УДК 539.3

ОТВЕРСТИЕ В ПЛАСТИНЕ, ОПТИМАЛЬНОЕ ДЛЯ ЕЕ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ – СЖАТИЯ

Вигдергауз С. Б., Черкаев А. В.

Отыскивается очертание равнопрочного отверстия в упругой пластине, нагруженной на бесконечности растягивающими и сжимающими усилиями во взаимно перпендикулярных направлениях. Показано, что в этих условиях отверстие ограничено контуром с угловыми точками, и численными методами найдена его форма. Как оказалось, она весьма близка к прямоугольнику со слегка закругленными сторонами, отношение которых зависит от нагрузки.

Пусть тонкая неограниченная пластина из однородного и изотропного, линейно-упругого материала занимает область S в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и ослаблена отверстием с произвольной, кусочно-гладкой границей Γ, содержащим начало декартовой системы координат XOY, вдоль осей которой на бесконечности действуют заданные усилия P_x и P_y, $P_y/P_x = \lambda$, а отверстие свободно от нагрузок.

Напряженное состояние пластинки находится из решения однородной краевой задачи [1]

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0; \quad t \in \Gamma \tag{1}$$

где t — комплексная координата произвольной точки контура, а голоморфные в $S + \Gamma$) потенциалы Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют на бесконечности асимптотику

$$\begin{aligned} 4\varphi(z) &= P_x(1+\lambda)z + O(|z|^{-1}) \\ 2\psi(z) &= P_x(\lambda-1)z + O(|z|^{-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

Можно также рассматривать задачу (1) с правой частью $f(t) = -{}^1/_2P_x(1+\lambda)t - {}^1/_2P_x(\lambda-1)\bar{t}$ относительно потенциалов, убывающих на бесконечности.

Равнопрочная граница отверстия определяется, как известно [2], условием

$$\sigma_\tau(t) = \mathrm{const}, \quad t \in \Gamma \tag{3}$$

выражающим постоянство касательной компоненты тензора напряжений на ней (нормальная компонента этого тензора по краевому условию равна нулю).

Такая граница является решением задачи оптимального проектирования отверстия в пластине относительно любого из двух оптимизируемых функционалов:

А. Потенциальной энергии деформации пластины. Предварительно этот интегральный функционал регуляризуется вычитанием из его плотности постоянного слагаемого, отвечающего однородному полю напряжений сплошной пластины; он выражает ослабляющий эффект выреза. В [3] показано, что при соблюдении (3) достигается стационарная (для малых вариаций формы Γ) точка функционала, если задана площадь отверстия A.

Б. Максимума по всем точкам $z \in (S + \Gamma)$ локального критерия Мизеса выхода из упругого состояния

$$F(I_1, I_2) = I_1^2(z) - 3I_2(z) \tag{4}$$

(I_1, I_2 — первый и второй инварианты тензора напряжений в точке z). Было установлено [4, 5], что (3) — это необходимое условие глобального оптимума по критерию (4).

Задача фактического отыскания равнопрочной границы подробно исследована [2] в априорном предположении, что заданные на бесконечности усилия — одного знака ($\lambda \geqslant 0$). Контур при этом оказывается эллипсом с отношением осей, равным λ. При λ, стремящемся к нулю или к бесконечности, эллипс вырождается в разрез, параллельный направлению нагрузки.

Условие неотрицательности λ необходимо для существования равнопрочной границы при любом числе отверстий. Действительно, на такой границе должно выполняться соотношение

$$x = \beta T(x), \ \beta = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}; \quad 2x = t + \bar{t}, \ t \in \Gamma \tag{5}$$

где $T(\cdot)$ — интегральный оператор потенциала двойного слоя на Г. Доказательство тождества (5) дословно повторяет приведенное в [6], где рассматривался случай осесимметричной системы равнопрочных полостей в упругом пространстве. Из (5) следует, что β — собственное число оператора T, а значит, по известному свойству его спектра [7], $\beta \geqslant 1$, откуда $\lambda \geqslant 0$. Таким образом, при $\lambda \leqslant 0$ равнопрочные контуры не существуют.

С другой стороны, непосредственное исследование задачи A.) приводит к более слабому, чем (3), условию оптимальности: требуется только постоянство почти всюду на Г абсолютной величины $\sigma_\tau(t)$ [3]. Это обстоятельство позволяет содержательно расширить понятие равнопрочности на случай $\lambda < 0$, который и рассматривается в дальнейшем.

Назовем модульно равнопрочным (M-равнопрочным) контур Γ_m, на котором почти всюду выполняется условие

$$|\sigma_\tau(t)| = \mathrm{const}, \quad t \in \Gamma_m \tag{6}$$

Такой контур может иметь точки, где σ_τ скачком меняет знак вследствие скачкообразного изменения орта касательной τ, т. е. когда указанные точки — угловые.

Основное локальное свойство равнопрочного контура — одновременное достижение во всех его точках предела пластичности по Мизесу при пропорциональном увеличении нагрузки — сохраняется и для M-равнопрочного. Однако авторам пока неясно, начнется ли текучесть во внутренних точках пластины или на контуре. В случае равнопрочной границы исследование этого факта [4, 5] опирается на принцип максимума применительно к гармонической в $(S + \Gamma)$ функции $\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$, по условию (3) сводящейся к постоянной

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) = P_x(1 + \lambda); \quad z \in S + \Gamma \tag{7}$$

При M-равнопрочном контуре условие (7), очевидно, не имеет места.

Численная процедура отыскания M-равнопрочного контура, в предположении его существования, заключается в следующем. Пусть функция $\omega_0(\zeta)$ конформно отображает на S вспомогательную область D комплексного переменного ζ во внешности единичной окружности γ с соответствием границ и бесконечно удаленных точек. При таком подходе тождество (3) резко упрощает задачу нахождения равнопрочного контура в областях любой связности: функция $\omega_0(\zeta)$ — решение (с заданной асимптотикой) внешней парной задачи Дирихле [2] для потенциалов Мусхелишвили

$$\mathrm{Re}\,[\omega_0(\xi) + \psi_0(\xi)] = 0; \quad \psi_0(\zeta) = \psi(\omega_0(\zeta))$$
$$\mathrm{Im}\,[\omega_0(\xi) - \psi_0(\xi)] = 0; \quad \xi \in \gamma$$

следующей из (1) при учете условия (7). В рассматриваемом же случае тождество (1), предварительно продифференцированное по t, принимает на γ более сложный вид:

$$\xi^2\omega_0'(\xi)\,\varphi_0'(\xi) - 2\omega_0(\xi)\,\varphi_0''(\xi) = 2\omega_0'(\xi)\,\psi_0(\xi) \tag{8}$$

Это условие использовано в [8] для построения эквивалентной бесконечной системы линейных соотношений

$$a_2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k C_{k+1} = P_x(\lambda - 1) \tag{9}$$

$$a_{m+2} = \sum_{k=0}^{m} (m - k + 1)\, C_{m-k+1} a_k + (m + 1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{m+k+1} \bar{a}_k \tag{10}$$

которая получена подстановкой в (8) следующих разложений функций $\omega_0(\zeta)$ и $\sigma_\tau(\xi) = \sigma_\tau(\omega_0(\xi))$:

$$\omega_0(\zeta) = C_0\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \zeta^{-k}, \quad \sigma_\tau(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \xi^k \tag{11}$$

$$\zeta = Re^{i\theta},\ R \geqslant 1,\ \xi = e^{i\theta},\ \xi \in \gamma,\ a_{-k} = \bar{a}_k$$

и приравниванием нулю коэффициентов при положительных степенях ξ, что выражает голоморфность правой части (8) в области D. Величина C_0 — масштабный множитель, значение которого определяется площадью A и не влияет на поле напряжений. По симметрии коэффициенты C_k с четными и a_k с нечетными номерами равны нулю, остальные — действительны.

Условие M-равнопрочности (6) справедливо, в силу конформности отображения, и для γ, если под $\sigma_\tau(\xi)$ понимать компоненту тензора напряжений, касательную к окружности. Считая, таким образом, a_k известными по условию (6), получаем из (9), (10) бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $\{C_k\}$, определяющих в совокупности преобразование γ в искомый контур Γ_m. Ранее такой же подход был предложен в [5] для отыскания равнопрочной границы при нагрузке $\sigma_\tau(t) \neq \text{const}$.

Пусть четная в силу симметрии задачи функция $\sigma_\tau(\theta)$ имеет на своем полупериоде $[0, \pi/2)$ точки θ_i $(i = 1, \ldots, l)$ перемены знака, число и положение которых задаются произвольно. Они являются, следовательно, независимыми геометрическими параметрами задачи. В простейшем случае $l = 1$, так что всего на Γ_m четыре таких точки:

(12) $$\sigma_\tau(\theta) = b_0,\ |\theta| < \theta_1,\ \sigma_\tau(\theta) = -b_0,\ \theta_1 < |\theta| < \pi/2$$

Асимптотика (2) сохраняется и в D при $\zeta \to \infty$ [1]. По теореме о среднем для гармонической функции $\operatorname{Re} \varphi_0'(\zeta)$ имеем

(13) $$a_0 = 4 \langle \operatorname{Re} \varphi_0'(\xi) \rangle = b_0 \pi^{-1}(4\theta_1 - \pi) = P_x(1 + \lambda)$$

Остальные a_k находятся из (12) как коэффициенты Фурье

(14) $$a_k = 4\pi b_0 k^{-1} \sin 2k\theta_1,\ k = 2, 4, 6, \ldots$$

Величины C_k $(k = 1, 3, 5, \ldots)$ получаются из решения системы (10) в силу однородности, не зависящей от значения b_0. Оно, в свою очередь, определяется подстановкой $\{C_k\}$ в соотношение (9), правая часть которого предварительно преобразуется с учетом (13) к виду

$$P_x(\lambda - 1) = P_x(\lambda + 1) - 2P_x = 4b_0(4\theta_1 - \pi)/2\pi - 2P_x$$

откуда

$$b_0 = -\frac{2P_x}{d};\quad d = \sum_{k=1}^{\infty} a_k C_{k+1} + \frac{4(4\theta_1 - \pi)}{\pi}$$

и, наконец, из (13) находим $\lambda = a_0/P_x - 1$.

При реализации этой схемы решения система (10) усекалась до 70 ÷ 90 членов. Полученные результаты, часть которых приведена в табл. 1, показывают, что найденный численно оптимальный контур отличается от прямоугольника с отношением сторон $\mu = u/v = f_1(\theta_1)$ только скруглением небольших участков прямолинейной границы, примыкающих к каждому углу, и величиной $\varkappa$ самого угла. Именно такое отличие обеспечивает отсутствие особенностей у σ_τ, заранее обусловленное представлением (11) — (13).

Действительно, в предположении степенной асимптотики у сингулярностей поля напряжений вблизи углов для значений ее показателей ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо уравнение [8]

(15) $$\sin^2(1 - \rho_i)\varkappa = (1 - \rho_i)^2 \sin^2 \varkappa$$

Величина $\varkappa$ отсчитывается обходом угла по часовой стрелке в области S.

Установлено, что при $\pi < \varkappa < 2\pi$ уравнение (15) имеет простые положительные корни меньше единицы. Так, для прямого угла $(\varkappa = 3/2\,\pi)$ $\rho_i = 0{,}4555$, $\rho_2 = 0{,}0115$.

Дополнительное исследование показывает, что при $\pi < \varkappa < \varkappa_0$ имеется единственный корень искомого типа. Здесь $\varkappa_0 \approx 256°$ — первый положительный корень трансцендентного уравнения $\varkappa_0 = \operatorname{arctg} \varkappa_0$.

Из табл. 1 видно, что $\varkappa < \varkappa_0$ при любом λ. Коэффициент G_1 асимптотического разложения с показателем ρ_1 определяется [8] из условия ортогональности нагрузки $f(t)$ и однородного решения бигармонического уравнения, отвечающего ρ_1:

$$2\pi G_1 = \int_{\Gamma_m} f(t)\, \chi_{-1}(t)\, dt$$

Таблица 1

θ_1, град	μ	b_0/P_x	$-\lambda$	$\varkappa$, град
5	48,6	1,008	0,002	202
15	18,4 (18)	1,09 (1,06)	0,042 (0,046)	216
18	11,33 (11)	1,20 (1,12)	0,115 (0,126)	219
25	5,14 (5)	1,51 (1,47)	0,302 (0,308)	227
30	3,35 (3,26)	1,62 (1,55)	0,311 (0,317)	231
40	1,47	2,57	0,866	244
45	1	2,732 (2,696)	—1	247

Таблица 2

k	1	2
2	—0,1667	—0,14480
6	$0,1786\cdot10^{-1}$	$0,1725\cdot10^{-1}$
10	$-0,5682\cdot10^{-2}$	$-0,5740\cdot10^{-2}$
14	$0,2604\cdot10^{-2}$	$0,2699\cdot10^{-2}$
18	$-0,1440\cdot10^{-2}$	$-0,1518\cdot10^{-2}$
22	$0,8917\cdot10^{-3}$	$0,9520\cdot10^{-3}$

В частности, для квадрата функция $\chi_1(t)$ не меняет знак при повороте на угол $\pi/2$ [9], а $f(t)$ — меняет, поэтому $G_1 = 0$. Аналогичная ситуация справедлива и для прямоугольников при произвольном λ.

По симметрии можно ограничиться значениями $\theta_1 \leqslant 45°$, причем V — меньшая сторона прямоугольника — направлена параллельно оси Y. В скобках даны величины, полученные наложением решений Г. Н. Савина [10] задачи об одноосном растяжении пластины с прямоугольным отверстием. Величина b_0 при этом определялась лишь для участков границы вблизи середин сторон, из-за существенных искажений в [11] поля напряжений около углов за счет удержания в разложении $\omega_0(\zeta)$, представленной интегралом Кристоффеля — Шварца, всего трех-четырех членов. Эта же задача для квадратного отверстия решена в [12] иначе — численным решением интегрального уравнения Д. И. Шермана с предварительным выделением сингулярностей в углах. Здесь хорошее совпадение результатов наблюдается для значительно бóльших прямолинейных участков границы.

В табл. 2 приведены коэффициенты C_k для квадрата из [11] (первый столбец) и полученные предлагаемым способом.

Опыт численных расчетов позволяет утверждать, что точек перемены знака θ_i не может быть более одной на полупериоде — иначе решение системы (10) отвечает неоднозначному отображению, а это лишено физического смысла.

Авторы благодарят В. Г. Мазью и П. И. Перлина за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963—979.
3. *Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.* К задаче о подкреплении контура отверстия в пластинке безмоментным упругим стержнем.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 5, с. 905—915.
4. *Баничук Н. В.* Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 920—925.
5. *Вигдергауз С. Б.* Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 902—908.

6. *Вигдергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, № 3, с. 51—58.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1977. 431 с.
8. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
9. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
10. *Партон В. З.*, *Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
11. *Савин Г. Н.* Механика деформируемых тел. Избр. тр. Киев: Наук. думка, 1979. 466 с.
12. *Заргарян С. С.* Интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для многосвязных областей с углами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 87—98.

Ленинград

Поступила в редакцию
27.VII.1985

Технический редактор *В. М. Пахомова*

Сдано в набор 25.03.86 Подписано к печати 29.05.86 Т-09678 Формат бумаги 70×108[1]/16
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 37,9 тыс. Уч.-изд. л. 18,1 Бум. л. 6,0
Тираж 2234 экз. Зак. 2406

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6