

УДК 539.374 : 534.1

О ПРЕЛОМЛЕНИИ ВОЛНЫ СДВИГА В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЕ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Быковцев А. Г.

Рассматриваются динамические уравнения для антиплоской деформации в нелинейно-упругой среде. Анализируются автомодельные решения, когда скорости перемещений и напряжения зависят от двух переменных $x = x_1 - ct$, $y = x_2$. В предельном случае, когда диаграмма $\tau - \gamma$ для нелинейно-упругого материала совпадает с идеально упругопластической, строится решение задачи о преломлении плоскополяризованных плоских волн чистого сдвига в нелинейно-упругое полупространство. Проводится сравнение полученных результатов с ранее построенным решением [1], в котором при изучении преломления волн чистого сдвига в упругопластическое полупространство использовалась система уравнений Прандтля — Рейсса.

Автомодельные задачи, когда скорости перемещений и напряжения зависят только от отношения координат, исследовались в работах [2—7].

1. Рассмотрим динамическую задачу теории сложного сдвига в нелинейно-упругой среде. В декартовой системе координат x_i векторы перемещения u и скорости перемещения w направлены вдоль оси x_3 и зависят только от x_1 , x_2 и времени t . Все компоненты тензора напряжений обращаются в нуль, кроме $\tau_1 = \sigma_{13}(x_1, x_2, t)$ и $\tau_2 = \sigma_{23}(x_1, x_2, t)$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Рассмотрим автомодельные решения уравнения (1.1), которые зависят только от $x = x_1 - ct$, $y = x_2$.

Соотношения нелинейной теории упругости для антиплоской деформации принимают вид

$$(1.2) \quad \tau_1 = f(\gamma) u_{,x}, \quad \tau_2 = f(\gamma) u_{,y}, \quad \gamma = \sqrt{(u_{,x})^2 + (u_{,y})^2}$$

Соотношения деформационной теории пластичности [8] совпадают с уравнениями (1.2) при активном нагружении $\gamma_{,t} \geq 0$ и отличаются от них при разгрузке, когда $\gamma_{,t} < 0$. По деформационной теории при разгрузке τ и γ связаны линейным законом.

Из соотношений (1.1) и (1.2) следует, что перемещение u удовлетворяет нелинейному волновому уравнению

$$(1.3) \quad \gamma f(\gamma) (u_{,xx} + u_{,yy}) + f'(\gamma) (u_{,xx} (u_{,x})^2 + 2u_{,xy} u_{,x} u_{,y} + u_{,yy} (u_{,y})^2) - \gamma \rho c^2 u_{,xx} = 0$$

Последнее соотношение (1.2) будет выполнено тождественно, если положить

$$(1.4) \quad u_{,x} = \gamma \sin \theta, \quad u_{,y} = \gamma \cos \theta$$

Подставляя эти выражения в соотношение (1.3) и записывая полученное уравнение вместе с условием совместности деформаций, для определения γ и θ получаем систему уравнений

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \gamma_x (f(\gamma) + \gamma f'(\gamma) - \rho c^2) \sin \theta + \gamma_y (f(\gamma) + \gamma f'(\gamma) \cos \theta + \\ + \theta_{,x} \gamma (f(\gamma) - \rho c^2) \cos \theta - \theta_{,y} \gamma f(\gamma) \sin \theta = 0 \\ \gamma_{,x} \cos \theta - \gamma_{,y} \sin \theta - \theta_{,x} \gamma \sin \theta - \theta_{,y} \gamma \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Система уравнений (1.5) гиперболического типа при

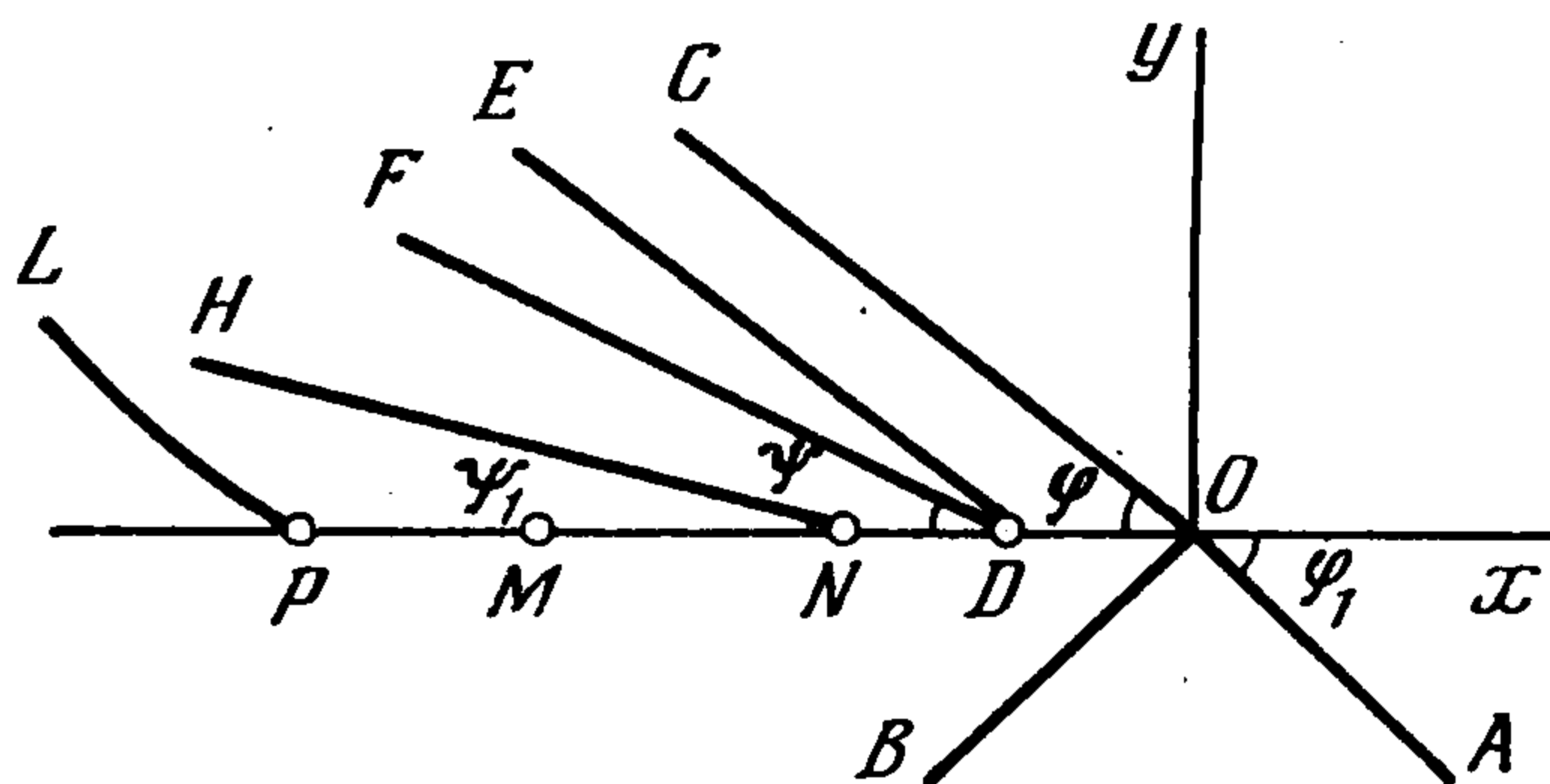
$$f(\gamma)(\rho c^2 - \gamma f'(\gamma) + f(\gamma)) + \gamma f'(\gamma) \rho c^2 \cos^2 \theta = r^2 > 0$$

Характеристики и соотношения вдоль характеристик для нее имеют вид

$$(1.6) \quad dy (\gamma f'(\gamma) \sin^2 \theta + f(\gamma) - \rho c^2) = dx (\gamma f'(\gamma) \sin \theta \cos \theta \pm r)$$

$$(1.7) \quad d\theta \gamma (\rho c^2 \cos^2 \theta - f(\gamma)) + d\gamma (\rho c^2 \cos \theta \sin \theta \pm r) = 0$$

2. Рассмотрим предельный] случай, когда диаграмма $\tau - \gamma$ для нелинейно-упругого материала совпадает с идеально упругопластической, т. е. функция $f(\gamma)$ имеет точку излома. В этом случае полученные соотношения будем использовать для исследования преломления плоскополя-



Фиг. 1

ризованных волн сдвига, проходящих из упругого полупространства с параметрами $\mu_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ в упругопластическое полупространство (УПП) с параметрами $\mu_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}, k$. Для предельной модели нелинейно-упругого тела в упругой области $f(\gamma) = \mu = \text{const}$, в пластической области должно выполняться условие текучести $\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2$, откуда следует: $f(\gamma) = k\gamma^{-1}$.

Пусть на поверхность раздела $y = 0$ падает плоская волна OA (фиг. 1). Уравнение фронта падающей волны в любой момент времени имеет вид $y \cos \varphi_1 + x \sin \varphi_1 = -\omega_1 = \text{const}$. За фронтом падающей волны имеют место соотношения] (φ_1 — угол падения)

$$(2.1) \quad \tau_i = \tau_i(\omega_1), \quad i = 1, 2, \quad w = w_2(\omega_1), \quad w = u_{,t} = -c\gamma \sin \theta$$

Уравнение фронта отраженной волны имеет вид $y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1 = \omega_2 = \text{const}$. За фронтом отраженной волны в упругом полупространстве решение получается сложением решения (2.1) с решением для отраженной волны, которое имеет вид

$$(2.2) \quad \tau_i = \tau_i(\omega_2), \quad i = 1, 2, \quad w = w_2(\omega_2)$$

Уравнение фронта преломленной волны в любой момент времени имеет вид $y \cos \varphi + x \sin \varphi = \omega = \text{const}$. За фронтом преломленной волны в УПП имеют место соотношения

$$(2.3) \quad \tau_i = \tau_i(\omega), \quad i = 1, 2, \quad w = w(\omega)$$

(φ — угол преломления, такой, что $a_1 \sin \varphi = a_2 \sin \varphi_1$).

Из уравнений (1.1), (2.3) следует, что за фронтом преломленной волны в упругой области

$$(2.4) \quad \tau_1 = \mu_2 \gamma \sin \theta, \quad \tau_2 = \mu_2 \text{ctg} \varphi \gamma \sin \theta$$

Из уравнений (1.1), (2.1), (2.2) имеем

$$(2.5) \quad \tau_1(\omega_i) = -\mu_1 c^{-1} w_i(\omega_i), \quad \tau_2(\omega_i) = (-1)^i \mu_1 c^{-1} \text{ctg} \varphi_1 w_i(\omega_i) \\ i = 1, 2$$

На границе раздела $y = 0$ нормальное напряжение τ_2 и скорость перемещений w предполагаются непрерывными, откуда следует

$$(2.6) \quad w(x) = w_1 + w_2, \quad \tau_2(x) = \mu_1 c^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_1 (w_2 - w_1) \\ w_i = w_i(-x \sin \varphi_1), \quad i = 1, 2$$

Здесь $w(x)$ — скорость перемещения, $\tau_2(x)$ — напряжение на границе раздела в УПП. Исключая в уравнениях (2.6) функцию $w_2(-x \sin \varphi_1)$, получаем краевое условие для УПП в виде

$$(2.7) \quad 2 w_1(-x \sin \varphi_1) = w(x) - c \mu_1^{-1} \operatorname{tg} \varphi_1 \tau_2(x)$$

В дальнейшем предполагается, что функция $w_1(\omega_1)$ задана, т. е. профиль и интенсивность падающей волны известны.

Рассмотрим преломленную волну в УПП. Перед фронтом преломленной волны OC материал предполагается покоящимся $w = u = \tau_1 = \tau_2 = 0$, т. е. в окрестности OC материал будет находиться в упругом состоянии. На линии OC имеем $\gamma = 0$ и из равенств (1.6), (1.7) имеем

$$(2.8) \quad x - \kappa y = \operatorname{const}, \quad \gamma (\cos \theta - \kappa \sin \theta) = 0$$

$$(2.9) \quad x + \kappa y = \operatorname{const}, \quad \gamma (\cos \theta + \kappa \sin \theta) = \operatorname{const} \\ (\kappa = \sqrt{M^2 - 1}, \quad M = ca_2^{-1} \text{ — число Маха})$$

В правой части второго соотношения (2.8) постоянная одна и та же для всех характеристик, поэтому его следует рассматривать как интеграл уравнений движения в упругой области. Используя соотношения (2.8), условие на границе (2.7) можно представить в виде

$$(2.10) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = -c\gamma \sin \theta \left(1 + \frac{\mu_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\mu_1 \operatorname{tg} \varphi} \right)$$

Из интегралов (2.8), (2.9) следует, что в упругой области θ принимает постоянное значение, а величина γ остается постоянной вдоль характеристик (2.9), отсюда следует, что предел текучести будет достигаться сразу на всей характеристике, если он достигнут хотя бы в одной точке.

Условие достижения предела текучести имеет вид

$$(2.11) \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2 = \mu_2^2 \gamma^2, \quad \gamma = \pm k \mu_2^{-1}$$

Подстановка второго соотношения (2.11) в уравнения (2.4) дает

$$(2.12) \quad \sin \theta = \pm \sin \varphi$$

Прежде чем проводить дальнейшее построение решения, необходимо определить выбор знака в выражениях (2.11), (2.12). Это можно сделать следующим образом. Для рассматриваемой задачи в прямоугольной декартовой системе координат xOy перемещение u и скорость перемещения w в УПП положительны (фиг. 1), в точке O имеем $w = u = 0$. Следовательно, при $x < 0$ имеем $\partial u / \partial x \leq 0$, поэтому из соотношений (1.4) следует, что γ и $\sin \theta$ имеют разные знаки. Из уравнений (2.4) имеем $\tau_1 \leq 0, \tau_2 \leq 0$. В точке D , в которой впервые достигается предел текучести, имеем $\tau_1 = k \sin \theta, \tau_2 = k \cos \theta$. Следовательно, в упругой области $\theta = \pi + \varphi$, а в соотношении (2.11) следует выбирать знак плюс.

Из уравнений (2.10) — (2.12) следует, что материал будет оставаться упругим между характеристиками OC и DE (фиг. 1), пока в некоторой точке границы D не будет достигнуто равенство

$$(2.13) \quad 2|w_1^*(-x \sin \varphi_1)| = \frac{k}{\sqrt{\mu_2 \rho_2}} \left(1 + \frac{\mu_2 \operatorname{tg} \varphi_1}{\mu_1 \operatorname{tg} \varphi} \right)$$

Слева от линии DE материал находится в пластическом состоянии, и из уравнений (1.6), (1.7) имеем

$$(2.14) \quad dy \left(\cos \theta - \Delta \sqrt{\frac{w}{-\sin \theta}} \right) = -\sin \theta dx$$

$$I(0, \theta) - 2\Delta \sqrt{w} = \text{const}$$

$$(2.15) \quad dy \left(\cos \theta + \Delta \sqrt{\frac{w}{-\sin \theta}} \right) = -\sin \theta dx$$

$$I(\theta, \pi + \varphi) + 2\sqrt{M} = 2\Delta \sqrt{w}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{\rho_2 c}{k}}$$

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}}$$

Вследствие того, что на линии DE $w = k(\mu_2 \rho_2)^{-1/2}$, $\theta = \pi + \varphi$ и характеристики (2.15) пересекают линию DE , постоянная в соотношении вдоль характеристики этого семейства одна и та же для всех характеристик, поэтому второе равенство (2.15) следует рассматривать как интеграл уравнений движения в пластической области. Из интегралов (2.14) (2.15) получаем, что вдоль каждой из характеристик семейства (2.14) θ и w остаются постоянными, откуда следует, что характеристики (2.14) прямолинейные. Таким образом, имеем

$$(2.16) \quad y \left(\Delta \sqrt{\frac{w}{-\sin \theta}} - \cos \theta \right) - x \sin \theta = \text{const}$$

$$I(0, \theta) - 2\Delta \sqrt{w} = \text{const}$$

Характеристики (2.16) пересекают линии DE и наклонены к оси x под углом Ψ , для которого

$$\text{tg } \Psi = -\frac{\sin \varphi}{M + \cos \varphi} < \text{tg } \varphi$$

Итак, для уравнений движения в пластической области на линии DE имеем задачу Коши, решая которую, определяем w и θ между характеристикой в упругой области DE и характеристикой в пластической области DF , где $w = k(\mu_2, \rho_2)^{-1/2}$, $\theta = \pi + \varphi$.

Исключая из краевого условия (2.7) при помощи интеграла (2.15) функцию w , получаем

$$(2.17) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = W(\theta) - c\mu_1^{-1} \text{tg } \varphi_1 k \cos \theta$$

$$W(\theta) = \left(\int_{\theta}^{\pi + \varphi} \frac{d\theta}{2\Delta \sqrt{-\sin \theta}} + \frac{\sqrt{M}}{2\Delta} \right)^2$$

Пусть корень этого уравнения $\theta = \theta_1$, тогда из равенства (2.15) получаем значение $w = W(\theta_1)$ на границе раздела $y = 0$.

Значения θ и w остаются постоянными вдоль линии

$$(2.18) \quad y \left(\Delta \sqrt{\frac{w(\theta_1)}{-\sin \theta_1}} - \cos \theta_1 \right) - (x - x_N(\theta_1)) \sin \theta_1 = 0$$

(x_N — координата точки границы, в которой $\theta = \theta_1$). Угол наклона к оси x этой характеристики связан с θ_1 соотношением

$$(2.19) \quad \text{tg } \Psi_1 = -\sin \theta_1 \left(\Delta \sqrt{\frac{w(\theta_1)}{-\sin \theta_1}} - \cos \theta_1 \right)^{-1}$$

Для того чтобы построенное решение имело место, необходимо, чтобы при движении точки N вдоль оси x угол Ψ_1 возрастал и в пластической области выполнялось условие нагружения, которое в рассматриваемом

случае имеет вид

$$(2.20) \quad \gamma_{,t} = -c\gamma_{,x} = -\frac{1}{w(\theta_1)} \frac{\partial w(\theta_1)}{\partial x} + \operatorname{ctg} \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \geq 0$$

Используя интеграл (2.15), условие нагружения можно записать в виде

$$(2.21) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} (\operatorname{ctg} \theta_1 + [\Delta \sqrt{-\sin \theta} (I(\theta_1, \pi + \varphi) + \Delta \sqrt{M})]^{-1}) \geq 0$$

т. е. условие нагружения будет выполнено, пока $\partial \theta_1 / \partial x \geq 0$.

Дифференцируя равенство (2.19) по x , получаем, что угол Ψ_1 будет возрастать при движении вдоль оси x , если

$$(2.22) \quad \left[\frac{3}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{-\sin \theta_1}} \left(\frac{1}{2} I(\theta, \pi + \varphi) + \sqrt{M} \right) \right] \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \geq 0$$

т. е. условие возрастания Ψ_1 будет выполнено, пока $\partial \theta_1 / \partial x \geq 0$.

Так как θ_1 удовлетворяет равенству (2.17), то, дифференцируя последнее по w_1 , имеем

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 \sqrt{-\sin \theta_1} &= \\ &= -\frac{\partial \theta_1}{\partial w_1} \left(\frac{1}{2} I(\theta_1, \pi + \varphi) + \sqrt{M} + \sqrt{-\sin \theta_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \frac{c^2 \rho_2}{\mu_1} \right) \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что с ростом w_1 величина θ_1 убывает, а значит, $\partial \theta_1 / \partial x \geq 0$ и условия (2.21), (2.22) будут выполнены, пока w_1 (ω_1) возрастает с ростом ω_1 . Заметим, что в этом случае вследствие монотонности функций, входящих в уравнение (2.17), последнее будет всегда иметь единственное решение при $\theta \in [\pi, \pi + \varphi]$. Убывая, θ_1 может достигнуть значения π , когда характеристика (2.14) в пластической области станет параллельной оси x . Это произойдет, когда амплитуда падающей волны w_1 достигнет значения

$$(2.23) \quad w_1^0 = \frac{k}{2\sqrt{\mu_1 \rho_1}} \left[\frac{1}{\cos \varphi_1} + \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2} \left(1 + \sqrt{\sin \varphi} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} \right)^2 \right]$$

Пусть это значение достигается в точке M и в дальнейшем, w_1 (ω_1) возрастает, тогда линия MP — характеристика и на ней

$$\theta_1 = \pi, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = -k, \quad w = w_*$$

$$w_* = \frac{1}{4\Delta^2} \left(\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}} + 2\sqrt{M} \right)^2$$

Решение в УПП определяется краевым условием на линии OM . Линия MP — стационарная линия разрыва, на ней претерпевают разрыв скорости перемещения, а из динамических условий совместности на поверхности сильного разрыва следует, что напряжение τ_2 непрерывно на линии MP .

В случае w_1 (ω_1) $>$ w_1^0 условие нагружения (2.21) в пластической области также выполняется, но особо следует рассмотреть это условие при $y = 0$ в зоне проскальзывания. На стационарной линии разрыва скоростей условие нагружения выполняется, если $w_e > w_p$, где w_e — скорость перемещений в упругой области, w_p — в пластической. Из соотношений (2.6) и (2.15) следует, что условие нагружения выполняется при

$$(2.24) \quad 2w_1 (-x \sin \varphi_1) - k (\sqrt{\mu_1 \rho_1} \cos \varphi_1)^{-1} > w_*$$

Таким образом, если профиль падающей волны не превышает w_1^0 , то условие нагружения выполняется, пока w_1 (ω_1) — возрастающая функция, и разгрузка начинается после прохождения максимального значе-

ния профиля. Если профиль падающей волны превышает w_1^0 , то в зоне превышения на линии раздела двух сред наступает проскальзывание (разрыв перемещений). В этом случае условие нагружения будет выполнено, пока профиль превышает w_1^0 , и разгрузка начнется после того, как профиль падающей волны станет меньше w_1^0 .

Отметим, что зона проскальзывания является по терминологии механики разрушения трещиной скольжения, движущейся по границе раздела двух сред. В зоне проскальзывания перемещение u претерпевает сильный разрыв. Существенным является тот факт, что зона проскальзывания, ее образование и развитие описываются уравнениями динамики упругопластических сред, без привлечения физических закономерностей механики разрушения. У конца трещины напряжения и деформации конечны. Таким образом, модель идеально упругопластического тела, по крайней мере в рассматриваемом случае, позволяет провести замкнутое исследование развития трещин скольжения как поверхностей стационарных разрывов.

Представляет интерес сравнение построенного решения с результатами работы [1], в которой задача о преломлении плоскополяризованных плоских волн сдвига на границе упругого и упругопластического полупространства решалась с использованием системы уравнений Прандтля—Рейсса. При $\gamma \leq k\mu_2^{-1}$ решения по модели идеально упругопластического тела (теории пластических течений) и по предельной модели нелинейно-упругого тела (деформационной теории пластичности) совпадают, поэтому в обоих случаях совпадают и упругопластические границы. Различие появляется в пластической зоне, что приводит к разным условиям проскальзывания. Для идеально упругопластической модели это условие имеет вид [1]

$$w_1^0 = \frac{k}{2\sqrt{\mu_1\rho_1}} \left(\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2} (1 + \varphi) + \frac{1}{\cos \varphi_1} \right)$$

Зависимость величины $w_3 = (2\sqrt{\mu_1\rho_1}k^{-1}w_1^0 - (\cos \varphi_1)^{-1}) \rho_2 a_2 / (\rho_1 a_1)$ от угла преломления φ представлена на фиг. 2 по модели идеально упругопластического тела (кривая 1) и по предельной модели нелинейно-упругого тела (кривая 2).

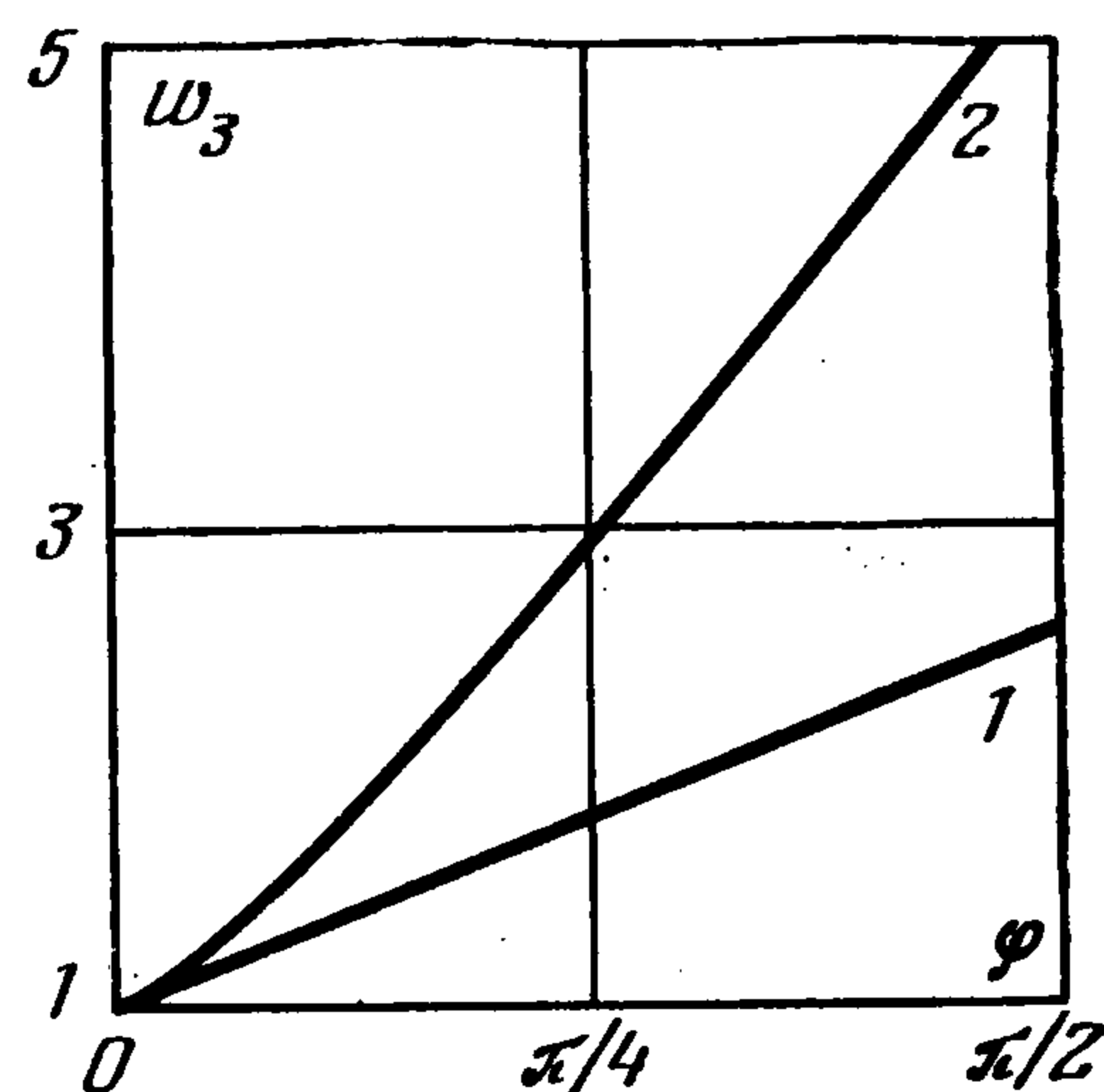
Следует также отметить, что при проскальзывании различаются и координаты точки границы x_p , из которой начинается распространение волны разгрузки, получаемые при использовании этих моделей.

3. Рассмотрим распространение волны разгрузки (ВР). Заметим, что если разгрузка проводится по модели нелинейно-упругого тела, то в этом случае вследствие того, что при уменьшении функции $w_1(\omega_1)$ угол θ будет увеличиваться, а значит, в зоне разгрузки будет увеличиваться угол наклона характеристик (2.14) к оси x , произойдет образование ударной ВР.

В дальнейшем будем следовать деформационной теории пластичности, т. е. предположим, что разгрузка происходит по линейному закону и PL — линия, отделяющая пластическую область от зоны разгрузки. Способ определения начальной скорости ВР, примененный в работе [1], можно обобщить и использовать для нахождения скорости ВР в произвольной ее точке.

Соотношения (2.14), (2.15), которые выполняются в пластической области, можно представить в виде

$$(3.1) \quad 4\Delta \sqrt{w} = \int_{\theta}^{\pi+\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}} + 2\sqrt{M} - \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}} - f_3 \left(\frac{y}{c_p} - x \right)$$



Фиг. 2

$$(3.2) \quad 2 \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}} = f_3 \left(\frac{y}{c_p} - x \right) + \int_0^{\pi+\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}} - 2\sqrt{M}$$

($c_p = \sqrt{-\sin \theta} \sin \theta (\Delta \sqrt{w} - \sqrt{-\sin \theta} \cos \theta)^{-1}$ — скорость пластических волн).
Краевое условие (2.17) на границе раздела примет вид

$$(3.3) \quad 2w_1(-x \sin \varphi_1) = \frac{1}{16\Delta^2} \left[\int_0^{\pi+\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}(x, 0)} + 2\sqrt{M} - f_3(-x) \right]^2 - \\ - \frac{c}{\mu_1} \operatorname{tg} \varphi_1 k \cos \theta(x, 0)$$

Дифференцируя уравнения (3.2) и (3.3) по x при $y = 0$, получаем систему уравнений для определения $\partial\theta(x, 0)/\partial x$, $f_3'(-x)$, из которой имеем

$$(3.4) \quad f_3'(-x) = 2R_1(-x \sin \varphi_1) F(\theta(x, 0)) \\ F(\theta(x, 0)) = \left[\frac{1}{2\Delta^2} F_1(\theta(x, 0)) - \frac{c}{\mu_1} \operatorname{tg} \varphi_1 k \sin \theta(x, 0) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{-\sin \theta(x, 0)} \right]^{-1}, \quad F_1(\theta(x, 0)) = \int_0^{\pi+\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}(x, 0)} + 2\sqrt{M} \\ R_1(-x \sin \varphi_1) = -\sin \varphi_1 w_1'(-x \sin \varphi_1) \text{ при } x \geq x_p$$

Дифференцируя уравнение (3.2) по x при $y = y(x)$, т. е. на ВР, получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} c^* = \left(1 - \frac{c^*}{c_p} \right) F_2(x, y(x)) \\ F_2(x, y(x)) = \frac{R_1(-z \sin \varphi_1) F(\theta(z, 0)) \sqrt{-\sin \theta}}{\sqrt{-\sin \theta} R_1(-z \sin \varphi_1) F(\theta(z, 0)) F_3(\theta(x, y)) y(x) - 1} \\ F_3(\theta(x, y)) = - \frac{3(\sqrt{w} \Delta \sin \theta - \sqrt{-\sin \theta})}{2 \sin^2 \theta \sqrt{-\sin \theta}}, \quad z = \frac{y(x)}{c_p} - x, \\ c^* = \frac{dy(x)}{dx}$$

Аналогично из уравнений (1.6), (1.7), (2.7) получаем, что в зоне разгрузки выполняются соотношения (c_e — скорость упругих волн)

$$(3.5) \quad \Phi_+ = -2\rho_2 a_2^2 c_e w, \quad \Phi_- = 2c\tau_2 \\ \Phi_{\pm} = f_1 \left(x + \frac{y(x)}{c_e} \right) \pm f_2 \left(x - \frac{y(x)}{c_e} \right) \\ f_2(x) = \frac{2R_2(-x \sin \varphi_1) g d a_2 - f_1'(x)(g-d) \sin \varphi}{(g+d) \sin \varphi} \\ R_2(-x \sin \varphi_1) = -\sin \varphi_1 w'(-x \sin \varphi_1) \text{ при } x \leq x_p; \quad d = \rho_2 a_2 \cos \varphi \\ g = \rho_1 a_1 \cos \varphi_1, \quad c_e = -(M^2 - 1)^{-1/2}$$

Предполагается, что на ВР $y = y(x)$ напряжения и скорость перемещений непрерывны, в этом случае имеют место равенства

$$(3.6) \quad \Phi_+ = - \frac{\rho_2 a_2^2}{8\Delta^2 c_e} \left(\int_0^{\pi+\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{-\sin \theta}} + 2\sqrt{M} - f_3 \left(\frac{y(x)}{c_p} - x \right) \right)^2 \\ \Phi_- = 2ck \cos \theta$$

Дифференцируя систему уравнений (3.6) по x и исключая в полученных уравнениях величины $\partial\theta/\partial x + c^* \partial\theta/\partial y$, $f_3'(y(x)/c_p - x)$, имеем

$$(3.7) \quad f_1' \left(x + \frac{y(x)}{c_e} \right) \left(1 + \frac{c^*}{c_e} \right) + f_2' \left(x - \frac{y(x)}{c_e} \right) \left(1 - \frac{c^*}{c_e} \right) = \\ = \frac{ka_2^2}{c_e c} F_1(\theta(x, y(x))) \left(1 - \frac{c^*}{c_p} \right) \frac{F_2(x, y(x))}{\sqrt{-\sin \theta}}$$

$$(3.8) \quad f_1' \left(x + \frac{y(x)}{c_e} \right) \left(1 + \frac{c^*}{c_e} \right) - f_2' \left(x + \frac{y(x)}{c_e} \right) \left(1 - \frac{c^*}{c_e} \right) = \\ = -2ck \sin \theta \left(1 - \frac{c^*}{c_p} \right) F_2(x, y(x))$$

$$(3.9) \quad f_2' \left(x + \frac{y(x)}{c_e} \right) = \left[2R_2 (-\sin \varphi_1 z) g d a_2 - f_1' \left(x + \left(\frac{y(x)}{c_e} \right) \right) \times \right. \\ \left. \times (g - d) \sin \varphi \right] [(g + d) \sin \varphi]^{-1}$$

Последнее уравнение (3.9) получено из уравнения (3.5) для $f_2'(x)$ заменой аргумента.

Полученная система уравнений (3.7)–(3.9) является системой дифференциальных уравнений с отклоненным аргументом для определения ВР $y = y(x)$, которую можно решать численными методами при начальных условиях

$$y(x_p) = 0, \quad y'(x_p) = c_0^*, \quad f_1(x_p) = f_1, \quad f_1'(x_p) = f_1', \quad f_2(x_p) = f_2 \\ f_2'(x_p) = f_2'$$

Здесь c_0^* — начальная скорость ВР, алгоритм нахождения которой известен [1, 9]. Величины f_1, f_1', f_2, f_2' вследствие непрерывности на ВР напряжений и скорости перемещения определяются из построенного выше решения в области пластического нагружения.

Кроме того, систему уравнений (3.7)–(3.9) можно использовать для определения скорости ВР в произвольной ее точке $(x, y, (x))$. Исключая в уравнениях (3.7)–(3.9) функцию $f_1'(x + y(x)/c_e)$, имеем

$$(3.10) \quad G(c^*) = \left(1 - \frac{c^*}{c_p} \right) \frac{F_2(x, y(x))}{\sqrt{-\sin \theta}} \left(\frac{k a_2^2}{c_e c} F_1(\theta(x, y)) - \right. \\ \left. - 2ck \sin \theta \sqrt{-\sin \theta} \right) - 2f_2' \left(x - \frac{y(x)}{c_e} \right) \left(1 - \frac{c^*}{c_e} \right)$$

Предполагается, что ВР построена по данной произвольной точке, в которой ищется скорость ВР. Таким образом, величина $y = y(x)$ известна и (3.10) — линейное уравнение для определения c^* . Поэтому построение ВР можно проводить определяя из (3.10) величину c^* в последовательности точек, начиная с x_p и задавая соответствующие участки ВР отрезками прямых, угол наклона которых к оси x определяется величиной c^* . Значение функции $f_2'(x - y(x)/c_e)$, необходимое для построения очередного участка волны разгрузки, определяется при помощи соотношений (3.5), (3.8) из результатов построения предшествующих участков.

Используя уравнения (3.2), (3.5), функцию $f_2(x - y(x)/c_e)$ можно представить в виде

$$(3.11) \quad f_2(x + y)(x/c_e) = -\mu_2 (4\Delta^2 c_e)^{-1} F_1^2(\theta(x, 0)) - ck \cos \theta$$

Дифференцируя уравнение (3.11) по x и учитывая, что в зоне разгрузки $\partial\theta/\partial x < 0$, получаем, что в этой зоне $f_2'(x - (x - x_p)c_p/c_e) \geq 0$. Поэтому из соотношений (3.10) следует, что $G(c_p) \leq 0, G(c_e) \geq 0$, а значит, корень уравнения (3.10) c^* удовлетворяет условию $|c_p| \leq |c^*| \leq |c_e|$. Таким образом, показано, что скорость ВР в произвольной ее точке не меньше скорости распространения пластических волн и не превосходит скорости распространения упругих волн, а также, что в каждой точке скорость ВР, а значит, и сама ВР определяется единственным образом.

Кроме изложенных способов для рассматриваемой задачи построение ВР можно проводить методом характеристик [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев А. Г. Преломление плоскополяризованных волн на границе упругого и упругопластического полупространства.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 2, с. 307—315.
2. Баскаков В. А., Быковцев Г. И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 71—79.
3. Баскаков В. А. Об отражении плоских сдвиговых волн от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. Алма-Ата: Наука, 1973, с. 65—72.
4. Баскаков В. А. Взаимодействие ударных волн в упругопластической среде с упрочнением.— ПМТФ, 1979, № 6, с. 127—134.
5. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
6. Ковшов А. Н. О преломлении упругой волны в упругопластическое полупространство.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6, с. 82—88.
7. Ковшов А. Н. О преломлении волны сдвига в грунт.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 8, с. 36—41.
8. Ильющин А. А. Пластичность. М.— Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
9. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
11.III.1985