Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 531.31

О КОРРЕКТНОСТИ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ С ТРЕНИЕМ

Иванов А. П.

Парадоксальная ситуация неоднозначности движения механической системы с трением изучается на основе постулата устойчивости Четаева, согласно которому движение должно обладать «известного рода устойчивостью» [1]. В качестве возмущающего фактора рассматриваются соударения, возникающие при относительном движении шероховатых поверхностей и ведущие к перемещениям, нормальным плоскости фрикционного контакта [2]. От истинного решения требуется его непрерывная зависимость от малого параметра, определяющего величину таких возмущений.

Обычно для отбора истинного решения из числа возможных применяют принцип Пэнлеве [3]: «два твердых тела, которые в заданных условиях не производили бы никакого давления друг на друга, если бы они были идеально гладкими, точно также не действуют друг на друга и тогда, когда они шероховаты». Этот априорный принцип не получил к настоящему времени экспериментального подтверждения, и справедливость его неясна. К тому же, решение, полученное в соответствии с принципом Пэнлеве, не обладает свойством непрерывной зависимости от начальных условий [4].

Предлагаемый подход приводит к единому решению ситуации потери корректности основной задачи динамики в случаях несуществования и неединственности движения при данных начальных условиях: в обоих случаях принимается гипотеза о тангенциальном ударе [3, 5]. Полученное в результате решение отличается от того, которое определяется принципом Пэнлеве.

Рассмотрим механическую систему с конфигурационным пространством $\mathbf{q} \in R^n \cap \{q_1 \geqslant 0\}$; равенство $q_1 = 0$ соответствует фрикционному контакту. В отсутствие ударов об одностороннюю связь $q_1 \geqslant 0$ движение можно описать уравнениями Лагранжа

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{R}, \quad q_1\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in R^n$$

где T — кинетическая энергия системы, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot, t)$ — обобщенная сила, $\mathbf{R}$ — реакция связи. Разрешая (1) относительно обобщенных ускорений, получим

$$(2) \qquad \mathbf{q}^{\cdot\cdot} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot, t) \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{q}, t) \in R^{n^2}, \quad B_{11} > 0$$

$\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будем считать непрерывными функциями своих аргументов.

Реакция $\mathbf{R}$ при $q_1 = q_1^\cdot = 0$ удовлетворяет соотношениям [6]:

$$(3) \qquad R_1 \geqslant 0, \; q_1^{\cdot\cdot} \geqslant 0, \; q_1^{\cdot\cdot}\mathbf{R} = 0$$

последнее из которых выражает пассивный характер реакции: ее действие не может привести к ослаблению связи. При ударах движение описывается следующей системой [7]:

$$(4) \qquad \mathbf{q}^\cdot(t_0 + \Delta t) - \mathbf{q}^\cdot(t_0) = \mathbf{B}\mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \mathbf{R}(t)\,dt, \quad 0 \leqslant \Delta t \leqslant \tau$$

то t_0 — время начала удара, $\tau \ll 1$ — продолжительность удара, $\mathbf{N}$ — ударный импульс.

Будем предполагать, что трение удовлетворяет закону Кулона—Амонтона и связь между компонентами реакции имеет вид

$$R_j = f_j R_1, \; f_j = f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) \; (j = 2, \ldots, n) \tag{5}$$

зависимость f_j от $\mathbf{q}^{\cdot}$ осуществляется через посредство вектора $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ относительной скорости между твердыми телами в точке их контакта. Подставляя (5) в (2) и в (4), запишем уравнения движения систем с трением в отсутствие и при наличии удара в виде

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot} = \mathbf{A} + R_1\mathbf{B}', \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t) \in \mathbf{R}^n \tag{6}$$

$$\mathbf{q}^{\cdot}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{q}^{\cdot}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} R_1\mathbf{B}'(q, q^{\cdot}(t), t)\,dt \tag{7}$$

Если бы трение при $q_1 = 0$ отсутствовало, $f_j \equiv 0$, то $B_1' = B_{11} > 0$ и величина R_1 в силу (3) определялась бы соотношением

$$R_1 = \max\,\{0, \; -A_1/B_1'\} \tag{8}$$

Равенство (4) при $\Delta t = \tau$ принимало бы вид

$$\Delta q_1^{\cdot} = q_1^{\cdot}(t_0 + \tau) - q_1^{\cdot}(t_0) = B_1' N_1 = -(1 + \varkappa)\, q_1^{\cdot}(t_0) \tag{9}$$

где $\varkappa$ — коэффициент восстановления относительной скорости при ударе, $0 < \varkappa < 1$. Равенство (9) достигается при значении ударного импульса $N_1 = -(1 + \varkappa)\, q_1^{\cdot}(t_0)\, (B_1')^{-1}$; поскольку $B_1' > 0$ и $q_1^{\cdot}(t_0) < 0$, то $N_1 > 0$. Заметим, что $N_1 \to 0$ при $q_1^{\cdot}(t_0) \to -0$.

При наличии трения коэффициент B_1' может принимать неположительные значения. Это приводит к невозможности определения реакции при помощи соотношений (8), (9) и парадоксальным ситуациям несуществования или неединственности решения основной задачи динамики. Так, если $B_1' \leqslant 0$, $A_1 < 0$, то уравнение (8) не имеет решений, удовлетворяющих условиям (3). В этом случае принимается гипотеза о тангенциальном ударе [3, 5]: движение описывается на малом промежутке времени уравнением (7). При изменении $\mathbf{q}^{\cdot}$ в процессе удара величина B_1' становится положительной, благодаря чему и устраняется неопределенность движения.

Заметим, что в [3, 5] рассматривалось лишь плоскопараллельное движение твердых тел и явление тангенциального удара неизменно связывалось с остановкой относительного скольжения. В общем случае такой остановки не происходит, что можно установить воспользовавшись, следуя [8], интерпретацией удара посредством кривой в плоскости $\xi = X/Z$, $\eta = Y/Z$, где Z и X, Y — нормальная и касательные составляющие реакции. Если скорость относительного скольжения $\mathbf{v}$ отлична от нуля, то изображающая точка M движется по окружности $\xi^2 + \eta^2 = \mu^2$ (μ — коэффициент трения скольжения) в направлении, зависящем от положения M по отношению к гиперболе, в точках которой направление $\mathbf{v}$ остается неизменным. Тангенциальному удару соответствует положение точки M и начала координат O по разные стороны от прямой $B_1' = 0$. В процессе удара точка M может перейти в область $B_1' > 0$, не сходя с окружности, если при этом ее траектория не пересекает гиперболу. При этом удар не сопровождается исчезновением вектора $\mathbf{v}$. Отметим, что при тангенциальном ударе $N_1 \not\to 0$ при $q_1^{\cdot}(t_0) \to -0$.

В случае $A_1 = B_1' = 0$ допустимым оказывается любое значение $R_1 \geqslant 0$, а при $A_1 > 0$, $B_1' < 0$ условиям (3) удовлетворяют помимо значения $R_1 = 0$, при котором связь $q_1 \geqslant 0$ ослабляется, еще одно или даже два значения $R_1 > 0$, соответствующих случаям скольжения или качения [4]. Цитированный выше принцип Пэнлеве допускает следующее математическое выражение:

$$(10) \qquad A_1 \geqslant 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

Согласно (10), истинным считается то движение, при котором контакт между телами прекращается.

Исследуем влияние на движение при $q_1 = 0$ соударений, обусловленных тем, что в силу микрорельефа поверхностей их точки при относительном движении вступают в контакт с некоторой начальной скоростью $q_1^{\cdot}(t_0) = -\varepsilon < 0$. Такое соударение будем описывать соотношением (7). Обозначим $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ решение системы (1) с начальными условиями $\mathbf{q}(t_0, \varepsilon) = \mathbf{q}^\circ$, $\mathbf{q}^{\cdot}(t_0, \varepsilon) = (-\varepsilon, q_2^{\cdot\circ}, \ldots, q_n^{\cdot\circ})$ и изучим поведение этого решения при $\varepsilon \to +0$.

В случае $B_1'(C) > 0$, где $C \in R^{2n+1}$, $C = (\mathbf{q}^\circ, \mathbf{q}^{\cdot}(t_0, \varepsilon), t_0)$, величина N_1 в соответствии с (9) исчезает вместе с ε и $\| C_\varepsilon - C \| = O(\varepsilon)$, где $C_\varepsilon = (\mathbf{q}^\circ, \mathbf{q}^{\cdot}(t_0, \varepsilon) + \Delta\mathbf{q}^{\cdot}, t_0)$, $\Delta\mathbf{q}^{\cdot}$ — изменение вектора скорости при ударе в момент t_0. Поэтому C совпадает с $C_0 = \lim_{\varepsilon\to+0} C_\varepsilon$.

В рассматриваемом случае система (1) имеет единственное решение при $\varepsilon = 0$, так как реакция однозначно определяется формулами (8), (5). При $A_1(C) \geqslant 0$ для достаточно близких к t_0 значений t в (1) $\mathbf{R} = 0$ для $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ как при $\varepsilon = 0$, так и при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (связь ослаблена, $q_1 > 0$). Поэтому при $t > t_0$ справедлива оценка

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} [|q_i(t, \varepsilon) - q_i(t, 0)| + |q_i^{\cdot}(t, \varepsilon) - q_i^{\cdot}(t, 0) - \Delta q_i^{\cdot}|] = O(\varepsilon)$$

В (11) в точках своего разрыва величина $\mathbf{q}^{\cdot}$ полагается равной полусумме односторонних пределов.

Если $A_1(C) < 0$, то для траектории $\mathbf{q}(t, 0)$ имеем $q_1 \equiv 0$, а траектория $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ имеет виброударный характер. Построим окрестность D_δ точки C, такую, что для $C' \in D_\delta$ выполняются неравенства

$$(12) \qquad t_0 < t < t_0 + \delta, \ \| A(C') - A(C) \| < \delta, \ \| B'(C') - B'(C) \| < \delta$$

В точках интегральной кривой, проходящей через C_ε, внутри области D_δ для достаточно малых значений $\delta > 0$ выполняются соотношения

$$(13) \qquad q_1^{\cdot} = O(\varepsilon), \quad q_1 = O(\varepsilon^2)$$

Действительно, в промежутке между ударами $| q_1^{\cdot\cdot} - A_1(C)| < \delta$, поэтому в течение такого промежутка модуль скорости $| q_1^{\cdot} |$ возрастает не более чем в $[(A_1(C) - \delta)/(A_1(C) + \delta)]^{1/2}$ раз, а при ударе он умножается на величину $\varkappa < 1$, откуда следует первое из равенств (13); далее величина $\mathbf{q}_1$ имеет порядок $\mathbf{q}_1^{\cdot 2}$.

Проинтегрируем (6) вдоль траектории $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$ на промежутке (t_0, t^*), $t^* \leqslant t_0 + \delta$:

$$(14) \qquad \mathbf{q}^{\cdot}(t^*) - \mathbf{q}^{\cdot}(t_0) = \int_{t_0}^{t^*} (\mathbf{A} + R_1\mathbf{B}')\,dt = \int_{t_0}^{t^*} \left(\mathbf{A} - \frac{A_1}{B_1'}\mathbf{B}'\right) dt + \int_{t_0}^{t^*} \frac{\mathbf{B}'}{B_1'} q_1^{\cdot\cdot}\,dt = I_1 + I_2$$

Слагаемое I_1 в (14) имеет одинаковую форму для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$; I_2 при $\varepsilon = 0$ обращается в нуль, а при $\varepsilon > 0$ является разрывной функцией t^*, которая в силу (13) допускает оценку

$$(15) \qquad \| I_2 \| \leqslant \varphi_\varepsilon(t^*), \quad \varphi_\varepsilon \in C_1[t_0, t_0 + \delta], \quad \varphi_\varepsilon(t_0) = 0,$$
$$\varphi_\varepsilon' \geqslant 0, \quad \varphi_\varepsilon(t_0 + \delta) = O(\varepsilon).$$

Поскольку решение уравнения

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha u(s)\, ds + \varphi_\varepsilon(t), \quad u(0) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = e^{\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha s} \varphi_\varepsilon'(s)\, ds = O(\varepsilon)$$

то, следуя [9], можно показать, что в области D_δ выполняется неравенство (11), где $\Delta q^{\boldsymbol\cdot} = 0$.

Перейдем к особому случаю $B_1'(C) < 0$. В силу соотношения (7) удар с начальным условием $q_1^{\boldsymbol\cdot}(t_0) = -\varepsilon < 0$ может закончиться лишь в такой точке C_ε, что $B_1'(C_\varepsilon) > 0$. Поэтому вне зависимости от величины $A_1(C)$ удар сопровождается конечным при $\varepsilon \to +0$ изменением $\mathbf{q}^{\boldsymbol\cdot}$, т. е. является тангенциальным. Предельное при $\varepsilon \to +0$ движение также сопровождается скачком фазовой траектории из точки C в точку C_0. Следовательно, если при отборе истинного движения системы исходить из требования его непрерывности по параметру ε, то это движение сопровождается тангенциальным ударом вне зависимости от величины $A_1(C)$. При этом ситуации несуществования ($A_1(C) < 0$) и неединственности ($A_1(C) \geqslant 0$) решения основной задачи динамики отождествляются, так как поведение системы после удара определяется величиной $A_1(C_0) \neq A_1(C)$.

По окончании удара $B_1'(C_0) > 0$ и движение имеет тот же вид, что и в неособом случае, в частности выполняется соотношение (11), где уже $\Delta \mathbf{q}^{\boldsymbol\cdot} \neq 0$. Заметим, что в силу сказанного это движение может не совпадать ни с одним из возможных движений, построенных по значениям $B_1'(C)$, $A_1(C)$.

Наконец, случай $B_1'(C) = 0$ в описанной выше геометрической интерпретации удара соответствует при $\mathrm{v} \neq 0$ начальному положению точки M на пересечении прямой $B_1' = 0$ с окружностью трения. В зависимости от расположения гиперболы точка M смещается либо в область $B_1' > 0$, и тогда $C_0 = C$, либо в область $B_1' < 0$, и $C_0 \neq C$. Каждый из этих случаев рассмотрен выше.

Полученные результаты можно объединить в виде следующего утверждения.

Теорема. Уравнение (1), описывающее движение системы твердых тел при наличии трения по закону Кулона — Амонтона, имеет единственное решение $\mathbf{q}(t, 0) \in C_1(t_0, t_1)$, удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{q}(t_0, 0) = \mathbf{q}^\circ$, $\mathbf{q}^{\boldsymbol\cdot}(t_0, 0) = \mathbf{q}^{\boldsymbol\cdot\circ}$, $q_1^\circ = q_1^{\boldsymbol\cdot\circ} = 0$ и обладающее свойством непрерывной зависимости в смысле соотношения (11) от малого параметра ε, характеризующего возникающие при трении соударения. В случае, когда $B_1' \leqslant 0$, обобщенная скорость $q^{\boldsymbol\cdot}(t_0, 0)$ при $t = t_0$ может допускать скачкообразный разрыв, что связано с явлением тангенциального удара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535с.
2. *Толстой Д. М.* Собственные колебания ползуна, зависящие от контактной жесткости, и их влияние на трение.— Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4, с. 820—823.
3. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954, 316 с.
4. *Lötstedt P.* Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems.— Z. Angew. Math. und Mech., 1981, B. 61, H. 12, S. 605—615.
5. *Болотов Е. А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненном связями с трением. М.: Университетская тип., 1906. 147 с.
6. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика.— М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
8. *Болотов Е. А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения.— Изв. Моск. инж. училища, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43—55.
9. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 331 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1985