

УДК 539.383:539.374

## К ОБРАТНЫМ КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Кузьменко В. И.

Рассматривается класс обратных контактных задач теории пластичности определения формы штампа, обеспечивающей заданное остаточное формоизменение тела. Такая задача формулируется в виде некоторого функционального уравнения. С использованием принципа сжимающих отображений обосновывается существование и единственность решения, а также предлагается итерационный процесс нахождения требуемой формы штампа. В качестве примера рассматривается задача о форме штампов, обеспечивающих образование впадин в форме трапеций на поверхности полосы.

**1. Постановка задачи.** Будем связывать с процессом квазистатического деформирования упругопластического тела  $\Omega$  монотонно возрастающий параметр  $t$ ,  $t \in [0, T]$ , называемый в дальнейшем временем. В качестве пространственной системы отсчета используется декартова система координат  $Ox_1x_2x_3$ . Под  $u_i(x, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x, t)$ ,  $\sigma_{ij}(x, t)$  понимаем компоненты вектора малых перемещений, тензоров малых деформаций и напряжений в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ .

Тело  $\Omega$  ограничено кусочно-гладкой поверхностью, состоящей из трех частей:  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_c$ . На части  $\Gamma_u$  тело закреплено, а часть  $\Gamma_\sigma$  свободна от напряжений. Поверхность  $\Gamma_c$  находится под действием движущегося штампа. Форму поверхности штампа будем описывать функцией  $f(x)$ , равной расстоянию от поверхности  $\Gamma_c$  до поверхности штампа вдоль направления нормали к  $\Gamma_c$  при  $t = 0$ . Закон движения штампа как жесткого тела считается заданным, не зависит от формы штампа и должен быть выбран таким образом, чтобы при  $t < t^*$  в теле  $\Omega$  происходило упругопластическое деформирование, а при  $t \geq t^*$  — только разгрузка или активное упругое деформирование. Предполагается, что при  $t = T$  контакт между телом и штампом полностью отсутствует.

Сформулируем условия взаимодействия тела и штампа в процессе деформирования. Для заданной функции  $f(x)$ , определяющей форму штампа, и для заданного закона движения штампа как жесткого тела может быть однозначно построена функция  $\Phi(x, t)$ , равная расстоянию в момент времени  $t$  от поверхности  $\Gamma_c$  до поверхности штампа, измеренному в направлении нормали к  $\Gamma_c$ . Трением между поверхностями тела и штампа пренебрегаем. Нижними индексами  $\nu$  и  $\tau$  будем обозначать нормальные и касательные компоненты. Тогда взаимодействие тела и штампа характеризуется условиями [1, 2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\nu(x, t) \leq 0, \quad \sigma_\tau(x, t) = 0, \quad u_\nu(x, t) \leq \Phi(x, t) \\ \sigma_\nu(x, t) [u_\nu(x, t) - \Phi(x, t)] = 0, \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Связь между напряженным и деформированным состояниями будем описывать дифференциально-линейными или дифференциально-нелинейными соотношениями, записанными в приращениях

$$(1.2) \quad d\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r, d\varepsilon_{\xi\eta}) d\varepsilon_{km}$$

где  $A_{ijklm}$  — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, однородные нулевой степени относительно  $d\varepsilon_{\xi\eta}$ , а  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$  — значения некоторых функционалов истории деформирования. Условия, налагаемые на функции  $A_{ijklm}$ , сформулированы в [2].

Считается, что пластическое деформирование не изменяет упругих характеристик материала, и принимается линейный закон связи напряжений и деформаций при активном упругом деформировании и разгрузке

$$(1.3) \quad d\sigma_{ij} = C_{ijklm} d\varepsilon_{km}$$

причем существует такое  $c > 0$ , что

$$(1.4) \quad C_{ijklm} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{km} \geq c d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Пусть параметры  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_l$  ( $l \leq r$ ) характеризуют упрочнение материала. Предполагается, что для всякого  $\delta > 0$  можно указать такое  $\beta > 1$ , что

$$(1.5) \quad A_{ijklm}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r, d\varepsilon_{\xi\eta}) d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{km} \leq \beta C_{ijklm} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{km}$$

при  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \dots + \kappa_l^2 > \delta$ , причем значение  $\beta$  не зависит от истории деформирования. Условие (1.5) выполняется для большинства материалов и, в частности, для одноосных процессов деформирования фактически означает, что касательный модуль должен быть меньше упругого.

Переходим к непосредственной формулировке обратной контактной задачи (ОКЗ). Будем задавать форму поверхности  $\Gamma_c$  в остаточном состоянии с помощью функции  $f_0(x)$ ,  $x \in \Gamma_c$ , значения которой равны расстоянию от исходной недеформированной поверхности  $\Gamma_c$  до этой же поверхности в остаточном состоянии. Расстояние, как и ранее, измеряется вдоль направления внешней нормали к недеформированному состоянию поверхности  $\Gamma_c$ . Тогда ОКЗ теории пластичности формулируется следующим образом: определить функцию  $f(x)$  так, чтобы в результате пластического деформирования и разгрузки форма поверхности  $\Gamma_c$  в остаточном состоянии описывалась функцией  $f_0(x)$ .

**2. Формулировка функционального уравнения.** Предварительно введем некоторые используемые в дальнейшем математические понятия. Под  $[H^1(\Omega)]^3$  будем понимать пространство С. Л. Соболева вектор-функций  $v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ , определенных в  $\Omega$  и суммируемых с квадратом вместе с первыми частными производными. Введем также пространства  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ ,  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  функций, определенных на поверхности  $\Gamma_c$ , с соответствующей нормой [3]. Будем понимать под элементами  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  нормальные перемещения точек поверхности  $\Gamma_c$ , а под элементами  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  — нормальные напряжения на  $\Gamma_c$ .

Рассмотрим теперь вспомогательные прямые задачи, которые будут использованы при формулировке, исследовании и решении функционального уравнения ОКЗ.

**Задача 1.** Используются соотношения теории пластичности (1.2). На поверхностях  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_\sigma$  заданы нулевые граничные условия в перемещениях и напряжениях соответственно, а поверхность  $\Gamma_c$  находится под действием движущегося штампа. Форма штампа должна быть выбрана таким образом, чтобы в результате движения штампа по заданному закону расстояние от поверхности  $\Gamma_c$  до поверхности штампа в момент времени  $t^*$  равнялось значению заданной функции  $\psi(x)$ . Если при  $t = t^*$  в точках  $x \in \Gamma_c$  контакт отсутствует, то этим точкам по определенному закону сообщаются нормальные перемещения  $\psi(x) = u_\nu(x, t^*)$ . Требуется определить напря-

женно-деформированное состояние в теле  $\Omega$ , а также распределение нормальных контактных напряжений на  $\Gamma_c$  в момент времени  $t^*$ .

*Задача 2* формулируется так же, как и задача 1, только напряжения и деформации связаны соотношениями теории упругости (1.3).

*Задача 3* является следующей задачей линейной теории упругости: на  $\Gamma_c$  заданы усилия

$$\sigma_\nu(x) = q(x), \quad \sigma_\tau(x) = 0$$

а на  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_\sigma$  — нулевые перемещения и напряжения; требуется определить напряженно-деформированное состояние в теле  $\Omega$  и нормальные перемещения точек поверхности  $\Gamma_c$ .

Каждая из поставленных задач имеет единственное решение [1, 2], причем получаемые распределения нормальных перемещений и нормальных контактных напряжений принадлежат пространствам  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  и  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  соответственно.

Пусть  $u^{(1)} \in [H^1(\Omega)]^3$  — решение задачи 2. Определим компоненты тензора деформаций соотношениями Коши и введем функцию плотности энергии деформации

$$(2.1) \quad W(\varepsilon_{ij}^{(1)}) = 1/2 C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{kl}^{(1)}$$

Тогда каждой функции  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_c)$  можно единственным образом поставить в соответствие число

$$(2.2) \quad \|\psi\| = \left( \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^{(1)}) d\Omega \right)^{1/2}$$

Поскольку для  $\|\psi\|$  выполнены все аксиомы нормы, то элементы  $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_c)$  можно рассматривать как элементы банахова пространства  $U$  с нормой (2.2).

Аналогично, решив задачу 3 и определив  $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ , введем норму элементов  $q \in H^{-1/2}(\Gamma_c)$  следующим образом:

$$(2.3) \quad \|q\| = \left( \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^{(2)}) d\Omega \right)^{1/2}$$

Соответствующее банахово пространство нормальных напряжений с нормой (2.3) будем обозначать  $S$ .

Введем некоторые операторы, действующие в пространствах  $U$  и  $S$ .

Оператор  $Q_p: U \rightarrow S$  ставит в соответствие каждой функции  $\psi \in U$  распределение нормальных напряжений  $q \in S$ , полученных в результате решения задачи 1. Действие оператора  $Q_e: U \rightarrow S$  отличается от действия оператора  $Q_p$  тем, что распределение нормальных напряжений  $q \in S$  получено при решении задачи 2. Наконец, оператор  $Q_e^{-1}: S \rightarrow U$  является обратным по отношению к оператору  $Q_e$  и ставит в соответствие функциям  $q \in S$  перемещения  $\psi \in U$ , полученные в результате решения задачи 3.

Воспользуемся введенными операторами и дадим формулировку задачи в виде функционального уравнения.

Нормальные контактные напряжения в момент начала разгрузки  $t^*$  определяются с помощью введенных операторов следующим образом:  $q^*(x) = Q_p[\psi(x)]$ . Сообщим теперь точкам поверхности  $\Gamma_c$  в остаточном состоянии нормальные перемещения  $\psi(x) - f_0(x)$ . Считая возникающие при этом деформации упругими, получаем соответствующие нормальные напряжения  $q^{**}(x) = Q_e[\psi(x) - f_0(x)]$ .

Учитывая, что упругое деформирование обратимо, на основании теоремы о разгрузке при контактном взаимодействии [4] заключаем, что для функции  $\psi(x)$ , соответствующей искомой форме штампа  $f(x)$ , должно быть выполнено равенство  $q^*(x) = q^{**}(x)$ ,  $\forall x \in \Gamma_c$ , или

$$(2.4) \quad Q_p[\psi(x)] = Q_e[\psi(x) - f_0(x)]$$

Применяя оператор  $Q_e^{-1}$ , запишем уравнение (2.4) в виде

$$(2.5) \quad \psi(x) = P[\psi(x)], \quad P[\psi] = f_0 + Q_e^{-1}Q_p\psi$$

Таким образом, решение ОКЗ теории пластичности сведено к решению функционального уравнения (2.5) относительно нормальных перемещений  $\psi(x)$  точек поверхности  $\Gamma_c$  в момент начала разгрузки.

**3. Существование и единственность решения ОКЗ.** Исследование корректности постановки задачи и построение метода решения основано на принципе сжимающих отображений [5].

Выделим в пространстве  $U$  выпуклое замкнутое множество  $U_0$  элементов  $\psi \in U$ , удовлетворяющих неравенству

$$(3.1) \quad \|\psi - f_0 - Q_e^{-1}Q_p\psi\| \leq a \|f_0\|, \quad a < 1$$

Очевидно, искомое решение функционального уравнения принадлежит множеству  $U_0$ .

Обозначим через  $\Omega_p(\psi) \subset \Omega$  область активных пластических деформаций, во всех точках которой  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \dots + \kappa_l^2 > \delta$ , и, следовательно, выполнено неравенство (1.5).

*Лемма 1.* Существует такое  $\gamma_0 > 0$ , что для всех  $\psi \in U_0$  справедливо неравенство

$$\text{mes}(\Omega_p(\psi)) \geq \gamma_0 > 0$$

*Доказательство* от противного. Предположим, что для любого  $\gamma_n > 0$  можно указать функцию  $\psi_n \in U_0$ , такую, что  $\text{mes}(\Omega_p(\psi_n)) < \gamma_n$ . Выбирая сходящуюся к нулю последовательность  $\{\gamma_n\}$ , получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(\Omega_p(\psi_n)) = 0$ . Однако, если почти во всех точках тела происходит только упругое деформирование, то  $Q_e^{-1}Q_p\psi = \psi$  и, следовательно

$$\|\psi - f_0 - Q_e^{-1}Q_p\psi\| = \|f_0\|$$

т. е. можно указать такое  $N$ , что для всех  $n > N$  функции  $\psi_n$  не будут удовлетворять условию (3.1).

Обозначим через  $P'(\psi)$  производную Фреше оператора  $P$  в точке  $\psi \in U_0$ .

*Лемма 2.* При сделанных ранее допущениях выполняется неравенство

$$\sup_{\psi \in U_0} \|P'(\psi)\| \leq \alpha < 1$$

*Доказательство.* Обозначим через  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $d\sigma_{ij}$  приращения деформаций и напряжений, полученные в результате решения задачи 2 теории упругости при заданных на  $\Gamma_c$  приращениях нормальных перемещений  $d\psi$ . Тогда

$$\|d\psi\| = \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} d\Omega \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega \right)^{1/2}$$

Пусть  $D\psi$  — дифференциал Фреше оператора  $P$  в точке  $\psi \in U_0$ . Дальнейшее доказательство состоит в получении оценки вида  $\|D\psi\| \leq \alpha \|d\psi\|$ ,  $\alpha < 1$  и содержит четыре последовательных этапа.

1°. Используя компоненты тензора  $d\varepsilon_{ij}$  приращений деформаций, полученного при решении задачи 2; формально определим в точках области  $\Omega_p(\psi)$  компоненты некоторого тензора  $d\sigma_{ij}^{(1)}$  приращений напряжений по соотношениям (1.2) теории пласт-

точности. В области  $\Omega - \Omega_p(\psi)$  положим  $d\sigma_{ij}^{(1)} = d\sigma_{ij}$ . На основании допущения (1.5) в  $\Omega_p$  почти всюду  $d\sigma_{ij}^{(1)} d\varepsilon_{ij} \leq \beta_1 d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ . Тогда

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(1)} d\varepsilon_{ij} d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij}^{(1)} d\varepsilon_{ij} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega - \Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_1 \int_{\Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega - \Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega = \alpha_1 \|d\psi\|^2 \\ \alpha_1 &= 1 - (1 - \beta_1) \int_{\Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega / \int_{\Omega} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega \end{aligned}$$

На основании леммы 1 заключаем, что  $\alpha_1 < 1$ .

2°. Обозначим  $d\varepsilon_{ij}^{(2)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(2)}$  решение задачи теории пластичности, соответствующее заданным при  $t = t^*$  приращениям нормальных перемещений  $d\psi$  на  $\Gamma_c$ . Согласно экстремальному принципу в приращениях перемещений [6], при отсутствии усилий на  $\Gamma_\sigma$  функционал

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij} d\Omega$$

достигает минимального значения для действительных приращений  $d\varepsilon_{ij}^{(2)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(2)}$  по сравнению со всеми возможными, соответствующими заданным приращениям  $d\psi$  на  $\Gamma_c$ . В качестве таких возможных приращений можно, в частности, взять  $d\varepsilon_{ij}^{(1)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(1)}$ . Следовательно

$$(3.3) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(1)} d\varepsilon_{ij}^{(1)} d\Omega \leq \alpha_1 \|d\psi\|^2$$

3°. Положим  $d\varepsilon_{ij}^{(3)} = C_{ijkl}^{-1} d\sigma_{kl}^{(2)}$ . Очевидно, в области упругих деформаций  $d\varepsilon_{ij}^{(3)} = d\varepsilon_{ij}^{(2)}$ , а в области  $\Omega_p(\psi)$  неравенство (1.5) принимает вид

$$d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(3)} \leq \beta_2 d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \beta_2 < 1$$

Аналогично этапу 1° приходим к следующему неравенству:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(3)} d\Omega &\leq \frac{1}{2} \alpha_2 \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega \\ \alpha_2 &= 1 - (1 - \beta_2) \int_{\Omega_p(\psi)} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega / \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(2)} d\Omega < 1 \end{aligned}$$

Объединяя (3.3) и (3.4), получаем оценку

$$(3.5) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(3)} d\Omega \leq \alpha_1 \alpha_2 \|d\psi\|^2$$

4°. Пусть  $dq^{(2)}$  — нормальные напряжения на границе, полученные в результате решения задачи теории пластичности при заданных на  $\Gamma_c$  приращениях нормальных перемещений  $d\psi$ . Считая напряжения  $dq^{(2)}$  известными, рассмотрим задачу теории упругости при заданных на  $\Gamma_c$  нормальных напряжениях. Обозначим через  $d\varepsilon_{ij}^{(4)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(4)}$  приращения деформаций и напряжений, полученные при решении этой задачи. Используя экстремальный принцип в приращениях напряжений, получаем неравенство

$$(3.6) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(4)} d\varepsilon_{ij}^{(4)} d\Omega \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(2)} d\varepsilon_{ij}^{(3)} d\Omega \leq \alpha_1 \alpha_2 \|d\psi\|^2$$

Обратим теперь внимание на то, что приращения  $d\varepsilon_{ij}^{(4)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(4)}$  получены из  $d\varepsilon_{ij}^{(2)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(2)}$  в результате действия оператора  $Q_e^{-1}$ , а  $d\varepsilon_{ij}^{(2)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(2)}$  получены, в свою очередь, при действии оператора  $Q_p$ . Таким образом, приращения  $d\varepsilon_{ij}^{(4)}$ ,  $d\sigma_{ij}^{(4)}$  соответствуют приращениям  $d\psi^{(4)}$ , полученным в результате действия оператора  $Q_e^{-1}Q_p$ . Учитывая, что  $Df_0 = 0$ , величину

$$\left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\sigma_{ij}^{(4)} d\varepsilon_{ij}^{(4)} d\Omega \right)^{1/2}$$

можно рассматривать как норму  $\|D\psi\|$ . На основании оценки (3.6) заключаем, что

$$\|D\psi\| \leq \alpha \|d\psi\|, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \forall \psi \in U_0$$

и, следовательно

$$\sup_{\psi \in U_0} \|P'(\psi)\| = \sup_{\psi \in U_0} \frac{\|D\psi\|}{\|d\psi\|} \leq \alpha < 1$$

**Теорема 1.** При сделанных предположениях существует единственное решение  $\psi_* \in U_0$  функционального уравнения (2.5), причем  $\psi_*$  может быть получено как предел последовательности  $\{\psi_n\}$ , построенной при помощи рекуррентного соотношения

$$(3.7) \quad \psi_{n+1} = P(\psi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $\psi_0$  — произвольный элемент из  $U_0$ .

*Доказательство.* Воспользуемся формулой конечных приращений [5] в виде

$$\|P(\psi_1) - P(\psi_2)\| \leq \|\psi_1 - \psi_2\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(\psi_2 + \theta(\psi_1 - \psi_2))\|$$

и на основании леммы 2 заключаем, что

$$(3.8) \quad \|P(\psi_1) - P(\psi_2)\| \leq \alpha \|\psi_1 - \psi_2\|$$

Пространство  $U$  можно рассматривать как метрическое с расстоянием  $\rho(\psi_1, \psi_2) = \|\psi_1 - \psi_2\|$ . Тогда неравенство (3.8) означает, что оператор  $P$  — сжимающий [5]. Выводы теоремы сразу следуют из принципа сжимающих отображений [5].

Теорема 1 относится к задаче решения функционального уравнения (2.5). Основываясь на этой теореме, рассмотрим вопросы существования и единственности решения ОКЗ. Пусть  $\psi_*$  — решение функционального уравнения (2.5). При заданном законе движения штампа функции  $\psi_*$  можно единственным образом поставить в соответствие функцию  $f_*$ , описывающую форму штампа. Однако  $f_*(x)$  будет решением ОКЗ только в том случае, если в соответствии с условиями (1.1) нормальные контактные напряжения при  $t = t^*$  будут неположительны почти во всех точках  $\Gamma_c$ . Таким образом, приходим к следующему альтернативному утверждению.

**Теорема 2.** Для исследования вопроса о существовании и единственности решения ОКЗ теории пластичности и фактического получения требуемой формы штампа необходимо решить функциональное уравнение (2.5). Если для полученного решения  $\psi_*(x)$  соответствующие значения  $q_*(x)$  на множестве ненулевой меры в  $\Gamma_c$  строго положительны, то ОКЗ не имеет решения. Если  $q_*(x) \leq 0$  почти для всех  $x \in \Gamma_c$ , то существует единственное решение ОКЗ теории пластичности.

*Следствие.* ОКЗ теории пластичности с дополнительно заданной остаточной формой  $f_{0\sigma}(x)$  свободной поверхности  $\Gamma_\sigma$  не имеет решения почти для всех заданных функций  $f_{0\sigma}$ .

Действительно, ОКЗ при заданной остаточной форме только поверхности  $\Gamma_c$  имеет единственное решение. В соответствии с этим решением остаточная форма свободной поверхности  $f_\sigma$  также будет единственной и, вообще говоря, не будет совпадать с заданной функцией  $f_{0\sigma}$ .

**4. Численное решение ОКЗ.** Метод решения функционального уравнения фактически уже содержится в теореме 1, поэтому рассмотрим только некоторые особенности его применения и дадим оценки скорости сходимости.

В соответствии с теоремой 1, решение функционального уравнения (2.5) может быть получено в результате выполнения итерационного процесса

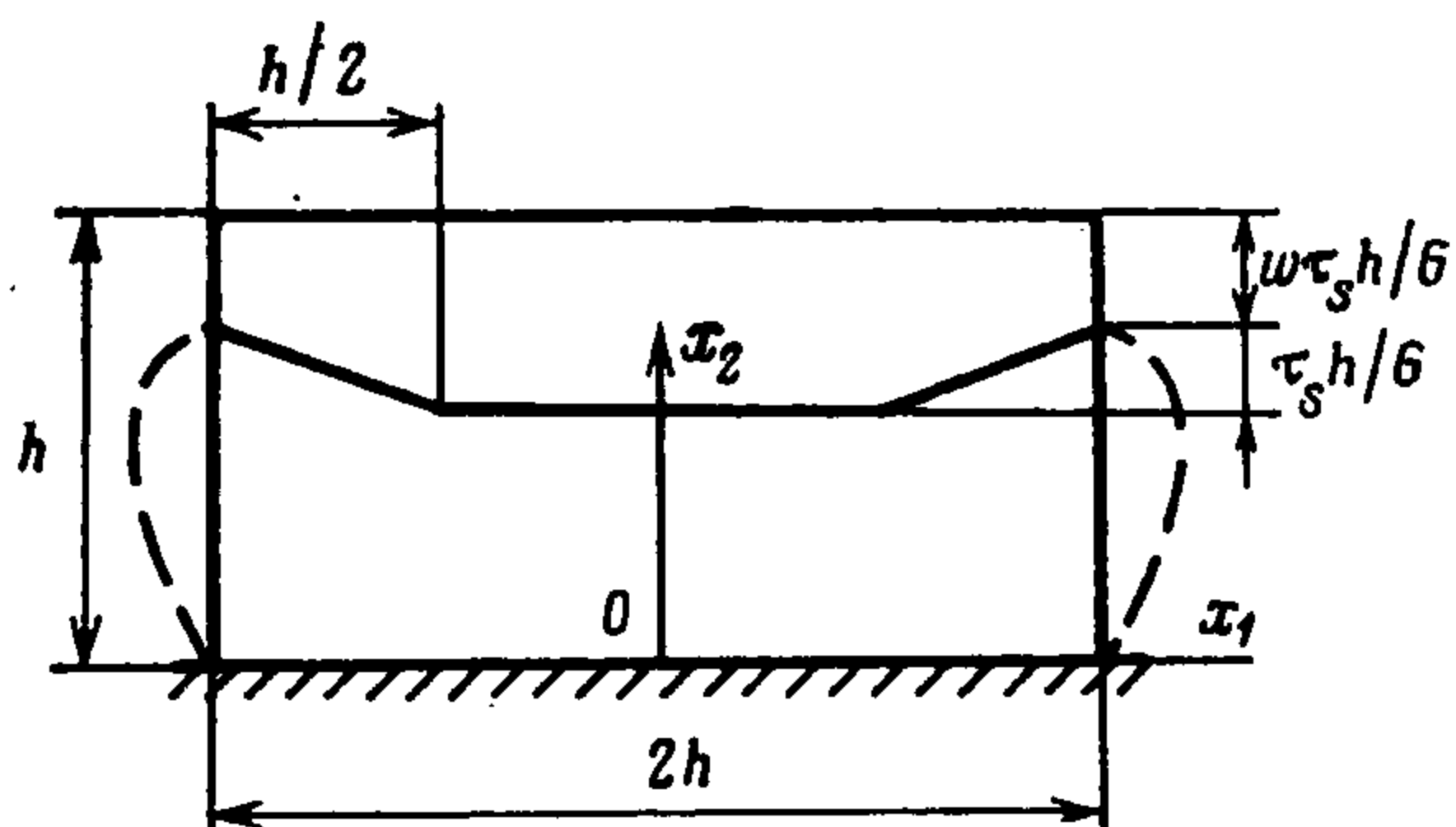
$$\psi_{n+1} = P(\psi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \psi_0 \in U_0$$

Реализация операторов  $Q_p$  и  $Q_e^{-1}$  на каждом шаге итерационного процесса осуществляется при помощи задач 1 и 3, сформулированных в п. 2. Для решения таких прямых задач могут быть эффективно использованы существующие численные методы (например, метод конечных элементов или метод граничных элементов).

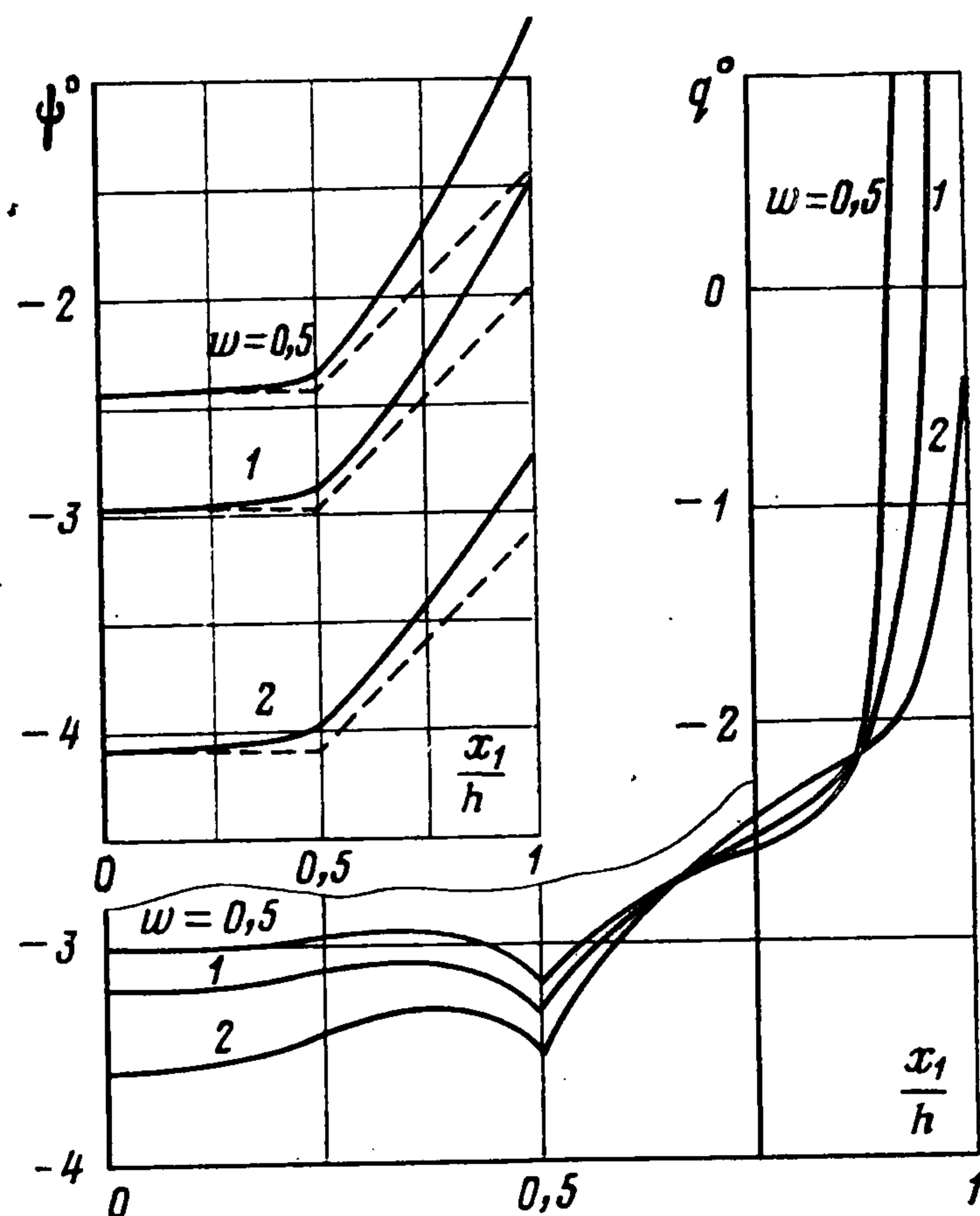
Скорость сходимости последовательности  $\{\psi_n\}$ , полученной при помощи соотношения (3.7), характеризуется неравенством [5]

$$\|\psi_n - \psi_*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\psi_1 - \psi_0\|$$

и по существу определяется величиной  $\alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ . Рассмотрим факторы, влияющие на  $\alpha$ , используя оценки (3.2) и (3.4), полученные при доказательстве леммы 2. Постоянные  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в случае одноосной деформации пропорциональны отношению касательного и упругого модулей. Из (3.2) и (3.4) следует, что с уменьшением этого отношения скорость сходимости возрастает. Далее, входящие в оценки для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отношения интегралов показывают, что с ростом относительного объема областей активных пластических



Фиг. 1



Фиг. 2

ких деформаций скорость сходимости последовательности  $\{\psi_n\}$  также возрастает. Получаем, что для более «глубоких» отпечатков скорость сходимости более высокая, поскольку с увеличением глубины отпечатка область пластических деформаций, как правило, увеличивается.

На основе предложенной методики разработан пакет программ решения ОКЗ для упругопластической полосы конечных размеров. Прямые задачи 1 и 3 решаются методом конечных элементов на основе вариационного подхода.<sup>1</sup>

Рассмотрим в качестве примера задачу определения формы штампа, при которой на поверхности  $x_2 = h$  полосы в условиях плоской деформации образуется остаточная впадина в форме трапеции (фиг. 1). Остаточная форма свободных поверхностей, на основании следствия из теоремы 2, не может быть задана и на фиг. 1 показана условно штриховой линией. Через  $\tau_s$  обозначен предел упругости при кручении, через  $G$  — модуль сдвига. Безразмерный параметр  $w$  характеризует глубину остаточного отпечатка. Штмп может перемещаться только поступательно в направлении оси  $0x_2$ .

Материал полосы считается однородным и изотропным. Используется теория малых упругопластических деформаций для линейно упрочняющегося материала с отношением касательного и упругого модулей, равным 0,05. Коэффициент Пуассона принят равным 0,3.

При дискретизации прямых задач сечение полосы разбито на 800 прямоугольных конечных элементов. Для определения формы штампа со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей  $0,001\tau_s h/G$ , при  $w = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5$  требуется от 4 до 7 итераций, причем с ростом  $w$  количество итераций уменьшается, что вполне согласуется с выполненным анализом скорости сходимости.

На фиг. 2 показаны полученные при решении функционального уравнения (2.5) нормальные перемещения  $\psi_*(x_1)$  точек поверхности  $\Gamma_c$  и соответствующие нормальные напряжения  $q_*(x_1)$  на  $\Gamma_c$  для разных значений  $w$  ( $\psi^0 = \psi_* G/(\tau_s h)$ ,  $q^0 = q_*/\tau_s$ ). Штриховыми линиями показана форма остаточного отпечатка для удобства сопоставления смещенного вдоль оси  $Ox_2$ . Отметим, что полученные перемещения существенно отличаются от формы отпечатка, причем при  $x_1 \leq 0,5h$  это различие увеличивается с ростом  $w$ , а при  $x_1 > 0,5h$  — уменьшается.

Поскольку при  $w < 1,5$  на части поверхности  $x_2 = h$  нормальные напряжения положительны, следует заключить, что на основании теоремы 2 получить отпечаток указанной формы путем вдавливания штампа можно только при  $w \geq 1,5$ . Для погружения штампов полученной формы на требуемую глубину необходимо при  $w = 1,5; 2; 2,5$  на единицу ширины полосы приложить усилия, равные  $5,58\tau_s h$ ,  $5,9\tau_s h$ ,  $6,22\tau_s h$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 329—337.
2. Кузьменко В. И. О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 473—481.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
4. Кузьменко В. И. О процессе разгрузки при контактном взаимодействии. — ПММ, 1985, т. 49, вып. 3, с. 445—452.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
6. Койтер В. Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 80 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
17.VI.1985