Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 538.4

ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Горский В. Б.

Для вихревых адиабатических течений намагничивающейся идеально электропроводной сжимаемой невязкой жидкости обобщаются классические теоремы Кельвина о сохранении циркуляции скорости и Гельмгольца о вмороженности вихревых линий в жидкость и сохранении интенсивностей вихревых трубок. Найдены канонические переменные и получены канонические гамильтоновы уравнения движения.

1. Уравнение движения рассматриваемой жидкости имеет вид [1]

$$
\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p+\frac{B_k}{4\pi}\nabla H_k+\left[\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right];\tag{1.1}
$$

$$
p=p_0+\frac{1}{4\pi}\int_0^H\left[\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{T,H}\right]\mathbf{H}\,d\mathbf{H}
$$

где $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $\mathbf{B}=\mu(\rho,T,H)\,\mathbf{H}$ — магнитная индукция, T — температура, p_0 — давление обычной жидкости в отсутствие магнитного поля, а остальные обозначения — общепринятые. Воспользуемся далее термодинамическими тождествами Гиббса для намагничивающейся среды

$$
dU=T\,dS+\frac{p}{\rho^2}d\rho+\mathbf{H}d\frac{\mathbf{B}}{4\pi\rho},\quad dW=T\,dS+\frac{dp}{\rho}+\mathbf{H}d\frac{\mathbf{B}}{4\pi\rho};\tag{1.2}
$$

$$
U=U_0+\frac{1}{4\pi\rho}\left\{\mathbf{HB}+\int_0^H\left[T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{\rho,H}-\mu\right]\mathbf{H}\,d\mathbf{H}\right.
$$

$$
W=W_0+\frac{1}{4\pi\rho}\left\{\mathbf{HB}+\int_0^H\left[T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{\rho,H}-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{T,H}\right]\mathbf{H}\,d\mathbf{H}\right.
$$

$$
S=S_0+\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^H\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{\rho,H}\mathbf{H}\,d\mathbf{H}
$$

Здесь U, W, S — соответственно, внутренняя энергия, энтальпия и энтропия, приходящиеся на единицу массы жидкости; нулевым индексом отмечены значения параметров в отсутствие поля.

При помощи соотношений (1.2) уравнение движения (1.1) приводится к виду

$$
\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}]=T\,dS-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+W-\frac{\mathbf{HB}}{4\pi\rho}\right)+\frac{1}{c\rho}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\tag{1.3}
$$

Возьмем rot от уравнения (1.3), учитывая, что $\mathbf{j}=(c/4\pi)\operatorname{rot}\mathbf{H}$. Вводя теперь оператор $\operatorname{Helm}\boldsymbol{\omega}\equiv d\boldsymbol{\omega}/dt-(\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}\equiv\operatorname{rot}\mathbf{v}$, можно привести результат к форме

$$
\operatorname{Helm}\boldsymbol{\omega}=\nabla T\times\nabla S-\operatorname{rot}\left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi\rho}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}\right]\tag{1.4}
$$

По теореме Фридмана [1] необходимым и достаточным условием выполнения утверждений теорем Гельмгольца о вмороженности вихревых линий в среду и сохранении интенсивностей вихревых трубок является условие $\operatorname{Helm}\boldsymbol{\omega}=0$, т. е. согласно (1.4),

---

[1] *Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А.* Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М.: Изд-во МГУ, 1975. 48 с.

условие

$$\nabla T \times \nabla S = \operatorname{rot}\left[\frac{\mathbf{B}}{4\pi\rho} \times \operatorname{rot}\mathbf{H}\right] \tag{1.5}$$

С другой стороны, известно, что скорость изменения циркуляции Γ вектора скорости $\mathbf{v}$ по замкнутому контуру C, движущемуся вместе с жидкостью, равна [2]

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint\limits_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{v}\, d\sigma = \iint\limits_\sigma \operatorname{Helm}\boldsymbol{\omega}\, d\sigma$$

где $d\mathbf{r}$ — элемент касательной к C, а σ — поверхность, ограниченная контуром C. Подставляя сюда выражение $\operatorname{Helm}\boldsymbol{\omega}$ из (1.4), получаем, что для сохранения циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру (теорема Кельвина) при непрерывном движении рассматриваемой жидкости необходимо и достаточно, как и в теоремах Гельмгольца, условие (1.5). В частном случае идеальной магнитной гидродинамики из (1.5) при $\mu = \text{const} = 1$ следует известное аналогичное условие [3].

Условие (1.5) является очень сильным ограничением. Вместе с тем можно показать, что существует некоторая обобщенная завихренность среды, для которой рассмотренные вихревые теоремы выполняются без жесткого условия (1.5). Это будет сделано ниже при помощи вариационной формулировки задачи.

2. Вариационная формулировка задачи о рассматриваемых движениях намагничивающейся проводящей жидкости была предложена в [4]. Слегка видоизменим ее.

Возьмем плотность l лагранжиана в форме

$$l = \frac{\rho v^2}{2} - \rho U + \varphi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v}\right) - \alpha\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla S\right) -$$
$$- \beta\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla a\right) + \gamma\operatorname{div}\mathbf{B} + \mathbf{b}\left[\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right]$$

где a — произвольная лагранжева координата жидкой частицы, φ, α, β, γ, $\mathbf{b}$ — лагранжевы множители. Проведя здесь тождественные преобразования и отбрасывая дивергентные члены и члены — частные производные по времени, получим

$$l_1 = \frac{\rho v^2}{2} - \rho U - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + S\frac{\partial\alpha}{\partial t} + a\frac{\partial\beta}{\partial t} - \mathbf{B}\left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + \nabla\gamma\right) - \tag{2.1}$$
$$- \mathbf{v}\,(\rho\nabla\varphi + \alpha\nabla S + \beta\nabla a + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{b})$$

Беря вариационные производные от l_1 по свободным функциям $\mathbf{v}$, ρ, S, a, $\mathbf{B}/(4\pi\rho)$ и приравнивая их нулю, находим условия стационарности, являющиеся лагранжевыми уравнениями движения

$$\frac{\delta l_1}{\delta\mathbf{v}} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla\varphi + \frac{\alpha}{\rho}\nabla S + \frac{\beta}{\rho}\nabla a + \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{\delta l_1}{\delta\rho} = 0, \quad \frac{v^2}{2} - W - \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\mathbf{BH}}{4\pi\rho} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\delta l_1}{\delta S} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) = T \tag{2.4}$$

$$\frac{\delta l_1}{\delta a} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\rho}\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\delta l_1}{\delta(\mathbf{B}/4\pi\rho)} = 0, \quad \frac{\mathbf{H}}{4\pi} = [\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}] - \left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} + \nabla\gamma\right) \tag{2.6}$$

Можно показать, что уравнения (2.2)—(2.6) при исключении лагранжевых множителей φ, α, β, γ, $\mathbf{b}$ сводятся к уравнению движения (1.1).

Введем теперь с помощью обобщенного преобразования Клебша (2.2) обобщенные скорость $\mathbf{u}$ и завихренность $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{\alpha}{\rho}\nabla S - \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}\right], \quad \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u} \tag{2.7}$$

Используя (2.7), уравнение индукции в форме $d(\mathbf{B}/\rho)/dt = (\rho)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$ и векторное тождество для трех произвольных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$

$$\mathbf{a}_1\times\operatorname{rot}(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3) + \mathbf{a}_2\times\operatorname{rot}(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1) + \mathbf{a}_3\times\operatorname{rot}(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2) =$$
$$= \operatorname{grad}\{\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3]\} + (\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\operatorname{div}\mathbf{a}_3 + (\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)\operatorname{div}\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)\operatorname{div}\mathbf{a}_2$$

уравнение движения (1.1) приводим к квазибаротропному виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - [\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}] + \nabla \left\{ \frac{v^2}{2} + W + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} + [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] \frac{\mathbf{B}}{\rho} - \frac{\mathbf{BH}}{4\pi\rho} \right\} = 0 \tag{2.8}$$

Беря rot от (2.8), получаем Helm $\mathbf{\Omega} = 0$. Это означает, что для обобщенной завихренности $\mathbf{\Omega}$ рассматривавшиеся теорема Кельвина и теоремы Гельмгольца выполняются без жесткого условия (1.5). Аналогичный результат в обычной гидродинамике другим методом был получен в [5, 6, 7].

3. Найдем канонические гамильтоновы уравнения движения намагничивающейся идеально проводящей сжимаемой жидкости. Для этого преобразуем l_1 (2.1):

$$l_1 = \frac{\rho v^2}{2} - \rho U - \frac{\partial (\rho\varphi)}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + S \frac{\partial \alpha}{\partial t} + a \frac{\partial \beta}{\partial t} -$$
$$- \rho \mathbf{v} \left(\nabla\varphi + \frac{\alpha}{\rho} \nabla S + \frac{\beta}{\rho} \nabla a + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} \right) + \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} -$$
$$- \frac{\partial (\mathbf{bB})}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{div} (\gamma \mathbf{B})$$

Используя здесь (2.2) и отбрасывая члены — производные по времени и дивергентный член, приходим к выражению

$$l_2 = - \frac{1}{2\rho} (\rho\nabla\varphi + \alpha\nabla S + \beta\nabla a + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{b})^2 - \rho U +$$
$$+ \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + S \frac{\partial \alpha}{\partial t} + a \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Найдем отсюда плотности обобщенных импульсов, определяемых формулой $\pi_k = \partial l_2 / \partial q_k^{\cdot}$, где $q_k = \rho, \alpha, \beta, \mathbf{B}$. Поэтому получаем

$$\pi_1 = \frac{\partial l_2}{\partial \rho^{\cdot}} = \varphi, \quad \pi_2 = \frac{\partial l_2}{\partial \alpha^{\cdot}} = S, \quad \pi_3 = \frac{\partial l_2}{\partial \beta^{\cdot}} = a, \quad \pi_4 = \frac{\partial l_2}{\partial \mathbf{B}^{\cdot}} = \mathbf{b}$$

Плотность h гамильтониана определяется формулой

$$h = \sum \pi_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - l_2 = \frac{1}{2\rho} (\rho\nabla\varphi + \alpha\nabla S + \beta\nabla a + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{b})^2 + \rho U$$

т. е. это плотность полной энергии жидкости.

Согласно классической теории [8], канонические уравнения движения сплошной среды определяются в виде $\partial q_k / \partial t = \delta h / \delta \pi_k$, $\partial \pi_k / \partial t = -\delta h / \delta q_k$. Таким образом, получаем следующие канонические уравнения изучаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta h}{\delta \varphi} = - \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\delta h}{\delta \rho} = \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi - W + \frac{\mathbf{BH}}{4\pi\rho} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\delta h}{\delta S} = \rho T - \operatorname{div} (\alpha \mathbf{v}), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\delta h}{\delta \alpha} = - \mathbf{v} \cdot \nabla S \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\delta h}{\delta a} = - \operatorname{div} (\beta \mathbf{v}), \quad \frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{\delta h}{\delta \beta} = - \mathbf{v} \cdot \nabla a \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\delta h}{\delta \mathbf{b}} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = - \frac{\delta h}{\delta \mathbf{B}} = [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] - \left(\nabla\gamma + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \right) \tag{3.4}$$

Видно, что (3.1) соответствуют уравнению неразрывности и уравнению (2.3) являющемуся по существу интегралом Лагранжа — Коши. Уравнения (3.2) эквивалентны (2.4) и условию адиабатичности, (3.3) соответствуют (2.5) и условию сохранения лагранжевой координаты жидкой частицы. Наконец, уравнения (3.4) эквивалентны уравнению индукции и (2.6).

Заметим, что для нахождения вариационных производных $\delta n / \delta \mathbf{b}$, $\delta h / \delta \mathbf{B}$ представляем h в виде $h = \mathbf{v} (\rho\nabla\varphi + \alpha\nabla S + \beta\nabla a + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}) - \rho v^2/2 + \rho U$, причем, вычисляя $\delta h / \delta \mathbf{B}$, добавляем к h нулевой член $(-\gamma \operatorname{div} \mathbf{B})$ и дивергентный член $\operatorname{div} (\gamma \mathbf{B})$, что допустимо.

Полученный гамильтонов формализм для рассмотренной жидкости полезен во многих отношениях. Введение канонических переменных позволяет устанавливать некоторые общие закономерности взаимодействия волн в нелинейных средах, выводить укороченные уравнения, описывающие в различных приближениях упрощенные модели нелинейных сред, естественно перейти к релятивистскому и квантовому обобщениям [8]. Кроме того, гамильтонова каноническая формулировка гидродинамических задач оказывается удобной и для численных расчетов [9].

Автор благодарит Ю. И. Неймарка за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 426 с.
3. *Каплан С. А.* О сохранении циркуляции скорости в магнитогазодинамике.— Астрон. ж., 1954, т. 31, № 4, с. 360—361.
4. *Тарапов И. Е.* Вариационный принцип в гидромеханике изотропно намагничивающейся среды.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 383—387.
5. *Голубинский А. И.* О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа.— Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 5, с. 1043—1045.
6. *Голубинский А. И., Сычев В. В.* О некоторых свойствах сохраняемости вихревых течений газа.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 798—799.
7. *Хаар Д. тер.* Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974. 223 с.
8. *Захаров В. Е.* Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 431—453.
9. *Bunетап О.* Advantages of hamiltonian formulations in computer simulations.— In: Mathematical methods in hydrodynamics and integrability in dynamical systems. N. Y.: Amer. Inst. Phys., 1982, p. 137—143.

Горький

Поступила в редакцию 18.II.1984

УДК 532.5 : 532.783

МЕДЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СЛАБОАНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Покровский В. Н., Цхай А. А.

Рассматривается задача об установившемся обтекании жесткой сферы потоком линейной однородной слабоанизотропной вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса. Решение ищется методом возмущений и имеет вид разложения по частным решениям уравнения Лапласа в декартовых координатах. Получены выражения для полей скорости и давления в жидкости, а также для силы, действующей на частицу.

При изучении некоторых систем, например жидких кристаллов, возникает задача о вычислении коэффициентов сопротивления при поступательном и вращательном движении частицы в анизотропной жидкости, простейшим случаем которой является линейная однородная вязкая анизотропная жидкость с определяющим уравнением (например, [1])

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta_{ijhq}\nabla_q v_h \qquad (1)$$
$$(\eta_{ijhq} = \eta_{jihq} = \eta_{ijqh} = \eta_{hqij},\ \nabla_q = \partial/\partial x_q)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, p — давление, v_h — скорость, η_{ijkq} — тензор коэффициентов вязкости с указанными свойствами симметрии.

В тензоре коэффициентов вязкости η_{ijhq} может быть выделена часть, соответствующая изотропной жидкости с коэффициентом вязкости η.

$$\eta_{ijhq} = \eta\,(\delta_{ih}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jh}) + \xi_{ijhq} \qquad (2)$$

В дальнейшем будем считать анизотропную добавку ξ_{ijhq} малой, что позволяет выразить коэффициенты сопротивления частицы в виде разложения по малой величине ξ_{ijhq}. Ограничимся определением поправки первого порядка к коэффициенту сопротивления сферической частицы при поступательном движении.

Отметим, что попытка [2] решения этой задачи для произвольного значения анизотропии оказалась ошибочной (см. приложение).