ниям [8]. Кроме того, гамильтонова каноническая формулировка гидродинамических задач оказывается удобной и для численных расчетов [9].

Автор благодарит Ю. И. Неймарка за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 426 с.
3. *Каплан С. А.* О сохранении циркуляции скорости в магнитогазодинамике.— Астрон. ж., 1954, т. 31, № 4, с. 360—361.
4. *Тарапов И. Е.* Вариационный принцип в гидромеханике изотропно намагничивающейся среды.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 383—387.
5. *Голубинский А. И.* О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа.— Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 5, с. 1043—1045.
6. *Голубинский А. И., Сычев В. В.* О некоторых свойствах сохраняемости вихревых течений газа.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 798—799.
7. *Хаар Д. тер.* Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974. 223 с.
8. *Захаров В. Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 431—453.
9. *Buneman O.* Advantages of hamiltonian formulations in computer simulations.— In: Mathematical methods in hydrodynamics and integrability in dynamical systems. N. Y.: Amer. Inst. Phys., 1982, p. 137—143.


Горький

Поступила в редакцию
18.II.1984

---

УДК 532.5 : 532.783

# МЕДЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СЛАБОАНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Покровский В. Н., Цхай А. А.**

Рассматривается задача об установившемся обтекании жесткой сферы потоком линейной однородной слабоанизотропной вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса. Решение ищется методом возмущений и имеет вид разложения по частным решениям уравнения Лапласа в декартовых координатах. Получены выражения для полей скорости и давления в жидкости, а также для силы, действующей на частицу.

При изучении некоторых систем, например жидких кристаллов, возникает задача о вычислении коэффициентов сопротивления при поступательном и вращательном движении частицы в анизотропной жидкости, простейшим случаем которой является линейная однородная вязкая анизотропная жидкость с определяющим уравнением (например, [1])

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta_{ijhq}\nabla_q v_h \tag{1}$$
$$(\eta_{ijhq} = \eta_{jihq} = \eta_{ijqh} = \eta_{hqij},\ \nabla_q = \partial/\partial x_q)$$

где $\sigma_{ij}$ — тензор напряжений, $p$ — давление, $v_h$ — скорость, $\eta_{ijkq}$ — тензор коэффициентов вязкости с указанными свойствами симметрии.

В тензоре коэффициентов вязкости $\eta_{ijhq}$ может быть выделена часть, соответствующая изотропной жидкости с коэффициентом вязкости $\eta$.

$$\eta_{ijhq} = \eta\,(\delta_{ih}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jh}) + \xi_{ijhq} \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать анизотропную добавку $\xi_{ijhq}$ малой, что позволяет выразить коэффициенты сопротивления частицы в виде разложения по малой величине $\xi_{ijhq}$. Ограничимся определением поправки первого порядка к коэффициенту сопротивления сферической частицы при поступательном движении.

Отметим, что попытка [2] решения этой задачи для произвольного значения анизотропии оказалась ошибочной (см. приложение).

Рассмотрим задачу о медленном движении сферической частицы радиуса $R$ в неподвижной анизотропной жидкости с определяющим уравнением (1), (2). Найдем распределение скорости и давления как решение уравнения движения и неразрывности с граничными условиями

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad \nabla_i v_i = 0 \tag{3}$$

С точностью до членов первого порядка по малой величине $\xi_{ijhq}$ скорость и давление записываем в виде

$$v_i = v_i^{(0)} + v_i^{(1)}, \quad p = p^{(0)} + p^{(1)} \tag{4}$$

Нулевое решение соответствует решению Стокса и имеет вид

$$v_i^{(0)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)[u_i + n_i(u_k n_k)] - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3 [u_i - 3n_i(u_k n_k)] + u_i$$

$$p^{(0)} = -\frac{3}{2}\frac{R}{r^2}\eta n_i u_i$$

Для поправок первого порядка получаем систему уравнений с граничными условиями

$$\nabla_h p^{(1)} = \eta \nabla_s \nabla_s v_h + \xi_{hltm} \nabla_m \nabla_l v_t^{(0)}, \quad \nabla_h v_h^{(1)} = 0 \tag{5}$$

$$r = R, \quad v_i^{(1)} = 0; \quad r \to \infty, \quad v_i^{(1)} = 0 \tag{6}$$

Для решения краевой задачи (5), (6) введем аналогично [3] понятие мультиполя $L_{i\ldots k}$ порядка $\theta$ как частного решения уравнения Лапласа в декартовой системе координат ($\theta$ — число индексов $i\ldots k$)

$$L_{i\ldots k} = \frac{(-1)^\theta}{(2\theta-1)!!} \nabla_k \ldots \nabla_i \left(\frac{1}{r}\right), \quad \nabla_s \nabla_s L_{i\ldots k} = 0$$

Выражения для мультиполей порядка $\theta \leqslant 6$ имеют вид

$$L = \frac{1}{r}, \quad L_i = \frac{x_i}{r^3}, \quad L_{ik} = \frac{x_i x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{3r^3} \tag{7}$$

$$L_{ikl} = \frac{x_i x_k x_l}{r^7} - \frac{(\delta_{\alpha\beta} x_\gamma)_{ikl}}{5r^5}$$

$$L_{iklm} = \frac{x_i x_k x_l x_m}{r^9} - \frac{(\delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\delta)_{iklmn}}{7r^7} + \frac{(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta})_{iklm}}{35r^5}$$

$$L_{iklmn} = \frac{x_i x_k x_l x_m x_n}{r^{11}} - \frac{(\delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\delta x_\varepsilon)_{iklmn}}{9r^9} + \frac{(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\beta} x_\varepsilon)_{iklmn}}{63r^7}$$

$$L_{iklmnt} = \frac{x_i x_k x_l x_m x_n x_t}{r^{13}} - \frac{(\delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\delta x_\varepsilon x_\nu)_{iklmnt}}{11r^{11}} + $$
$$+ \frac{(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\beta} x_\varepsilon x_\nu)_{iklmnt}}{99r^9} - \frac{(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\varepsilon\nu})_{iklmnt}}{693r^7}$$

В этих формулах и далее выражения вида $(\delta_{\alpha\beta}x_\gamma x_\delta)_{iklm}$ означают сумму однотипных членов, в которой греческие индексы в скобках принимают последовательно все латинские индексы, указанные вне скобок. Совпадающие при этом члены учитываются только один раз.

Справедливы следующие правила операций над мультиполями:

$$\nabla_q L_{i\ldots k} = -(2\theta+1) L_{i\ldots kq}, \quad x_q L_{i\ldots kq} = \frac{\theta+1}{2\theta+1} L_{i\ldots k}$$

$$\nabla_s \nabla_s r^n L_{i\ldots k} = n(n-2\theta-1) r^{n-2} L_{i\ldots k}$$

$$\nabla_s \nabla_s \left\{ x_t r^n L_{i\ldots k} + \frac{2(2\theta+1)}{(n+2)(n-2\theta-1)} r^{n+2} L_{i\ldots kt} \right\} =$$
$$= n(n-2\theta+1) r^{n-2} x_t L_{i\ldots k}$$

Справедливо также следующее рекуррентное соотношение для мультиполей порядка $\theta \leqslant 5$ (число индексов $\gamma\ldots\delta$ равно $I-2$):

$$x_m L_{i\ldots k} = r^2 L_{i\ldots km} - \frac{2}{(2\theta+1)(2\theta-1)} (\delta_{\alpha\beta} L_{\gamma\ldots\delta m})_{i\ldots k} + \tag{8}$$
$$+ \frac{1}{2\theta+1} (\delta_{m\alpha} L_{\gamma\ldots\delta\varepsilon})_{i\ldots k}$$

Применяя операцию $\nabla_h$ к первому уравнению (5) и используя второе уравнение (5), находим уравнение Пуассона для поправки к давлению

$$\nabla_s \nabla_s p^{(1)} = \xi_{hltm} \nabla_h \nabla_m \nabla_l v_t^{(0)} \tag{9}$$

$$v_t^{(0)} = (A_k + B_k r^2) L_{tk} + C_t L + u_t, \quad A_k = \frac{3}{4} R^3 u_k, \quad C_k = - R u_k, \quad B_k = - \frac{3}{4} R u_k$$

Рассматривая совместно уравнения (5) и (9), используя указанные свойства мультиполей и учитывая граничные условия (6), находим первые поправки к скорости и давлению

$$p^{(1)} = \xi_{nltm} R u_k \Big\{ A L_{tklmn} + B (2\delta_{mn} L_{tkl} + \delta_{ln} L_{tkm}) +$$
$$+ C \delta_{kn} L_{tlm} - \frac{9}{140} (\delta_{kl} \delta_{mn} L_t + \delta_{tm} \delta_{ln} L_k) + \frac{12}{35} \delta_{km} \delta_{ln} L_t - \frac{9}{70} \delta_{tl} \delta_{mn} L_k \Big\}$$
$$A = \frac{105}{8} R^2 r^2 - \frac{45}{16} r^4 - \frac{189}{16} R^4, \quad B = \frac{1}{2} r^2 - \frac{5}{6} R^2,$$
$$C = - \frac{5}{4} r^2 + \frac{25}{12} R^2$$

$$v_h^{(1)} = \frac{R}{\eta} (r^2 - R^2) \xi_{nltm} u_k \Big\{ D L_{tklmnh} + E (4\delta_{mn} L_{tklh} + 2\delta_{ln} L_{tkmh} + \tag{10}$$
$$+ \delta_{kh} L_{tlmn}) + G (\delta_{lk} L_{tmnh} + \delta_{th} L_{klmn}) -$$
$$- \frac{1}{24} L_{th} \delta_{kl} \delta_{mn} + \frac{1}{6} (\delta_{km} \delta_{ln} L_{th} + \delta_{kl} \delta_{nh} L_{tm}) - \frac{19}{420} \delta_{tl} \delta_{mn} L_{kh} -$$
$$- \frac{19}{840} \delta_{tm} \delta_{ln} L_{kh} + \frac{5}{42} \delta_{lm} \delta_{nh} L_{tk} + \frac{5}{84} \delta_{ln} \delta_{mh} L_{tk} -$$
$$- \frac{1}{21} \delta_{kh} \delta_{mn} L_{tl} - \frac{5}{12} \delta_{km} \delta_{nh} L_{tl} - \frac{1}{42} \delta_{kh} \delta_{ln} L_{tm} \Big\}$$
$$D = - \frac{15}{32} r^4 + \frac{45}{16} r^2 R^2 - \frac{99}{32} R^4, \quad E = \frac{9}{176} r^2 - \frac{21}{176} R^2,$$
$$G = - \frac{63}{176} r^2 + \frac{147}{176} R^2$$

Сила, действующая на частицу, вычисляется по формуле

$$F_i = \iint\limits_S \sigma_{ik} n_k d_s$$

где $n_k$ — единичная нормаль к поверхности частицы $S$.

Тензор напряжений и сила, как и поля скорости и давления (4), представляются с точностью до членов первого порядка по малой величине $\xi_{ijhq}$ в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}, \quad F_i = F_i^{(0)} + F_i^{(1)}$$

В нулевом приближении, согласно решению Стокса

$$F_i^{(0)} = 6\pi\eta R u_i \tag{11}$$

Обусловленная анизотропией среды первая добавка к силе, действующей на сферу со стороны жидкости, вычисляется по формуле

$$F_i^{(1)} = \iint\limits_S \sigma_{ij}^{(1)} n_j |_{r=R} \, ds = \iint\limits_S [- p^{(1)} \delta_{ij} + \eta (\nabla_j v_i^{(1)} + \nabla_i v_j^{(1)}) +$$
$$+ \xi_{ijhq} \nabla_q v_h^{(0)}] |_{r=R} n_j \, ds$$

Используя полученные выражения для распределения скорости и давления и учитывая, что

$$\iint\limits_S x_i x_k \, ds = \frac{4}{3} \pi R^4 \delta_{ik}, \quad \iint\limits_S x_i x_k x_l x_m \, ds = \frac{4}{15} \pi R^6 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta})_{iklm}$$
$$\iint\limits_S x_i x_k x_l x_m x_n x_t \, ds = \frac{4}{105} \pi R^8 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \delta_{\varepsilon\nu})_{iklmnt}$$

находим поправку к силе сопротивления

$$F_i^{(1)} = \frac{3}{35}\pi R\,(15\delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{ni} - 10\delta_{ik}\delta_{ln}\delta_{mi} + 2\delta_{il}\delta_{ki}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{ki}\delta_{ln})\,\xi_{nlim}u_k \tag{12}$$

Можно показать, что часть силы сопротивления, обусловленная вращательным движением сферы в анизотропной жидкости, равна нулю. Поэтому полная сила сопротивления сферы сводится к силе сопротивления при ее поступательном движении.

*Приложение. Об ошибочности результатов работы* [2]. Для решения задачи (1), (3) в [2] введены новые характеристические переменные: тензор поля скорости $V_{is}'$ и вектор поля давления $P_s'$, следующим образом:

$$v_i = V_{is}'u_s, \quad p\delta_{ij} = {}^1/_2\eta_{ijlm}\delta_{lm}P_s'u_s \tag{П.1}$$

где поступательная скорость частицы $u_s$ — произвольный вектор. Подставляя (п. 1) в уравнения (1), (3), находим, что характеристические величины ($V_{is}'$, $P_s'$) должны удовлетворять системе уравнений и граничных условий

$$\nabla_j\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\eta_{ijlm}u_s\nabla_j(-\delta_{lm}P_s' + \nabla_m V_{ls}' + \nabla_l V_{ms}') = 0 \tag{П.2}$$

$$\nabla_i V_{il}' = 0; \quad r = a, \quad V_{ij}' = \delta_{ij}; \quad r \to \infty, \quad V_{ij}' \to 0 \tag{П.3}$$

Однако приведенные в [2] выражения для характеристических величин

$$V_{ij}' = \frac{3}{4}\frac{a}{r}(n_in_j + \delta_{ij}) - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(n_in_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{П.4}$$

$$P_i' = \frac{3}{2}\frac{a}{r^2}n_i, \quad n_i = \frac{x_i}{r}$$

не удовлетворяют уравнениям (П. 2). Вследствие этого приведенные выражения для коэффициентов сопротивления сферической частицы неверны.

Ошибка в работе [2] заключается в том, что вместо уравнений (П. 2) использованы уравнения

$$\nabla_l P_s' = \nabla_j\nabla_j V_{ls}' \tag{П.5}$$

полученные следующим образом. Для того чтобы пара ($V_{is}'$, $P_s'$) была решением (П. 2), достаточно, если эта пара будет решением уравнений $\nabla_j(-\delta_{lm}P_s' + \nabla_m V_{ls}' + \nabla_l V_{ms}') = 0$, или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&j = m = 1, \quad -\delta_{l1}\nabla_1 P_s' + \nabla_1\nabla_1 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_1 V_{1s}' = 0\\
&j = m = 2, \quad -\delta_{l2}\nabla_2 P_s' + \nabla_2\nabla_2 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_2 V_{2s}' = 0\\
&j = m = 3, \quad -\delta_{l3}\nabla_3 P_s' + \nabla_3\nabla_3 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_3 V_{3s}' = 0\\
&j = 1, \quad m = 2, \quad -\delta_{l2}\nabla_1 P_s' + \nabla_1\nabla_2 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_1 V_{2s}' = 0\\
&j = 1, \quad m = 3, \quad -\delta_{l3}\nabla_1 P_s' + \nabla_1\nabla_3 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_1 V_{3s}' = 0\\
&j = 2, \quad m = 2, \quad -\delta_{l1}\nabla_2 P_s' + \nabla_1\nabla_2 V_{ls}' + \nabla_l\nabla_2 V_{1s}' = 0 \text{ и т. д.}
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Автор работы [2] сложил первые три уравнения в (П. 6), получив при этом, естественно, (П. 5), а остальные уравнения в (П. 6) отбросил. Как видно из приведенного рассуждения, система (П. 3), (П. 5) не эквивалентна системе (П. 2), (П. 3).

Отметим, что в частном случае изотропной вязкости

$$\eta_{ijlm} = \eta(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl})$$

соотношения (П. 1) переходят в $v_i = V_{is}'u_s$, $p = P_s'u_s\eta$, уравнения (П. 2) сводятся к уравнениям (П. 5) и задача, а также метод ее решения в [2], совпадают с известными результатами [4].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
2. *Волков В. С.* Медленные движения сферы в анизотропной вязкоупругой жидкости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 248—253.
3. *Мирошников В. А.* МГД-течения около неподвижного шара.— Магнитн. гидродинамика, 1980, № 3, с. 51—57.
4. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.



Барнаул

Поступила в редакцию 30.VII.1984