

УДК 539.375+539.3:551.243

ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Черепанов Г. П.

Необратимые деформации твердых тел (пластичность и ползучесть) в рамках теории упругости объясняются движением линейных и точечных дефектов, всегда присутствующих в структуре твердого материала. К линейным дефектам относятся дислокации и трещины, к точечным — дефекты типа дырок (вакансии, поры, пустоты) и дефекты типа включений (атомы внедрения, инородные зерна, протоны).

Наиболее универсальным методом определения сил, движущих эти дефекты, является метод инвариантных интегралов. Вначале дается весьма краткий литературный обзор, а затем рассмотрены точечные дефекты типа включений, моделируемые центрами расширения. Получена формула для движущей силы, изучены некоторые взаимодействия и движения включений. Дальнейшее посвящено точечным дефектам типа дырок, моделируемым асимптотикой сферической полости, индуцированной внешним полем. Выведена формула для движущей силы, рассмотрены некоторые взаимодействия и перемещения дырок. Поведение дырки оказывается даже качественно отличным от поведения модельной вакансии, принятой в физической литературе и описываемой центрами сжатия.

Еще в 1951 г. Эшелби, продолжая метод Максвелла теории электромагнитного поля, получил три инвариантных интеграла теории упругости [1], впоследствии названных J -интегралами. Однако Эшелби и дальнейшие исследователи не смогли преодолеть основную трудность теории, связанную с расходимостью инвариантных интегралов в сингулярных точках поля; сам Эшелби пользовался старым энергетическим формализмом, основанном на вычислении энергии взаимодействия (см. в [2] его теорию включений или вывод формулы Пича—Келера для силы, движущей дислокацию). Поэтому последующие исследователи не обратили внимания на J -интегралы: о них даже не упоминается в многочисленных книгах по теории дислокаций (например, [3—7]). Широкое применение J -интегралов началось с работы Райса в 1968 г. [8], в которой он непосредственно при помощи теоремы дивергенции доказал инвариантность одного из J -интегралов и применил его для анализа концентрации деформаций вблизи щелей и выточек. В 1972 г. Ландес и Бегли на этой основе ввели новую константу J_c в качестве характеристики начала роста трещины в упругопластических материалах [9].

В 1967 г. автор независимо от работ Эшелби предложил другой и более общий подход [10], позволивший получить энергетический инвариантный Γ -интеграл для произвольного твердого тела с учетом динамики и объемных сил (J -интеграл получается из него как некоторый частный случай). При таком подходе инвариантность Γ -интеграла оказывается тривиальным следствием закона сохранения (на основании этой инвариантности в [10, 11] для определения силы Γ , движущей трещину, были использованы различные контуры: в форме окружности и прямоугольника). Далее в [10] была предложена общая теория разрушения твердых тел; соответствующая основная константа разрушения обозначалась там через γ (введенная на пять лет позже константа J_c равняется 2γ). В работах автора [12—16] на многочисленных прикладных проблемах дано дальнейшее развитие этого подхода; в частности, разработаны теория Γ -вычетов и правило Γ -интегрирования, позволяющие вычислять расходящиеся инвариантные интегралы, и, тем самым, «работать» с сингулярностями физического поля.

Ниже рассматривается однородная изотропная упругая среда в условиях квазистатики при малых деформациях. В этом случае закон сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$(0.1) \quad \Gamma_k = \int_{\Sigma} (U n_k - \sigma_{ij} u_{i,k} n_j) d\Sigma \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

Здесь U — упругий потенциал единицы объема, $\sigma_{i,j}$ — напряжения, u_i — перемещения, Γ_k — компоненты движущей силы (равной диссипации энергии при перемещении на единицу длины вдоль оси x_k сингулярностей упругого поля внутри Σ).

Движение линейных дефектов типа дислокаций и трещин происходит под действием сил, определяемых формулами Пича — Келера и Ирвина соответственно; эти формулы выводятся при помощи (0.1) и правила Г-интегрирования стягиванием Σ в сингулярность [10—16]. Теория точечных дефектов предлагается ниже. Относительно терминологии: введенный автором термин «инвариантный» равнозначен термину «не зависящий от пути интегрирования», введенному Райсом.

1. Точечные дефекты типа включений. К точечным дефектам типа включений относятся, например, атомы азота или водорода, проникающие в решетку металла при его выплавке, атомы внедрения легирующих элементов, специально растворяемых в металле для придания ему необходимых свойств, атомы примесей и т. п. Они способны к движению относительно решетки под действием самодиффузии и внешних нагрузок.

Дефекты типа включений будем моделировать центрами расширения, описываемыми так [17]:

$$(1.1) \quad u_R^s = \frac{1+\nu}{2E} \frac{qa^3}{R^2} \quad (q > 0)$$

$$\sigma_R^s = -\frac{qa^3}{R^3}, \quad \sigma_\psi^s = \sigma_\theta^s = \frac{1}{2} \frac{qa^3}{R^3}$$

Здесь R, ψ, θ — сферические координаты, $u_R^s, \sigma_R^s, \sigma_\psi^s, \sigma_\theta^s$ — перемещение и напряжения, отличные от нуля, a — радиус «ядра» центра сжатия, q — давление ядра на упругое тело, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

При помощи (0.1) и (1.1) можно показать, что в случае произвольного однородного внешнего поля напряжений движущая сила, действующая на включение, равна нулю. Допустим теперь, что невозмущенное упругое поле имеет следующий вид (A — заданная постоянная):

$$(1.2) \quad \sigma_{33}^0 = Ax_1, \quad u_1^0 = -\frac{1}{2}AvE^{-1}(x_1^2 - x_2^2 + \nu^{-1}x_3^2)$$

$$u_2^0 = -\nu AE^{-1}x_1x_2, \quad u_3^0 = AE^{-1}x_1x_3$$

Вычислим для этого случая движущую силу (направленную вдоль оси x_1 , так как ее составляющие вдоль осей x_2 и x_3 , очевидно, равны нулю). Воспользовавшись инвариантностью Г-интеграла (0.1), в качестве Σ возьмем параллелепипед, образованный гранями $x_3 = \pm\delta, x_1 = \pm L, x_2 = \pm L$ при $\delta/L \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty$.

По правилу Г-интегрирования находим

$$(1.3) \quad \Gamma_1^s = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_{33}^s u_{3,1}^0 + \sigma_{33}^0 u_{3,1}^s + \sigma_{23}^s u_{2,1}^0 + \sigma_{13}^s u_{1,1}^0) dx_1 dx_2$$

$$(x_3 = \delta)$$

При этом была использована симметрия относительно плоскости $x_3 = 0$ и соотношения: $n_3 = 1$ при $x_3 = +\delta, n_3 = -1$ при $x_3 = -\delta, \sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = 0$ при $x_3 = \pm\delta$.

Согласно (1.1), имеем

$$(1.4) \quad \sigma_{33}^s = \sigma_z^s = -\frac{1}{4} \frac{qa^3}{R^3} (1 + 3 \cos 2\psi)$$

$$\tau_{rz}^s = -\frac{3}{4} \frac{qa^3}{R^3} \sin 2\psi, \quad \sigma_{13}^s = \frac{x_1}{r} \tau_{rz}, \quad \sigma_{23}^s = \frac{x_2}{r} \tau_{rz}$$

$$u_{3,1}^s = -3 \frac{1+\nu}{2E} qa^3 \frac{x_1 z}{R^5} \quad (z = x_3, r^2 = x_1^2 + x_2^2, R^2 = r^2 + z^2)$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты; угол ψ отсчитывается от оси z .

Используя равенства (при $x_3 = \delta$)

$$R^2 = r^2 + \delta^2, \delta/R = \cos \psi, r/R = \sin \psi, x_1/r = \cos \theta$$

$$rdr = RdR = R^2 \operatorname{tg} \psi d\psi, dx_1 dx_2 = r dr d\theta$$

вычисляем (1.3) при помощи (1.4) и (1.2)

$$(1.5) \quad \Gamma_1 = -2E^{-1}A \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\delta \sigma_z^s - v r \tau_{rz}^s + E x_1 u_{3,1}^s) r dr d\theta = \\ = \pi E^{-1} A q a^3 \int_0^{\pi/2} [\sin \psi (1 + 3 \cos 2\psi) - 3v \sin \psi \operatorname{tg} \psi \sin 2\psi + \\ + 3(1 + v) \sin^3 \psi] d\psi = 2\pi E^{-1} (1 - v) A q a^3$$

В другом частном случае неоднородного внешнего поля

$$(1.6) \quad \sigma_{11}^0 = Bx_1, \sigma_{13}^0 = \sigma_{31}^0 = -Bx_3 \\ u_1^0 = 1/2 E^{-1} B [x_1^2 + v x_2^2 - (2 + v) x_3^2] \\ u_2^0 = -v E^{-1} B x_1 x_2, u_3^0 = -v E^{-1} B x_1 x_3$$

аналогичные вычисления дают

$$\Gamma_1 = 2\pi (1 - v) E^{-1} B q a^3, \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$$

Приведем еще результаты вычислений для следующих двух случаев внешнего неоднородного поля (G — модуль сдвига, C и D — постоянные):

$$(1) \quad \sigma_{23}^0 = Cx_2, \sigma_{13}^0 = -Cx_1, u_1^0 = u_2^0 = 0 \\ u_3^0 = 1/2 G^{-1} C (x_2^2 - x_1^2)$$

$$(2) \quad \sigma_{23}^0 = Dx_1, u_1^0 = -1/2 G^{-1} D x_2 x_3 \\ u_2^0 = 1/2 G^{-1} D x_1 x_3, u_3^0 = 1/2 G^{-1} D x_1 x_2$$

В обоих этих случаях будет $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$.

Согласно основному правилу Γ -интегрирования [10—14], движущая сила равна нулю также в тех случаях, когда внешние напряжения представляют собой степенные функции x_1, x_2, x_3 второго и более высокого порядков.

Общий случай произвольного неоднородного поля внешних напряжений $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3)$ получается, как можно показать, линейной суперпозицией рассмотренных основных частных случаев (после разложения в ряд Тейлора функций σ_{ij}^0).

Приведем окончательный общий результат

$$(1.7) \quad \Gamma_k = \lambda_1 E^{-1} \Delta \sigma / \partial x_k \quad (k = 1, 2, 3) \\ \Delta = q a^3, \sigma = \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0, \lambda_1 = 2\pi (1 - v)$$

Таким образом, движущая сила, действующая на включение, прямо пропорциональна градиенту первого инварианта тензора внешних напряжений $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3)$. Формула (1.7) является аналогом формул Пича — Келера (в теории дислокаций) и Ирвина (в теории трещин), она может быть выведена также из выражения (8.9) и первого уравнения п. б § 5 работы [2].

Рассмотрим при помощи (1.7) несколько основных задач.

Взаимодействие включений. Пусть одно из включений находится в центре координат. Согласно (1.1), в создаваемом им поле напряжений $\sigma = 0$. Поэтому на основании (1.7) включения не взаимодействуют между собой.

Взаимодействие включений с краевой дислокацией. Эта задача рассмотрена в книге [3] энергетическим методом; результаты, естественно, совпадают, но силовой подход, как видно, значительно проще. Пусть линия краевой дислокации совпадает с осью x_3 , а ее вектор Бюргерса величины B направлен вдоль оси x_1 . Величина σ для такой дислокации равна

$$(1.8) \quad \sigma = \frac{BE x_2}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)}$$

Поместим в точку (x_1, x_2) некоторое включение и вычислим действующую на него движущую силу по формулам (2.7) и (2.8)

$$(1.9) \quad \Gamma_1 = - \frac{\lambda_1 \Delta B x_1 x_2}{\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{\lambda_1 \Delta B (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Траектория подвижного включения является решением уравнения

$$(1.10) \quad dx_2/dx_1 = \Gamma_2/\Gamma_1 = (x_2^2 - x_1^2)/(2x_1x_2)$$

Общее решение уравнения (1.10) имеет вид

$$(1.11) \quad x_1^2 + x_2^2 = Cx_1 \quad (C = \text{const})$$

Семейство (1.11) представляет собой множество окружностей, касающихся оси x_2 в начале координат (с центрами на оси x_1); согласно (1.9), движение включения по окружности происходит против часовой стрелки при $x_1 > 0$ и $B > 0$ (и по часовой стрелке при $x_1 < 0$). Таким образом, подвижные включения притягиваются к ядру краевой дислокации со стороны растяжения.

Используя инвариантность Γ -интеграла, можно доказать следующий закон действия и противодействия: если некая сингулярность A вызывает конфигурационную силу Γ , действующую на другую сингулярность B , то на сингулярность A со стороны сингулярности B действует равная по величине и противоположная по направлению конфигурационная сила $-\Gamma$.

Если непрерывное скопление включений распределено в материале, то сила Γ_1 , движущая краевую дислокацию, согласно (1.9) и закону действия и противодействия, будет равна

$$(1.12) \quad \Gamma_1 = B\tau_\infty + \frac{\lambda_1 \Delta B}{\pi(1-\nu)} \iint \frac{x_1 x_2 N(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\left(\delta = \frac{4}{3} \pi a^3 N \rho_{inc} \right)$$

Здесь τ_∞ — внешнее касательное напряжение в плоскости $x_2 = 0$, N — число включений в единице объема, ρ_{inc} — плотность включения, δ — масса включений в единице объема. Первое слагаемое в (2.12) — сила Пича — Келера, второе — сила, индуцированная скоплением включений.

Взаимодействие включений с трещиной. Пусть включение находится в окрестности фронта трещины нормального разрыва $x_2 = 0$, $x_1 < 0$, $-\infty < x_3 < +\infty$. Полярные координаты включения — r и θ (в плоскости $x_3 = 0$). В этом случае имеем (K_I — коэффициент интенсивности напряжений)

$$(1.13) \quad \sigma = \sqrt{2/\pi} (1 + \nu) K_I r^{-1/2} \cos(\theta/2)$$

Находим составляющие движущей силы в полярных координатах при помощи (1.7) и (1.13)

$$(1.14) \quad \Gamma_r = - \frac{\lambda_1 \Delta (1 + \nu)}{E \sqrt{2\pi}} K_I \frac{\cos \theta/2}{r^{3/2}}, \quad \Gamma_\theta = - \frac{\lambda_1 \Delta (1 + \nu)}{E \sqrt{2\pi}} K_I \frac{\sin \theta/2}{r^{3/2}}$$

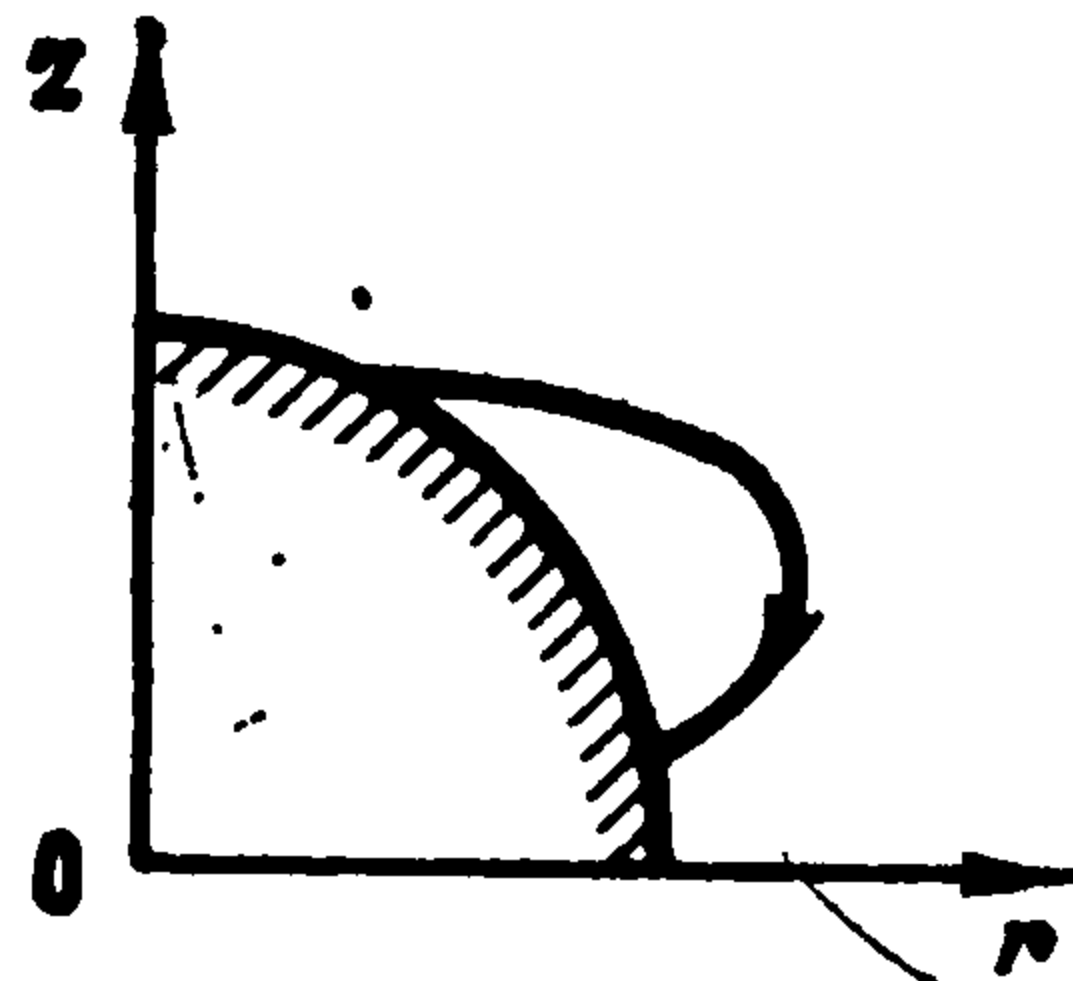
Траектория подвижного включения, согласно (1.14), является решением уравнения

$$rd\theta/dr = \Gamma_\theta/\Gamma_r = \operatorname{tg} \theta/2$$

Отсюда семейство траекторий будет следующим (кардиоиды):

$$\sqrt{r} = C \sin \theta/2 \quad (C = \text{const})$$

Это замкнутые овалы, симметричные относительно оси x_1 и имеющие внутреннюю точку возврата в начале координат; движение включений по ним происходит по часовой стрелке при $x_2 > 0$ (и против часовой стрелки при $x_2 < 0$). Таким образом, включения притягиваются к концу трещины на ее продолжении (т. е. к области предразрушения).



Фиг. 1

Согласно закону действия и противодействия, на основании (1.14) движущая сила фронта трещины при наличии непрерывного скопления неподвижных включений в материале равна

$$(1.15) \quad \Gamma_1 = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 + \frac{\lambda_1 \Delta (1 + \nu) K_I}{E \sqrt{2\pi}} \iint \frac{N(r, \theta)}{r^{3/2}} \cos \frac{3\theta}{2} dr d\theta$$

$$(\Gamma_1 = \Gamma_r \cos \theta - \Gamma_\theta \sin \theta)$$

Первое слагаемое в (1.15) — сила Ирвина (от внешней нагрузки), второе — сила, индуцированная скоплением включений.

Взаимодействие включения со сферической полостью. Пусть бесконечное пространство со сферической полостью радиуса R_a подвергается одноосному растяжению напряжением $\sigma_z = p$. Центр сферы совпадает с началом цилиндрических координат rz , поверхность полости свободна от внешних нагрузок. В этом случае сумма нормальных напряжений σ в упругом теле равна [17]

$$(1.16) \quad \sigma = p + \frac{5p(1 + \nu)}{7 - 5\nu} R_a^3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{R^3} = p + 5pR_a^3 \frac{1 + \nu}{7 - 5\nu} \frac{r^2 - 2z^2}{R^5}$$

$$(R^2 = r^2 + z^2)$$

Пусть в некоторой точке тела находится включение, на которое, согласно (1.7) и (1.16), действует движущая сила с компонентами

$$\Gamma_r = \frac{15\lambda_1 \Delta p (1 + \nu)}{E (7 - 5\nu)} \frac{rR_a^3 (4z^2 - r^2)}{R^7}$$

$$\Gamma_z = \frac{15\lambda_1 \Delta p (1 + \nu)}{E (7 - 5\nu)} \frac{zR_a^3 (2z^2 - 3r^2)}{R^7}$$

Скорость движущегося включения имеет то же направление, что и движущая сила; поэтому траектория включения — интегральная кривая следующего уравнения:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r(4z^2 - r^2)}{z(2z^2 - 3r^2)}$$

Траектории движения включений качественно изображены на фиг. 1. Как видно, включения перемещаются в наиболее напряженную зону рас-

тягивающих напряжений вблизи полости (упрочняющий эффект включений).

Континуальная теория включений. Пусть твердое тело содержит очень большое число (облако или скопление) малых включений. В рассматриваемом асимптотическом приближении включения можно считать невзаимодействующими. Внешние напряжения будем считать достаточно низкими, так что движение включений будет докритическим.

Скорость дрейфа включений v_d будем полагать (как обычно в линейной теории диффузии) прямо пропорциональной движущей силе Γ [12, 18], т. е. $v_d = \eta\Gamma$, где η — эмпирический коэффициент подвижности включений. При этом уравнение массотранспорта включений будет иметь вид

$$(1.17) \quad \partial\delta/\partial t = (D\delta_{,k})_{,k} - (\eta E^{-1}\lambda_1\Delta\delta\sigma_{,k})_{,k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Здесь D — коэффициент самодиффузии включений, t — время, $\delta(t, x_1, x_2, x_3)$ — масса включений в единице объема. Постоянные η , Δ и D зависят от температуры тела.

Уравнение (1.17) можно записать для включений одного и того же сорта, имеющих одинаковые коэффициенты D , η и Δ . Общее число уравнений равно числу сортов.

Влияние других внешних полей (например, электрического, теплового, химического) на движение включений рассматривается известными методами [12, 18]; при этом в уравнении (1.17) появляются дополнительные слагаемые [19].

Приведем простейший пример решения уравнения (1.17). Пусть полоса $0 < x_1 < d$ подвергнута чистому изгибу моментом M (на единицу длины). Тогда из упругого решения следует, что $\sigma_{,2} = \sigma_{,3} = 0$, $\sigma_{,1} = -12(1 + \nu)Md^{-3}$. Равновесная концентрация включений, устанавливающаяся в полосе под действием изгиба, определяется решением уравнения (1.17) при $\partial\delta/\partial t = 0$. Кроме того, для равновесного распределения подвижных включений, когда поток включений равен нулю, очевидно, должно выполняться условие $\delta = 0$ при $x_1 = d$, так как из физических соображений всегда $\delta \geq 0$. Находим

$$(1.18) \quad \delta = -C_0(e^{-\mu d} - e^{-\mu x_1}), \quad \mu = \frac{12(1 + \nu)\eta\lambda\Delta M}{EDd^3}$$

Постоянная C_0 определяется, если известна общая масса подвижных включений m_0 . Имеем

$$C_0 = \mu m_0 [1 - (1 + \mu d)e^{-\mu d}]^{-1} \left(\int_0^d \delta dx_1 = m_0 \right)$$

Решение (1.18) позволяет, например, предсказать распределение свойств материала по толщине полосы, если известна зависимость соответствующего свойства от концентрации включений.

2. Точечные дефекты типа дырок. К точечным дефектам типа дырок относятся вакансии в решетке кристалла, различные поры и пустоты. При достаточно малых размерах (или при наличии каналов в структуре материала) они способны к движению относительно решетки под действием самодиффузии и внешних нагрузок.

Дефекты типа дырок будем моделировать сферической полостью радиуса r_0 , поверхность которой свободна от внешних нагрузок. Будем считать, что расстояние между дырками R гораздо больше r_0 (практически достаточно $R > 4r_0$, т. е. относительная пористость рассматриваемого материала должна быть меньше 0,07). В этом допущении дырка является источником асимптотически сингулярного возмущения (порядка $O(R^{-2})$ в перемещениях) и ее можно рассматривать как некую «квазичастицу»

[12—16]. На дырку, как и на любой источник возмущения, действует движущая (конфигурационная) сила Γ ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$), компоненты которой определяются формулой (0.1).

В физической литературе (например, [1—7]) вакансии и микропоры описывают формулами (1.1) при $q < 0$. Тем самым микропора считается центром сжатия с заданным коэффициентом при особенности, не зависящим от внешнего поля. Это соответствует действительности лишь в случае всестороннего равномерного сжатия q , однако и в этом случае коэффициент при особенности qr_0^3 определяется внешним полем. Представляется, что развитая ниже модель индуцируемой полем сложной сингулярности типа дырки более адекватна действительности.

Перемещения u_r и u_z , возникающие при растяжении упругого пространства со сферической полостью радиуса r_0 , будут следующими [17]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_r &= -\frac{\nu p}{E} r + \frac{p r r_0^3}{4 G R^3} \left[-\frac{z^2}{R^2} - \frac{4-10\nu}{7-5\nu} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3r_0^2 - (2+5\nu)R^2}{(7-5\nu)R^2} \left(1 - \frac{5z^2}{R^2} \right) \right] \\ u_z &= \frac{p}{E} z + \frac{p z r_0^3}{4 G R^3} \left[2 - \frac{z^2}{R^2} - \frac{4-10\nu}{7-5\nu} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2+5\nu)R^2 - 3r_0^2}{(7-5\nu)R^2} \left(-3 + \frac{5z^2}{R^2} \right) \right] \\ (R^2 &= r^2 + z^2) \end{aligned}$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты с центром в центре сферы, p — величина растягивающего напряжения σ_z (вдоль оси z).

Напряжения определяются из (2.1) законом Гука [20].

Воспользуемся инвариантностью Γ_k относительно Σ и стянем Σ на поверхность сферической полости; отсюда на основании (0.1) и (2.1) видно, что $\Gamma_k = 0$. Можно доказать также следующий общий результат: в случае произвольного однородного внешнего поля напряжений движущая сила, действующая на полость произвольной формы, равна нулю (аналог парадокса Даламбера — Эйлера в гидродинамике).

Допустим теперь, что внешнее (невозмущенное) поле имеет еще неоднородную составляющую $\sigma_{33}^0 = Ax_1$, причем $Ar_0 \ll p$; ей соответствует следующее поле перемещений:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_1^0 &= -\frac{1}{2} \nu A E^{-1} \left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{\nu} x_3^2 \right), \quad u_2^0 = -\nu A E^{-1} x_1 x_2. \\ u_3^0 &= A E^{-1} x_1 x_3 \quad (x_3 = z, x_1^2 + x_2^2 = r^2) \end{aligned}$$

Воспользовавшись инвариантностью Γ -интеграла (0.1), в качестве Σ возьмем параллелепипед: $x_3 = \pm\delta$, $x_1 = \pm L$, $x_2 = \pm L$ при $\delta/L \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$.

Отсюда по правилу Γ -интегрирования имеем [12—16]

$$(2.3) \quad \Gamma_1 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_{33}^0 u_{3,1}^s + \sigma_{33}^s u_{3,1}^0 + \sigma_{23}^s u_{2,1}^0 + \sigma_{13}^s u_{1,1}^0) dx_1 dx_2$$

при $x_3 = \delta \rightarrow \infty$

Сингулярное поле возмущения (с индексом s) определяется при помощи формул (2.1). В результате вычислений, аналогичных п. 1, получаем значение движущей силы

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \lambda_2 E^{-1} p A r_0^3 \quad (\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0) \\ \lambda_2 &= \frac{10\pi}{7-5\nu} \left[12\nu^2 - 4\nu + \frac{\pi(1+\nu)}{160} (123 - 180\nu) \right] \end{aligned}$$

Как видно, движущая сила прямо пропорциональна внешнему напряжению и его градиенту.

Рассмотрим теперь общий случай произвольного неоднородного поля внешних напряжений $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющего условию $|\sigma_{ij}^0| \gg \gg r_0 |\sigma_{ij,k}^0|$. Коэффициенты при сингулярности типа дырки в этом случае будут прямо пропорциональны напряжениям σ_{ij}^0 в том месте, где находится дырка, а движущая сила, как вытекает из правила Г-интегрирования, будет прямо пропорциональна напряжениям σ_{ij}^0 и их градиентам $\sigma_{ij,k}^0$ в том же месте. Следовательно, энергия взаимодействия дырки с внешним полем напряжений будет квадратичной функцией напряжений; в общем случае анизотропного тела и дырок произвольной конфигурации она равна

$$(2.5) \quad U = C_{ijmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn} \quad (\Gamma_k = -\partial U / \partial x_k)$$

(C_{ijmn} — постоянные, Γ_k — компоненты движущей силы).

В изотропном случае (сферическая дырка и изотропное упругое тело) энергия U может зависеть лишь от первого и второго инвариантов тензора напряжений σ и I в данной точке; следовательно, ее можно записать так (α и β — некоторые постоянные):

$$(2.6) \quad \begin{aligned} U &= E^{-1} r_0^3 (\alpha \sigma^2 + \beta I) \quad (\Gamma_k = -\partial U / \partial x_k) \\ \sigma &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0 \\ I &= \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^0 \sigma_{33}^0 + \sigma_{11}^0 \sigma_{33}^0 - (\sigma_{12}^0)^2 - (\sigma_{13}^0)^2 - (\sigma_{23}^0)^2 \end{aligned}$$

Определим постоянные α и β . В случае всестороннего равномерного растяжения $\sigma_{ij}^0 = 1/3 \sigma \delta_{ij}$ ($\sigma > 0$) дырка ведет себя, очевидно, как центр сжатия (1.1), а энергия взаимодействия ее с внешним полем согласно (1.7) будет равна $-\lambda_1 \sigma^2 r_0^3 / (6E)$. Отсюда при помощи (2.6) получаем

$$(2.7) \quad 3\alpha + \beta = -\pi (1 - \nu)$$

В другом изученном случае, когда $\sigma_{33}^0 = p$, $\sigma_{33,1}^0 = A$, а все остальные напряжения равны нулю, согласно (2.4) энергия взаимодействия будет равна $-\lambda_2 x_1 E^{-1} p A r_0^3$, а согласно (2.6) — $2\alpha E^{-1} p A x_1 r_0^3$. Следовательно, $\alpha = -1/2 \lambda_2$ и с учетом (2.7) имеем

$$(2.8) \quad \alpha = -1/2 \lambda_2, \quad \beta = 3/2 \lambda_2 - \pi (1 - \nu) \quad (\alpha < 0, \beta > 0)$$

Зависимости (2.5) и (2.6) для силы, движущей индуцированную полем сингулярность типа дырки, являются аналогом формулы Пича — Келера в теории дислокаций и формулы Ирвина в теории трещин. Согласно этим зависимостям, движущая сила старается передвинуть дырку в более напряженную зону (независимо от знака напряжений). Таким образом, поведение дырки иногда даже качественно отлично от поведения модельной вакансии, принятой в физической литературе и описываемой формулами (1.1) при заданном $q < 0$. Например, при состоянии, близком к всестороннему растяжению, дырка ведет себя скорее как включение.

Континуальная теория дырок. Пусть сплошной упругий материал содержит очень большое число малых дырок, которое можно описать непрерывным распределением скопления (или облака) дырок. Сопротивление движению дырки зависит от свойств материала, размеров и формы дырки. Движение дырки будем считать докритическим и происходящим под действием внешних напряжений и тепловых флуктуаций (взаимодействием дырок пренебрегаем).

Поток дырок, очевидно, равносителен потоку вещества (в противоположном направлении). Поэтому диффузия дырок приводит к следующему

уравнению массопереноса:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \partial \varepsilon / \partial t &= (D \varepsilon_{,k})_{,k} + (\eta \varepsilon U_{,k})_{,k} \\ (\varepsilon &= (\rho_0 - \rho) / \rho_0, \Gamma_k = -U_{,k}, v_d = \eta \Gamma) \end{aligned}$$

Здесь t — время, ε — пористость, $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ — искомая макроскопическая плотность материала, D — коэффициент самодиффузии дырок, η — коэффициент дрейфа дырок, ρ_0 — плотность материала без дырок. Второй член в правой части (2.9) получен при помощи (2.5) на основании обычного допущения о том, что скорость дрейфа дырок прямо пропорциональна движущей силе [12].

К уравнению (2.9) следует присовокупить уравнения теории упругости

$$(2.10) \quad \sigma_{ij}^0 = 0, \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^0 - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^0 \delta_{ij}$$

Для пористого тела естественно принять «правило смесей» [15]

$$(2.11) \quad E = E_{\max} \rho / \rho_{\max}$$

Замкнутая система уравнений (2.9)—(2.11) позволяет изучать эволюцию скопления (облака) дырок и постепенного образования ослабленных трещиноподобных зон высокой пористости.

Взаимодействие дырок с фронтом трещины. Пусть дырка радиуса r_0 находится в некоторой окрестности фронта трещины нормального разрыва $\theta = \pi$, $0 < r < \infty$, $-\infty < z < \infty$ (r, θ, z — цилиндрические координаты). Поле напряжений будет следующим:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sigma_r^0 &= K_I (2\pi r)^{-1/2} (\cos \theta/2 + 1/2 \sin \theta \sin \theta/2) \\ \sigma_\theta^0 &= K_I (2\pi r)^{-1/2} (\cos \theta/2 - 1/2 \sin \theta \sin \theta/2) \\ \tau_{r\theta}^0 &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \sin \theta \cos \theta/2, \quad \sigma_z = 2\nu K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \theta/2 \end{aligned}$$

Компоненты движущей силы согласно (2.6) будут такими:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \Gamma_r &= -\partial U / \partial r, \quad \Gamma_\theta = -r^{-1} \partial U / \partial \theta \\ U &= r_0^3 K_I^2 (2\pi E r)^{-1} \cos^2 \theta/2 [4\alpha (1 + \nu)^2 + \beta (4\nu + \cos^2 \theta/2)] \\ \sigma &= 2(1 + \nu) K_I (2\pi r)^{-1/2} \cos \theta/2, \quad I = K_I^{-2} (2\pi r)^{-1} \cos^2 \theta/2 (4\nu + \cos^2 \theta/2) \end{aligned}$$

Вычисляем при помощи (2.12) и (2.13) (r, θ — координаты дырки):

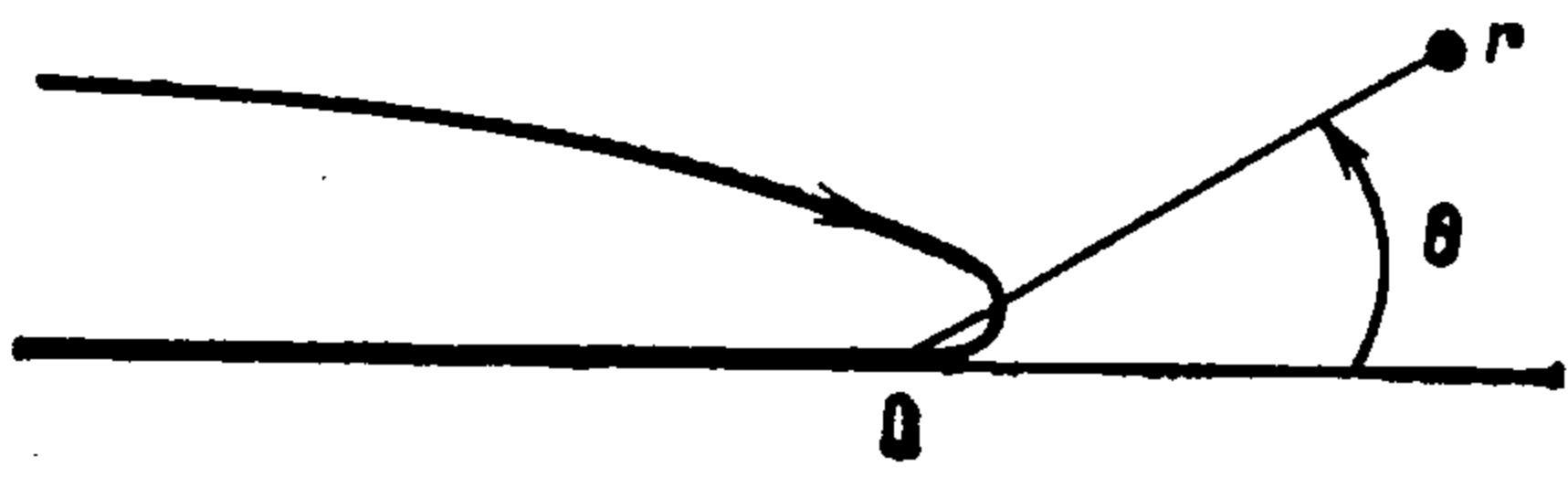
$$(2.14) \quad \begin{aligned} \Gamma_r &= r_0^3 K_I^2 (2\pi E r^2)^{-1} \cos^2 \theta/2 [4\alpha (1 + \nu)^2 + \beta (4\nu + \cos^2 \theta/2)] \\ \Gamma_\theta &= r_0^3 K_I^2 (2\pi E r^2)^{-1} \sin \theta [2\alpha (1 + \nu)^2 + \beta (2\nu + \cos^2 \theta/2)] \end{aligned}$$

Как видно, величина Γ_r отрицательна при всех θ в диапазоне $0 < \theta < \pi$, т. е. дырка всегда притягивается к концу трещины. Траектория подвижной дырки качественно изображена на фиг. 2.

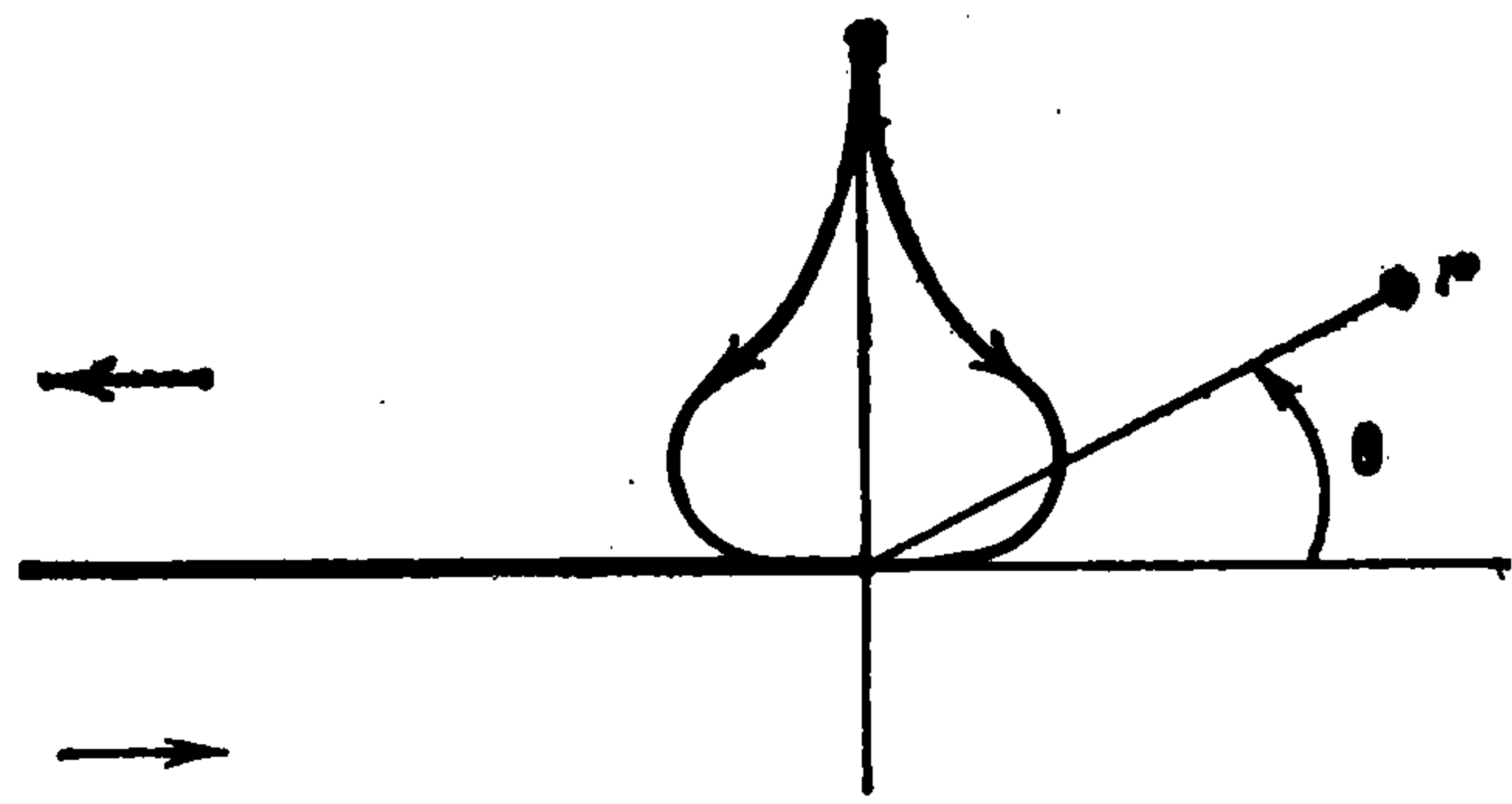
Семейство траекторий определяется интегрированием уравнения

$$v_r/v_\theta = d \ln r / d\theta = \Gamma_r/\Gamma_\theta$$

В зависимости от относительного размера подвижных дырок r_0 и раскрытия трещины в ее конце $2\delta_0$ стекание дырок в конец трещины может привести или к торможению трещины или к уменьшению сопротивления и даже к докритическому росту трещины. Кроме того, наличие дырок приводит к изменению движущей силы фронта трещины. Пусть облако дырок распределено в материале, так что в единице объема находится N дырок (при этом пористость материала равна $\varepsilon = 4/3\pi N r_0^3$). Суммируя силы,



Фиг. 2



Фиг. 3

индуцируемые внешней нагрузкой и дырками, имеем

$$(2.15) \quad \Gamma = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 - \int_{\delta_0}^L \int_{-\pi}^{\pi} N (\Gamma_r \cos \theta - \Gamma_\theta \sin \theta) r dr d\theta$$

Здесь Γ — сила, движущая трещину, L — характерная длина трещины (или тела). Первое слагаемое в (2.15) — сила Ирвина (от внешней нагрузки), второе — сила, индуцированная облаком дырок.

В случае равномерного распределения дырок, когда N и ϵ не зависят от r и θ , при помощи (2.14) можно найти, что второе слагаемое в (2.15) равно нулю.

Взаимодействие дырок с дислокацией. Пусть дырка радиуса r_0 находится в поле действия краевой дислокации

$$(2.16) \quad \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = \frac{BE \sin \theta}{4\pi(1 - \nu^2)r}, \quad \tau_{r\theta}^0 = -\frac{BE \cos \theta}{4\pi(1 - \nu^2)r}, \quad \sigma_z^0 = 2\nu\sigma_r^0$$

Здесь B — величина вектора Бюргерса; остальные обозначения прежние.

При помощи (2.13) и (2.16) вычисляем составляющие силы, движущие дырку (r, θ — координаты дырки)

$$(2.17) \quad \Gamma_r = \frac{B^2 E r_0^3}{8\pi^2(1 - \nu^2)^2 r^3} \{2 \sin^2 \theta [2\alpha(1 + 2\nu) + \beta(1 + 2\nu)] - \beta\}$$

$$\Gamma_\theta = -\frac{B^2 E r_0^3}{8\pi^2(1 - \nu^2)^2 r^3} \sin 2\theta [2\alpha(1 + \nu)^2 + \beta(1 + 2\nu)]$$

Как видно, дырка всегда притягивается к ядру дислокации.

Траектория подвижной дырки согласно (2.17) имеет вид, качественно изображенный на фиг. 3.

Если облако дырок распределено в материале, то сила Γ , движущая краевую дислокацию, будет равна

$$(2.18) \quad \Gamma = B\tau_\infty - \int_{r_d}^L \int_{-\pi}^{\pi} r N (\Gamma_r \cos \theta - \Gamma_\theta \sin \theta) dr d\theta$$

Здесь r_d — радиус ядра дислокации, L — характерная длина тела, τ_∞ — внешнее касательное напряжение в плоскости дислокации. Первое слагаемое — сила Пича — Келера, второе — сила, индуцированная облаком дырок. В случае равномерного распределения дырок второе слагаемое равно нулю.

Предлагаемый силовой подход — чисто асимптотический, поэтому полученные формулы справедливы также для пластических и конечных деформаций, если область нелинейности вблизи поры мала по сравнению с расстоянием между порами, а также с расстоянием между рассматриваемой порой и другими источниками возмущений [19].

Автор благодарит Р. В. Гольштейна за внимательное прочтение рукописи и проверку вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eshelby J. D.* The force on an elastic singularity.— *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 1951, A244, No. 1, p. 87—112.
2. *Эшелби Дж. Д.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 247 с.
3. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Мир, 1968. 640 с.
4. *Hirth J., Lothe J. P.* Theory of dislocations. N. Y.: McGraw-Hill, 1968, 720 p.
5. *Lardner R. W.* Mathematical theory of dislocations and fracture. Toronto: University of Toronto Press, 1974. 364 p.
6. *Косевич А. М.* Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наук. думка, 1981. 328 с.
7. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 292 с.
8. *Rice J. R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.— *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1968, v. 35, p. 379—392.
9. *Landes J. D., Begley J. A.* The J-integral as a fracture criterium.— In: *Fracture Toughness*, ASTM STP No. 514. Philadelphia, 1972, p. 1—23.
10. *Черепанов Г. П.* Распространение трещин в сплошной среде.— *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 3, с. 476—488.
11. *Cherapanov G. P.* Cracks in solids.— *J. Solids and Structures*, 1968, No. 4, p. 811—831.
12. *Cherapanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. N. Y.: McGraw-Hill, 1979. 950 p.
13. *Черепанов Г. П.* Инвариантные Γ -интегралы и некоторые их приложения в механике.— *ПММ*, 1977, т. 41, вып. 3, с. 399—412.
14. *Cherapanov G. P.* Invariant Γ -integrals.— *Engng Fract. Mech.* 1981, v. 14, No. 1, p. 39—58.
15. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 300 с.
16. *Черепанов Г. П.* Об образовании и развитии трещин в твердых телах в условиях ползучести.— В кн.: *Нелинейные проблемы механики твердого деформируемого тела (К 70-летию академика Ю. Н. Работнова)*. М.: Наука, 1984, с. 250.
17. *Блох В. И.* Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964. 620 с.
18. *Старк Дж. П.* Диффузия в твердых телах. М.: Энергия, 1980. 240 с.
19. *Cherapanov G. P.* Plasticity and creep mechanics from the viewpoint of the theory of elasticity,— In: *Fundamentals of Deformation and Fracture. Proc. of the Eshelby memorial symposium*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
20. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1983