Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 5, 1986

УДК 531.31

ПОЛУИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Куракин Л. Г., Юдович В. И.

Указываются выражения первых коэффициентов нормальной формы уравнений на нейтральном многообразии равновесия автономной системы в основных критических случаях через нейтральные корневые векторы линеаризованной системы и ее сопряженной. С применением принципа сведения [1] известные критерии устойчивости в критических случаях, полученные разными авторами, приобретают явную форму, наиболее удобную для вычисления и не связанную ограничением конечномерности.

Если спектр устойчивости равновесия нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений содержит точки мнимой оси (нейтральный спектр), а остальная его часть расположена внутри левой полуплоскости, то ответы на вопросы об устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости зависят от характера нелинейности и не могут быть даны на основе анализа одной только линеаризованной системы. Такие случаи, называемые критическими, начиная с классических работ Ляпунова [2, 3], были предметом многих исследований. Достигнутые к настоящему времени результаты систематизированы и существенно дополнены в работе [4] [1], где критические случаи классифицируются по коразмерности вырождения в пространстве всевозможных голоморфных систем. При слабом вырождении — во всех случаях коразмерности вырождения, меньшей либо равной двум, за единственным исключением (две пары чисто мнимых собственных значений, резонанс 1 : 3) коразмерности три,— имеются явные критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости. Они выражаются строгими неравенствами для нескольких тейлоровских коэффициентов правой части так называемой модельной системы. Последняя отщепляется от нормальной формы исходной системы с отбрасыванием старших членов, и ее порядок равен суммарной кратности нейтрального спектра (размерности нейтрального подпространства). В итоге применение критериев к конкретной системе сводится в основном к вычислению коэффициентов модельной системы.

Ниже даются явные выражения для этих коэффициентов в «полуинвариантной» форме — используется жорданов базис лишь в нейтральном подпространстве, а не во всем пространстве. В этих формулах нигде не фигурирует размерность системы, так что они применимы и для бесконечномерных задач, скажем, для систем уравнений в частных производных.

Невозможность приведения системы к нормальной форме в общем бесконечномерном случае говорит о том, что оно не нужно и для конечномерных задач. Можно ожидать, что и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений простейший способ исследования — вычисление по этим формулам, возможно, с применением ЭВМ. При этом главная часть работы — вычисление нейтральных корневых векторов линеаризованной системы и ее сопряженной, а также решение некоторых неоднородных алгебраических уравнений. Конечно, кратность спектра и соответствующая жорданова структура системы на нейтральном подпространстве допускают исследование лишь в тех случаях, когда система содержит параметры, причем вырождение происходит при отдельных, подлежащих определению, их значениях. В иных случаях, впрочем, кратность определяется общими свойствами системы.

Существенными моментами использованного в данной статье подхода являются применение принципа сведения [1], согласно которому достаточно рассматривать сужение заданной системы на нейтральное многообразие равновесия, а также приведение

---

[1] См. также: *Шноль Э. Э., Хазин Л. Г.* Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1979, № 91. 30 с.; *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* О мягкой и жесткой потере устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1979, № 128. 30 с.

полной системы к частично нормальной форме — с изгнанием только тех нерезонансных членов, которые содержат лишь нейтральные переменные, во всем уравнении сразу.

Обоснование перехода к системе на нейтральном многообразии для конечномерных систем следует из принципа сведения [1] и получается также и для тех бесконечномерных систем, для которых имеется теорема о нейтральном многообразии и соответствующий принцип сведения.

1. Постановка задачи и описание метода. Рассмотрим автономное вещественное дифференциальное уравнение в R^n с нулевым равновесием

$$(1.1)\qquad u^{\cdot} = f(u) = Au + g(u),\ g(u) = K_2u^2 + K_3u^3 + \\ + \ldots,\ f(0) = 0$$

Здесь $u \to f(u)$ — аналитическое векторное поле, определенное в окрестности $0 \in R^n$ (как видно из дальнейшего, каждый из последующих результатов справедлив для $f \in C^k$, $k \leqslant 3$), $A : R^n \to R^n$ — линейный оператор; $K_m u^m$ — однородный степени m оператор $u \to K_m u^m$, действующий в R^n, определяемый m-линейным отображением $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \to K_m (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, причем $K_m u^m = K_m (u, u, \ldots, u)$; $u_1, u_2, \ldots, u_m, u \in R^n$. Можно, но не обязательно, выбрать $K_m (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ симметричным.

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде объединения пары спектральных множеств $\sigma_1(A)$ и $\sigma_0(A)$, причем $\sigma_1 = \sigma_1(A) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(A),\ \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ лежит строго в левой полуплоскости, а $\sigma_0 = \sigma_0(A) = \{\lambda : \lambda \in \sigma(A),\ \mathrm{Re}\lambda = 0\}$ — на мнимой оси.

Спектральным множествам σ_0 и σ_1 соответствуют спектральные подпространства X_0, X_1 и спектральные проекторы P_0, P_1

$$P_i = \int_{\Gamma_i} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad i = 0, 1$$

Здесь контур $\Gamma_i = \partial D_i$ $(D_0 \cap D_1 = \varnothing)$ — гладкая граница ограниченной области D_i комплексной плоскости, причем $\sigma_i \subset D_i$.

Будем называть X_0 нейтральным подпространством оператора A, а X_1 — устойчивым подпространством.

Как следует из работы [1], в некоторой окрестности $V \subset R^n$ точки 0 существует инвариантное подмногообразие $M_0 \subset V$ уравнения (1.1), которое касается нейтрального подпространства X_0 в точке 0. При этом M_0 — график некоторого отображения $F : V_0 \to X_1$ $(V_0 \subset V \cap X_0)$ окрестности нуля подпространства X_0 в X_1.

Будем называть инвариантное подмногообразие M_0 нейтральным многообразием (его же называют иногда центральным многообразием [5]).

Задачи устойчивости нулевых равновесий уравнения (1.1) и сужения этой системы на M_0 эквивалентны (принцип сведения [1]).

Уравнение (1.1) запишем в виде системы

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &x_i^{\cdot} = P_i f_*(x_0, x_1) = A_i x_i + P_i g_*(x_0, x_1),\ i = 0,1 \\ &x_i = P_i u \in X_i,\ f_*(x_0, x_1) = f(x_0 + x_1) \\ &g_*(x_0, x_1) = g(x_0 + x_1) \end{aligned}$$

A_i — сужение оператора A на X_i. Введем новые переменные $\xi_0 = x_0$, $\xi_1 = x_1 - F(x_0)$. Нейтральное многообразие определяется уравнением $\xi_1 = 0$, а система уравнений (1.2) примет вид

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &\xi_0^{\cdot} = P_0 f_*(\xi_0, \xi_1 + F(\xi_0)) \\ &\xi_1^{\cdot} = (P_1 - F'(\xi_0) P_0) f_*(\xi_0, \xi_1 + F(\xi_0)) \end{aligned}$$

По принципу сведения, достаточно исследовать устойчивость нулевого равновесия уравнения на нейтральном многообразии M_0 ($\xi_1 = 0$)

(1.4) $\quad \xi_0^{\cdot} = P_0 f_* (\xi_0, F(\xi_0))$

Отображение F можно разыскивать в виде ряда Тейлора

(1.5) $\quad F(\xi_0) = F_2 \xi_0^2 + F_3 \xi_0^3 + \ldots$

Здесь отображение $F_i : \xi_0 \to F_i \xi_0^i$ $(i = 2,3,\ldots)$ — симметричная векторнозначная форма i-й степени на X_0 со значениями в X_1.

Ряд (1.5) рассматривается как асимптотический. Известно, что он может оказаться расходящимся [1], однако в каждом из рассматриваемых далее критических случаев достаточно знать лишь несколько первых его членов.

Для определения F из условия инвариантности получаем уравнение

(1.6) $\quad P_1 f_* (\xi_0, F(\xi_0)) = F'(\xi_0)\, P_0 f_* (\xi_0, F(\xi_0))$

Подставляя в (1.6) ряд (1.5) и приравнивая в обеих частях члены одинаковых степеней, выводим систему уравнений для определения форм F_i $(i = 2,3,\ldots)$.

Заменой $y' = \xi_0 - G(\xi_0)$ $(G : V_0 \to X_0)$ приводим уравнение (1.4) к нормальной форме [6] до некоторого порядка.

В каждом из рассматриваемых далее критических случаев нормальная форма определена однозначно. Если же, как, например, в случае жордановой клетки, она неоднозначна, то безразлично, какую из них выбирать, лишь бы для нее был критерий устойчивости.

Приведение уравнения (1.4) к нормальной форме в ряде случаев существенно упрощается, если разыскивать F и G в виде $F = P_1 T$, $G = P_0 T$ и отображение $T : V_0 \to V$ определять так, чтобы замена переменных $u' = u - T(x_0)$ в уравнении (1.1) или в эквивалентной системе (1.3) убивала нерезонансные члены, содержащие x_0.

В каждом из рассматриваемых далее критических случаев принята следующая схема изложения результатов:

1) приводятся условия вырождения линейной части. Определяется нейтральный спектр σ_0 и вводится проектор P_0;

2) приводится уравнение на нейтральном многообразии M_0 в нормальной форме. При этом выписываются лишь те члены разложения, которые участвуют в критерии устойчивости;

3) приводится критерий устойчивости в смысле работы [4]: совокупность строгих неравенств, обеспечивающая асимптотическую устойчивость либо неустойчивость нулевого равновесия [2].

Ниже используются обозначения: μ — коразмерность вырождения критического случая, $K_2^0(u, v) = K_2(u, v) + K_2(v, u)$, $K_3^0(u^2, v) = K_3(u, u, v) + K_3(u, v, u) + K_3(v, u, u)$.

2. Случай простого нулевого собственного значения. *Нейтральный спектр* $\sigma_0 = \{0\}$. При этом 0 — простое собственное значение, а соответствующие собственные векторы оператора A и его сопряженного A^* суть φ, Φ

$$A\varphi = 0,\ A^*\Phi = 0,\ (\varphi, \Phi) = 1$$

[2] Подробности и ряд не рассмотренных здесь случаев см. в работе: *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* О критических случаях устойчивости по Ляпунову. Ростов н/Д, 1985.— 37 с.— Деп. в ВИНИТИ 17.07.85; № 5132-85.

Проектор на нейтральное подпространство X_0: $P_0 u = (u, \Phi)\varphi$.

Уравнение на нейтральном многообразии в нормальной форме

$$x_0^{\boldsymbol{\cdot}} = a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4 + \ldots$$
$$a_2 = (K_2\varphi^2, \Phi),\ a_3 = (K_2^0(\varphi, z_2) + K_3\varphi^3, \Phi)$$
$$a_4 = (K_2^0(\varphi, z_1) + K_2 z_2^2 + K_3^0(\varphi^2, z_2) + K_4\varphi^4, \Phi)$$
$$z_1 = -A_1^{-1}(L_2^0(\varphi, z_2) + L_3\varphi^3 - 2a_2 z_2),\ z_2 = -A_1^{-1}L_2\varphi^2$$

где A_1, L_i, L_2^0 — сужение на X_1 соответственно операторов A, $(I - P_0)K_i$, $(I - P_0)K_2^0$.

Критерий устойчивости. Пусть a_k — первая, отличная от нуля ляпуновская величина (случай $\mu = k$). Как известно (Ляпунов), при четном k нулевое равновесие неустойчиво, а при нечетном k также неустойчиво, когда $a_k > 0$, и устойчиво, когда $a_k < 0$.

3. Случай одного нулевого и пары чисто мнимых собственных значений. *Нейтральный спектр* $\sigma_0 = \{0, \pm i\omega\}$, $\omega > 0$. Эти собственные значения просты, а соответствующие собственные векторы операторов A, A^* суть $\{\varphi, \varphi_1, \varphi_1^*\}$, $\{\Phi, \Phi_1, \Phi_1^*\}$

$$A\varphi = 0,\ A\varphi_1 = i\omega\varphi_1,\ A\varphi_1^* = -i\omega\varphi_1^*$$
$$A^*\Phi = 0,\ A^*\Phi_1 = -i\omega\Phi_1,\ A^*\Phi_1^* = i\omega\Phi_1^*$$
$$(\varphi, \Phi) = (\varphi_1, \Phi_1) = (\varphi_1^*, \Phi_1^*) = 1$$

Проектор на нейтральное подпространство X_0

$$P_0 u = (u, \Phi)\varphi + (u, \Phi_1)\varphi_1 + (u, \Phi_1^*)\varphi_1^*$$

Уравнение на нейтральном многообразии в нормальной форме

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = a_{11}y^2 + a_{12}y_1 y_1^* + a_{13}y^3 + \ldots,\ y_1^{\boldsymbol{\cdot}} = i\omega y_1 + a_{21}yy_1 + \ldots$$
$$y = (y', \Phi),\ y_1 = (y', \Phi_1),\ a_{11} = (K_2\varphi^2, \Phi)$$
$$a_{12} = (K_2^0(\varphi_1, \varphi_1^*), \Phi),\ a_{21} = (K_2^0(\varphi, \varphi_1), \Phi_1)$$
$$a_{13} = (K_2^0(z, \varphi) + K_3\varphi^3, \Phi),\ z = -A^{-1}(K_2\varphi^2 - a_{11}\varphi)$$

Критерий устойчивости. Если $a_{11} \neq 0$ ($\mu = 2$), то равновесие неустойчиво. Если $a_{11} = 0$ ($\mu = 3$) — устойчивость при выполнении условий: $a_{12}\mathrm{Re}\,a_{21} < 0$, $a_{13} < 0$ и неустойчивость при строгом нарушении хотя бы одного из них.

4. Случай n-кратного нулевого собственного значения (жорданова клетка). *Нейтральный спектр* $\sigma_0 = \{0\}$. Собственное значение 0-кратности n, индекс $\nu(0) = n$, соответствующие собственные векторы операторов A, A^* суть φ_1, Φ_1. Пусть $\{\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n\}$ — присоединенные векторы оператора A, а $\{\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n\}$ — присоединенные векторы оператора A^*, отвечающие нулевому собственному значению

$$A\varphi_1 = 0,\ A\varphi_2 = \varphi_1,\ A\varphi_3 = \varphi_2, \ldots, A\varphi_n = \varphi_{n-1}$$
$$A^*\Phi_1 = 0,\ A^*\Phi_2 = \Phi_1,\ A^*\Phi_3 = \Phi_2, \ldots, A^*\Phi_n = \Phi_{n-1}$$
$$(\varphi_j, \Phi_{n-j+1}) = 1,\ (\varphi_k, \Phi_l) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k + l \neq n + 1$$

Проектор на нейтральное подпространство X_0

$$P_0 u = \Sigma(u, \Phi_{n-k+1})\varphi_k;\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Уравнение на нейтральном многообразии в нормальной форме

$$y_j^{\boldsymbol{\cdot}} = y_{j+1} + \ldots,\ y_n^{\boldsymbol{\cdot}} = (K_2\varphi_1^2, \Phi_1)y_1^2 + \ldots$$
$$j = 1, 2, \ldots, n - 1;\ y_k = (u, \Phi_{n-k+1}),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Критерий устойчивости. Если $(K_2\varphi_1^2, \Phi_1) \neq 0$ ($\mu = n$), то нулевое равновесие неустойчиво.

5. Случай n пар чисто мнимых собственных значений без резонансов. *Нейтральный спектр* $\sigma_0 = \{\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_n\}$, $\omega_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, причем нет резонансов второго и третьего порядка. Эти собственные значения просты, а соответствующие собственные векторы операторов A, A^* суть

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*\}, \ \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi_1^*, \ldots, \Phi_n^*\}$$
$$A\varphi_j = i\omega_j\varphi_j, \ A\varphi_j^* = -i\omega_j\varphi_j^*, \ A^*\Phi_j = -i\omega_j\Phi_j$$
$$A^*\Phi_j^* = i\omega_j\Phi_j^*, \ (\varphi_j, \Phi_j) = (\varphi_j^*, \Phi_j^*) = 1, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Проектор на нейтральное подпространство X_0

$$P_0u = \Sigma \ [(u, \Phi_j)\varphi_j + (u, \Phi_j^*)\varphi_j^*]; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Уравнение на нейтральном многообразии в нормальной форме

$$y_j^{\cdot} = i\omega_j y_j + y_j \Sigma a_{jk} \mid y_k \mid^2 + \ldots, \ j, \ k = 1, 2, \ldots, n;$$
$$y_j = (y', \Phi_j)$$
$$a_{jj} = (K_2^0 (z_j, \varphi_j^*) + K_2^0 (\eta_{jj}, \varphi_j) + K_3^0 (\varphi_j^2, \varphi_j^*), \Phi_j)$$
$$a_{jk} = (K_2^0 (\eta_{kk}, \varphi_j) + K_2^0 (\eta_{jk}, \varphi_k) + K_2^0 (h_{jk}, \varphi_k^*) +$$
$$+ K_3^0 (\varphi_j, \varphi_k, \varphi_k^*), \Phi_j), \ k \neq j$$
$$z_j = (2i\omega_j I - A)^{-1} K_2 \varphi_j^2$$
$$h_{jk} = (i (\omega_k + \omega_j) I - A)^{-1} K_2^0 (\varphi_k, \varphi_j)$$
$$\eta_{jk} = (i (\omega_j - \omega_k) I - A)^{-1} K_2^0 (\varphi_j, \varphi_k^*)$$
$$K_3^0 (u_1, u_2, u_3) = \sum_{\pi} K_3 (u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, u_{\pi(3)})$$

π — произвольная перестановка индексов 1, 2, 3.

Критерий устойчивости [7]. Коразмерность вырождения $\mu = n$. Нулевое равновесие устойчиво, если система

$$\rho_j^{\cdot} = \rho_j \Sigma \ (\mathrm{Re}\, a_{jk})\, \rho_k; \ k, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

не имеет решений вида $\rho_j(t) = c_j r(t)$, $r^{\cdot} = mr^2$, $c_j \geqslant 0$ (не все $c_j = 0$) ни растущих ($m = 1$), ни нейтральных ($m = 0$).

По любому подмножеству $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ определим J — усечение матрицы $B = \| \mathrm{Re}\, a_{jk} \|$ $(j, \ k = 1, 2, \ldots, n)$ — матрицу $B_J = \| \mathrm{Re} a_{jk} \|$, $j, k \in J$. Проверка устойчивости сводится к рассмотрению всевозможных систем $B_J \rho_J = e_J$, где все компоненты вектора e_J равны $+1$. Если хотя бы одна из этих систем имеет положительное решение ($\rho_j > 0$, $j \in J$), то равновесие неустойчиво. Всего таких систем $2^n - 1$, и приходится рассматривать все эти системы: как показывают соответствующие примеры, ни одна из них не может быть отброшена.

Если же ни одна из указанных систем, а также ни одна из систем $B_J \rho_J = 0$ не имеет положительного решения, то равновесие устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 6, с. 1297—1324.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— Собр. соч. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 7—263.
3. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения.— Собр. соч. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2, с. 272—331.
4. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Об устойчивости положений равновесия в критических случаях и в случаях, близких к критическим.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 595—604.
5. *Марсден Д., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения.— Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 1, с. 24—27.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
15.VIII.1985