14)

$$\partial S/\partial\alpha_i = \beta_i, \quad p_i = \partial W/\partial q_i$$

Следствие. Если система (2.16) приводима к автономному виду $g^{*ij} = g^{*ij}(q)$, $U^* = U^*(q)$, $H^* = h = \mathrm{const}$, интегрируема и полный интеграл $V = -ht + W(q, \alpha)$, то интегрируема система (2.14) и полный интеграл

$$S=-h\int \exp\left(-\int \nu\, dt\right)dt+W(q, \alpha)$$

Теоремы 2.3 и 2.4 позволяют сравнивать канонические системы с приводимыми к канонической форме системами и по виду гамильтониана определять их интегрируемость. Указанные выше теоремы об интегрируемости приводимых к канонической форме систем вместе с теоремами сравнения дают основу для выделения классов интегрируемых автономных и неавтономных систем, определяемых коэффициентами g^{ij}, h^i, U гамильтоновых функций и их взаимосвязью (2.10).

3. Рассмотрим неавтономные динамические системы вида (2.1) типа Лиувилля и Штеккеля. Пусть гамильтониан системы (2.1) имеет вид

$$H=\frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\left(p_i-\sum_{j=1}^{k}\varphi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\Phi_j-\frac{\gamma}{b}\sum_{i=1}^{n}U_i+\Phi_0 \tag{3.1}$$

где приняты те же обозначения, что и в формуле (1.2). Тогда гамильтониан приведенной КС (2.4) имеет вид

$$H^*=\frac{\psi}{2b}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\left(p_i^*-\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j}{\psi}\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2-\sum_{j=1}^{k}\frac{\sigma_j}{\psi}\Phi_j-\frac{\gamma}{\psi b}\sum_{i=1}^{n}U_i+\frac{\Phi_0}{\psi} \tag{3.2}$$

Обращаясь к результатам теоремы 1.1, укажем случаи интегрируемости систем (2.1) с гамильтонианом (3.1).

Теорема 3.1. Если для системы (2.1) с гамильтонианом (3.1) выполняются условия

$$b\Phi_j=\sum_{i=1}^{n}\Phi_{ij}(q_i), \quad \nu=\frac{\dot\gamma}{2\gamma}, \quad \sigma_j=\varphi_j\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{\varphi_j}{\sqrt{\gamma}}\right)-c_j\gamma \tag{3.3}$$

$$(j=1, 2, \ldots, k)$$

то система (2.1) интегрируема и ее общий интеграл имеет вид

$$\partial V/\partial\alpha_i' = \beta_i, \quad p_i = \sqrt{\gamma}\,\partial V/\partial q_i \tag{3.4}$$

где α_i', β_i — $2n$ — произвольных постоянных и

$$V=-\int\left(h\sqrt{\gamma}+\frac{\Phi_0}{\sqrt{\gamma}}\right)dt+\sum_{i=1}^{n}\int\left[2a_i\left(U_i+hb_i-\sum_{j=1}^{k}c_j\Phi_{ij}+\alpha_i\right)\right]^{1/2}dq_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j}{\sqrt{\gamma}}\Phi_j \tag{3.5}$$

— полный интеграл приведенной КС с гамильтонианом (3.2), причем

$$(3.6)\qquad \alpha_1' = h,\quad \alpha_i' = \alpha_i\ (i = 2, 3, \ldots, n),\ \alpha_1 = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$$

Теорема 3.2. Пусть для системы (2.1) с гамильтонианом (3.1) выполняются условия

$$(3.7)\qquad \nu = \frac{\gamma^{\cdot}}{2\gamma},\quad \sigma_j = \varphi_j \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\varphi_j}{\sqrt{\gamma}}\right)\quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Тогда система (2.1) интегрируема, ее общий интеграл имеет вид (3.4) и полный интеграл приведенной КС с гамильтонианом (3.2) имеет вид (3.5), где все $c_j \equiv 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, причем выполняются соотношения (3.6).

Доказательство теорем следует из леммы 2.1 и теоремы 1.1.

Пусть гамильтониан системы (2.1) имеет вид

$$(3.8)\qquad H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i}{a_i}\left(p_i - \sum_{j=1}^{k}\varphi_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2 - \gamma A_i b_i\right] - \sum_{j=1}^{k}\sigma_j\Phi_j - \gamma\sum_{i=1}^{n}A_iU_i + \Phi_0$$

где приняты обозначения формулы (1.9). Тогда гамильтониан приведенной КС равен

$$(3.9)\qquad H^* = \frac{\psi}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i}{a_i}\left(p_i^* - \sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j}{\psi}\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\right)^2 - \frac{\gamma}{\psi^2}A_ib_i\right] - \sum_{j=1}^{k}\frac{\sigma_j}{\psi}\Phi_j - \frac{\gamma}{\psi}\sum_{i=1}^{n}A_iU_i + \frac{\Phi_0}{\psi}$$

Для систем (2.1) с гамильтонианом (3.8) справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3. Пусть система (2.1) имеет гамильтониан H вида (3.8). Тогда при выполнении условий

$$(3.10)\qquad \Phi_j = \sum_{i=1}^{n}A_i\Phi_{ij}(q_i),\quad \nu = \frac{\gamma^{\cdot}}{2\gamma},\quad \sigma_j = \varphi_j\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{\varphi_j}{\sqrt{\gamma}}\right) - c_j\gamma\quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

система (2.1) интегрируема и ее общий интеграл имеет вид

$$(3.11)\qquad \partial V/\partial\alpha_i = \beta_i,\quad p_i = \sqrt{\gamma}\,\partial V/\partial q_i,\quad \alpha_1 = h$$

$$(3.12)\qquad V = -\int\left(h\sqrt{\gamma} + \frac{\Phi_0}{\sqrt{\gamma}}\right)dt + \sum_{i=1}^{n}\int\left[a_i\left(b_i + 2U_i + 2h\varphi_{i1} - 2\sum_{j=1}^{k}c_j\Phi_{ij} + \sum_{j=2}^{n}\alpha_j\varphi_{ij}\right)\right]^{1/2}dq_i + \sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j}{\sqrt{\gamma}}\Phi_j$$

— полный интеграл приведенной КС с гамильтонианом (3.9).

Теорема 3.4. Пусть система (2.1) имеет гамильтониан H вида (3.8). Тогда при выполнении условий (3.7) система (2.1) интегрируема, ее общий интеграл имеет вид (3.11) и полный интеграл приведенной КС с гамильтонианом (3.9) имеет вид (3.12), где все $c_j \equiv 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Доказательство теорем следует из леммы 2.1 и теоремы 1.2.

4. Примеры. 1°. В качестве иллюстрации общего метода приведения к канонической форме и интегрирования динамических систем рассмотрим представляющую интерес для приложений в небесной механике [9] задачу двух тел (материальных точек) переменной массы. Тела взаимно притягиваются по закону Ньютона и находятся внутри газового или пылевого облака, создающего дополнительные силы типа «трения» и гуковскую упругую силу. Уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = -\mu(t)\, r^{-3}\mathbf{r} + \nu(t)\,\mathbf{r}^{\cdot} + \varkappa(t)\,\mathbf{r}, \quad \mu(t) = GM(t) \tag{4.1}$$

где G — гравитационная постоянная, $M(t)$ — масса двух тел, ν, $\varkappa$ — непрерывные функции времени, характеризующие фон, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительного движения одной материальной точки относительно другой. В сферических координатах r, φ, λ уравнения движения (4.1) можно представить в форме (2.1), применяя результаты леммы 2.1. Соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\psi}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2\right] - \frac{\mu}{\psi r} - \frac{\varkappa}{2\psi}r^2 + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

Пусть выполняются условия

$$\mu/\psi^2 = \mu_0, \quad \varkappa/\psi^2 = \varkappa_0, \quad \nu = \mu^{\cdot}/(2\mu) \tag{4.3}$$

тогда уравнение (4.2) интегрируется и его полный интеграл имеет вид

$$V = -\alpha_1\int\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/2} dt + \int\left[2\left(\frac{\mu_0}{r} + \frac{\varkappa_0}{2}r^2\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1\right]^{1/2} dr + \int\left[\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}\right]^{1/2} d\varphi + \alpha_3\lambda \tag{4.4}$$

где α_1, α_2, α_3 — произвольные постоянные. Общий интеграл задачи (4.1) определится формулами вида (2.11).

Заметим, что задача (4.1) интегрируема в случае потенциала более общего вида

$$U(r, \varphi, \lambda, t) = \mu(t)\left[f(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2} + \frac{\Phi(\lambda)}{r^2\cos^2\varphi}\right] \tag{4.5}$$

где $f(r)$, $\Phi(\varphi)$, $\Phi(\lambda)$ — произвольные дифференцируемые функции. Проведя аналогичные выкладки для задачи (4.1) с потенциалом (4.5), получим полный интеграл V соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби

$$V = -\alpha_1\int\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/2} dt + \int\left[2\mu_0 f(r) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + 2\alpha_1\right]^{1/2} dr + \int\left[\alpha_2^2 - 2\mu_0\Phi(\varphi) - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}\right]^{1/2} d\varphi + \int\left[\alpha_3^2 - 2\mu_0\Phi(\lambda)\right]^{1/2} d\lambda \tag{4.6}$$

Общий интеграл задачи определится формулами (2.11), где полный интеграл V имеет вид (4.6). Полученное решение обобщает результаты [9] на случай общего вида потенциала (4.5) для гравитирующей и сопротивляющейся среды.

2°. Рассмотрим движение пассивно гравитирующей точки в гравитационном поле двух тел $M_1(t)$ и $M_2(t)$ переменной массы, движущихся по прямой, проходящей через центр масс. Учтем влияние гравитирующей среды, создающей дополнительные силы, действующие на материальную точку, аналогично силам типа «трения» и гуковской упругой силе. Движение самих притягивающих тел определяется задачей Гильдена — Мещерского, которая допускает прямолинейные решения [10]. Пусть массы M_1 и M_2 меняются со временем по одинаковому закону.

Уравнения движения точки в прямоугольной системе координат с началом в центре масс M_1 и M_2 и с осью x, проходящей по линии движения тел с конечными массами, запишутся в виде

$$\mathbf{r}^{\cdot\cdot} = \operatorname{grad} U + \nu\mathbf{r}^{\cdot} + \beta\mathbf{r} \tag{4.7}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\nu(t)$, $\beta(t)$ — непрерывные функции, определяющие параметры гравитирующей среды, потенциал имеет вид

$$U = \mu_1/r_1 + \mu_2/r_2, \quad \mu_i = GM_i(t) \quad (i = 1, 2)$$

а r_1, r_2 — расстояния от материальной точки до притягивающих тел.

Используя обозначения работы [4], запишем уравнения (4.7) в виде (2.16), где $i = 1, 2, 3$ и гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{2}{r_{12}^2 (\lambda^2 - \eta^2)} \left\{ (\lambda^2 - 1) \left[p_\lambda - \frac{r_{12}^{\cdot} r_{12}}{4} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right]^2 + \right.$$
$$\left. + (1 - \eta^2) \left[p_\eta - \frac{r_{12}^{\cdot} r_{12}}{4} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_w^2 \right\} -$$
$$- \frac{r_{12}^{\cdot 2}}{4} v - 2 \frac{(\mu_1 + \mu_2) \lambda - (\mu_1 - \mu_2) \eta}{r_{12} (\lambda^2 - \eta^2)} - \frac{\beta r_{12}^2}{4} v$$
$$v = \frac{\lambda^2 + \eta^2}{2} + \lambda \eta k + \frac{k^2 - 1}{2}$$

а координаты λ, η, w рассматриваются в качестве обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, 3$).

Согласно лемме 2.1, система (2.16), приводима к канонической форме

$$q_i^{\cdot} = \partial H^* / \partial p_i^*, \quad p_i^{*\cdot} = - \partial H^* / \partial q_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$
$$H^* (t, q, p^*) = \psi^{-1} H (t, q, p (p^*))$$

Пусть выполняются условия

$$\varphi = \frac{r_{12}^{\cdot} r_{12}}{4\psi}, \quad \frac{r_{12}\mu}{\psi^2} = C_0, \quad \frac{r_{12}\mu_i}{\psi^2} = C_i \quad (i = 1, 2) \tag{4.9}$$
$$r_{12}^3 (r_{12}^{\cdot\cdot} - \nu r_{12}^{\cdot} - \beta r_{12}) / (8\psi^2) = C; \quad C = 0, \quad k \neq 0; \quad C \neq 0, \quad k = 0$$

Задача Гильдена — Мещерского, определяющая движение тел M_1 и M_2, допускает прямолинейные решения [10].

$$\mathbf{r}_{12} = \mu^{-1} \lambda_0, \quad \lambda_0^3 = - \mu_0 / b_0, \quad b_0 \neq 0, \quad b_1 = 0 \tag{4.10}$$
$$\mathbf{r}_{12} = (3 b_1 \zeta)^{2/3} \mu^{-1} \lambda_0, \quad b_1 \neq 0; \quad \zeta = \int \mu^2 \, dt$$

Считая $\mu (t)$ заданными, согласно работе [10], из условий интегрируемости (4.9) с учетом формул (4.10) определим функции $\nu (t)$, $\beta (t)$, $\varphi (t)$, $\psi (t)$. В результате получим:

для $b_1 = 0$

$$r_{12} = \mu^{-1} \lambda_0, \quad \nu = 0, \quad \psi = \sqrt{\lambda_0 / C_0} \tag{4.11}$$
$$\beta = (b_0 - 8 C C_0^{-1} \lambda_0^{-3}) \mu^4, \quad \varphi = - {}^1/_4 \sqrt{C_0} \lambda_0^{3/2} \mu^{\cdot} \mu^{-3}$$

для $b_1 \neq 0$

$$r_{12} = (3 b_1 \zeta)^{2/3} \mu^{-1} \lambda_0, \quad \nu = {}^1/_3 \mu^2 \zeta^{-1}, \quad \psi = \sqrt{\lambda_0 / C_0} (3 b_1 \zeta)^{1/3} \tag{4.12}$$
$$\beta = (-2 b_1^2 + b_0 - 8 C C_0^{-1} \lambda_0^{-3}) (9 b_1^2)^{-1} \mu^4 \zeta^{-2} + \nu \mu^{\cdot} \mu^{-1}$$
$$\varphi = {}^1/_4 \sqrt{C_0} [2 b_1 - \mu^{\cdot} \mu^{-3} 3 b_1 \zeta] \lambda_0^{3/2}$$

Формулы (4.11) и (4.12) определяют два класса решений рассматриваемой ограниченной прямолинейной задачи трех тел переменной массы с учетом гравитирующей и сопротивляющейся среды.

Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби КС (4.8) имеет вид

$$V = \varphi v - h \int \frac{\psi}{r_{12}^2} dt + \int \frac{\sqrt{Q_+ (\lambda)}}{\lambda^2 - 1} d\lambda + \int \frac{\sqrt{Q_- (\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 w$$
$$Q_{\pm} (\lambda) = (\lambda^2 - 1) \left[- \frac{C}{2} \lambda^4 + \frac{h + C}{2} \lambda^2 + (C_1 \pm C_2) \lambda + \alpha_2 \right] - \alpha_3^2$$

причем $C = 0$ в случае $k \neq 0$; $C \neq 0$, $C_1 = C_2$, в случае $k = 0$; h, α_2, α_3 — произвольные постоянные. Функции φ, r_{12}, ψ определяются формулами (4.11) либо (4.12).

Общий интеграл задачи имеет вид (β_i — произвольные постоянные)

$$\partial V / \partial \alpha_i = \beta_i, \quad p_i = \psi (t) \, \partial V / \partial q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \alpha_1 = h$$

Задача (4.7) при $\nu = 0$, $\beta = 0$ рассматривалась в работах [4, 11]. Методом пространственно-временного преобразования показано [11], что задача решается для случая изменения масс $\mu (t)$ по первому закону Мещерского, а для объединенного закона Мещерского она имеет решение при равных массах $\mu_1 = \mu_2$. Получено [4] решение задачи методом Якоби для случая изменения масс по первому закону Мещерского.

Укажем следующий более общий результат. Из условий интегрируемости (4.9), считая функции $\mu(t)$, $r_{12}(t)$ заданными, получаем

$$\nu(t) = {}^1/_2\,(r_{12}^{\cdot}/r_{12} + \mu^{\cdot}/\mu) \tag{4.13}$$
$$\beta(t) = r_{12}^{\cdot\cdot}/r_{12} - {}^1/_2\,(r_{12}^{\cdot}/r_{12} + \mu^{\cdot}/\mu)\, r_{12}^{\cdot}/r_{12} - 8CC_0^{-1}\mu/r_{12}^3$$

причем в формулах (4.13) $C = 0$, если $k \neq 0$. Отсюда следует, что для любых заданных непрерывно дифференцируемых функций $\mu(t)$, $r_{12}(t)$, не обращающихся в нуль на рассматриваемом интервале времени, уравнения движения (4.7) интегрируются, если $\nu(t)$, $\beta(t)$ определяются формулами (4.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
2. *Яров-Яровой М. С.* Об интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, с. 973—987.
3. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
4. *Беков А. А.*, *Омаров Т. Б.* Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона — Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики.— Астрон. журн., 1978, т. 55, вып. 3, с. 635—644.
5. *Мультон Ф.* Введение в небесную механику. М.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., ОНТИ, 1935. 479 с.
6. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. М.— Л.: Гостехиздат, 1949. 276 с.
7. *Новоселов В. С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.
8. *Беркович Л. М.*, *Гельфгат Б. Е.* Исследование некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований.— В кн.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. М.: Наука, 1975, с. 54—61.
9. *Омаров Т. Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики. Алма-Ата: Наука, 1975. 144 с.
10. *Беркович Л. М.* Преобразование задачи Гильдена — Мещерского к стационарному виду и законы изменения массы.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 354—357.
11. *Гельфгат Б. Е.* Интегрируемые случаи задачи трех тел переменной массы.— В сб.: Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-е Пермск. ун-та, вып. 4, с. 39—51.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
9.XII.1986