УДК 539.3

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

Олифер В. И.

Приводится построение общего решения однородных статических соотношений теории несимметричной упругости. Показан переход к решению классической (симметричной) теории упругости, выводится форма общего решения для плоской задачи.

В теории упругости некоторые модификации общего решения уравнений равновесия служат основой для формулировки различных разновидностей функционала Кастильяно в функциях напряжений [1].

1. В отсутствие массовых сил и моментов статические соотношения теории несимметричной упругости имеют вид [2]

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=0,\quad \nabla\cdot\mathbf{M}-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\mathbf{T}=0 \tag{1.1}$$

где **T**, **M** — несимметричные тензоры, соответственно, напряжений и моментов напряжений, $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор Леви-Чивиты, ∇ — оператор Гамильтона.

Рассмотрим первое из соотношений (1.1). Известно [2], что тензор с равной нулю дивергенцией представим ротором другого тензора. Поэтому положим (**P** — произвольный дифференцируемый тензор второго ранга)

$$\mathbf{T}=\nabla\times\mathbf{P} \tag{1.2}$$

Соотношение (1.2) тождественно удовлетворяет первому из уравнений (1.1). Подставив (1.2) во второе соотношение (1.1) и учитывая справедливость следующего преобразования:

$$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\nabla\times\mathbf{P}=\nabla\cdot\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{P}-\mathbf{P}\cdot\nabla$$

запишем второе соотношение (1.1) в виде

$$\nabla\cdot(\mathbf{M}+\mathbf{P}^T-\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{P})=0 \tag{1.3}$$

(**I** — единичный тензор второго ранга; индекс T означает транспонирование).

Основываясь на указанном свойстве ротора произвольного тензора, положим выражение в скобках в (1.3) равным $\nabla\times\mathbf{Q}$, где **Q** — произвольный дифференцируемый тензор второго ранга. Тогда

$$\mathbf{M}=\nabla\times\mathbf{Q}-\mathbf{P}^T+\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{P} \tag{1.4}$$

Полученное соотношение удовлетворяет второму уравнению (1.1).

Итак, однородным уравнениям статики теории несимметричной упругости тождественно удовлетворяет представление тензоров **T** и **M** в виде (1.2), (1.4).

2. Покажем теперь, что решение (1.2), (1.4) обобщает известное решение статических уравнений классической теории упругости. В названной теории упругости полагают, что $\mathbf{M}=0$. В этом случае соотношение (1.4) приводится к виду

$$\mathbf{P}-\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{P}=\mathbf{Q}\times\nabla \tag{2.1}$$

Вычтем из правой части (2.1) выражение $^3/_2\mathbf{II}\cdot\cdot(\mathbf{Q}-\mathbf{Q})\times\nabla$, тождественно равное нулю. Тогда, учитывая, что

$$\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{Q}\times\nabla={}^1/_3\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{Q}\times\nabla$$

представим (2.1) в виде

$$(\mathbf{I}-\mathbf{II}\cdot)\cdot(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\times\nabla-{}^1/_2\mathbf{II}\cdot\cdot Q\times\nabla)=0 \tag{2.2}$$

Из соотношения (2.2) следует, что

$$\mathbf{P}=-\mathbf{Q}\times\nabla+{}^1/_2\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{Q}\times\nabla$$

Подстановка этого выражения в (1.2) дает

$$\begin{aligned}\mathbf{T}&=-\mathrm{Ink}\,\mathbf{Q}+{}^1/_2\nabla\times(\mathbf{II}\cdot\cdot\mathbf{Q}\times\nabla)=-\mathrm{Ink}\,(\mathbf{Q}+{}^1/_2\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\cdot\cdot\mathbf{Q})=\\&=-\mathrm{Ink}\,(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^A)=-\mathrm{Ink}\,\mathbf{Q}^S\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь Ink — оператор «несовместимости»; индексы A и S означают операции альтернирования и симметризации.

Выражение (2.3) является общим решением статических уравнений классической теории упругости [2] и частным случаем решения (1.2) и (1.4).

3. Для плоской задачи теории несимметричной упругости были приведены [3] соотношения, связывающие тензоры напряжений и моментов напряжений посредством двух скалярных функций. Покажем, что эти соотношения непосредственно следуют из (1.2) и (1.4). Пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3\mathbf{I}_1\alpha + \mathbf{I}_3\mathbf{I}_2\beta, \quad Q = \mathbf{I}_3\mathbf{I}_3\gamma \tag{3.1}$$

где $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{I}_3$ — единичные декартовые базисные орты, α, β и γ — скалярные функции переменных x_1, x_2.

Подстановка соотношений (3.1) в (1.2), (1.4) дает

$$\mathbf{T} = \nabla \times (\mathbf{I}_3\mathbf{I}_1\alpha + \mathbf{I}_3\mathbf{I}_2\beta), \quad \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{I}_3\mathbf{I}_3\gamma - \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3\alpha - \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3\beta \tag{3.2}$$

В развернутом виде компоненты тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ согласно (3.2) запишутся следующим образом:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} \alpha_{,2} & \beta_{,2} & 0 \\ -\alpha_{,1} & -\beta_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \gamma_{,2} - \alpha \\ 0 & 0 & -\gamma_{,1} - \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

где индекс после запятой означает операцию дифференцирования по соответствующей координате. Видно, что полученные соотношения содержат все независимые компоненты напряженного состояния плоской задачи теории несимметричной упругости. Они тождественно удовлетворяют ее статическим соотношениям, и, тем самым, являются их общим решением, которое выражается через три скалярные функции α, β и γ.

Далее дополнительно на (3.2) наложим одно из условий совместности деформаций, имеющее вид

$$\nabla \times \mathbf{M} = 0 \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) тождественно удовлетворяется, если тензор $\mathbf{M}$ для плоской задачи представим в виде

$$\mathbf{M} = \nabla\mathbf{I}_3\varphi, \quad \varphi \equiv \varphi(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.2) с (3.5), находим, что

$$\mathbf{I}_3\mathbf{I}_1\alpha + \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3\beta = (\gamma\mathbf{I}_3\mathbf{I}_3 \times \mathbf{I} - \varphi\mathbf{I}_3\mathbf{I})\cdot\nabla \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в первое из соотношений (3.2) дает

$$\mathbf{T} = \nabla \times (\gamma\mathbf{I}_3\mathbf{I}_3 \times \mathbf{I} - \varphi\mathbf{I}_3\mathbf{I})\cdot\nabla \tag{3.7}$$

Выражения (3.5) и (3.7) связывают тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ посредством двух скалярных функций напряжений γ и φ. Эти соотношения тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1) и одному из условий совместности деформаций, записанному в виде (3.4). В развернутой форме соотношения (3.5) и (3.7) могут быть представлены так:

$$\mathbf{T} = -\begin{Vmatrix} -(\gamma_{,22} + \varphi_{,12}) & (\gamma_{,12} + \varphi_{,22}) & 0 \\ (\gamma_{,12} - \varphi_{,11}) & -(\gamma_{,11} + \varphi_{,12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \varphi_{,1} \\ 0 & 0 & \varphi_{,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

что полностью совпадает с решением, указанным в [3].

Отметим, что полученные общие решения уравнений равновесия теории несимметричной упругости позволяют перейти к решению конкретных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978, 288 с.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Nowacki W.* Teoria niesymetrycznej sprezystosci. Wroclaw: Ossolineum, 1970. 264 S.

Комсомольск-на-Амуре

Поступила в редакцию
30.I.1985