Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 539.383

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ КОНТАКТА УПРУГИХ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ

Галанов Б. А.

В качестве обобщения результатов работы [1] доказывается существование и единственность решения задачи о контакте нескольких упругих шероховатых тел (на примере контакта трех тел). Используется метод нелинейных граничных уравнений, который (как и вариационный метод [2—5]) позволяет эффективно исследовать корректность задач контакта тел с неизвестными областями контакта.

1. Постановка задачи. Пусть $Oxyz$ — декартова прямоугольная система координат, $M(x, y)$ — точка плоскости $E_2 = \{z = 0\}$ с координатами x, y, $\operatorname{mes}\{\omega\}$ — мера Лебега множества $\omega \subset E_2$; Δ^2 — бигармонический оператор; $\operatorname{supp} v(M)$ — носитель функции $v(M)$, Q — оператор, ставящий в соответствие функции $v(M)$, $M \in \Omega$, функцию $v^+(M)$, $M \in \Omega$, по правилу: $v^+ \equiv Qv = \sup\{v(M), 0\}$, $L_{r,2} = L_{r,2}(\Omega)$ — банахово пространство вектор-функций $v(M) = (v_1(M), v_2(M))$ (определенных в области $\Omega \subset E_2$) с нормой

$$\|v(M)\| = \left(\int_\Omega (|v_1(M)|^r + |v_2(M)|^r dS_M\right)^{1/r}, \quad r \geqslant 1$$

При $r = 2$ пространство $L_{r,2}$ гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_\Omega (u_1(M) v_1(M) + u_2(M) v_2(M))\, dS_M$$

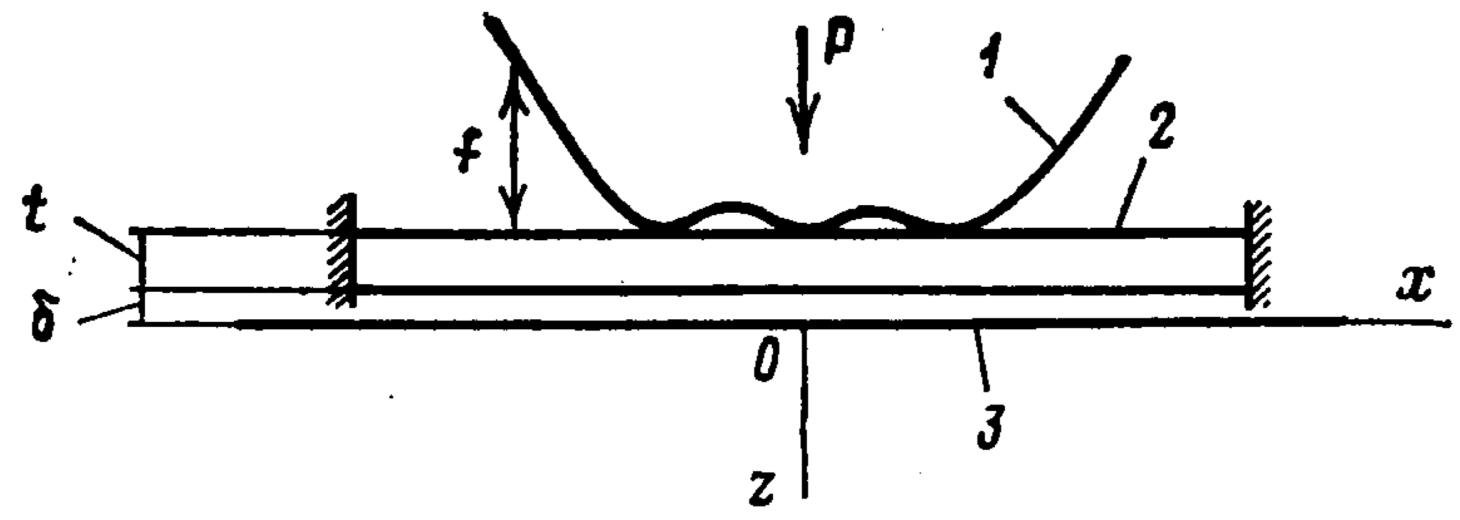
Линейный оператор K, действующий из банахова пространства E в сопряженное с E пространство E^*, называется строго положительным, если $(Kv, v) \geqslant 0$, и равенство $(Kv, v) = 0$ возможно лишь тогда, когда $v = 0$ [6] ((u, v) — значение линейного непрерывного функционала $u \in E^*$ на элементе $v \in E$).

Рассмотрим задачу контакта (без трения) упругого тела *1* и упругого полупространства *3* с пластиной *2*, расположенной между ними (фигура, ось y перпендикулярна плоскости рисунка). Как краевая задача она сводится (при известных предположениях) к построению в полупространствах $z < -t - \delta$ и $z > 0$ соответственно гармонических функций $u_1(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ ($u_i(x, y, z) = O(R^{-1})$ при $R \to \infty$, $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $i = 1, 3$), решения $u_2(x, y)$ уравнения

$$\Delta^2 u_2(x, y) = \lambda_2 (u_{1z}'(x, y, -t - \delta) - u_{3z}'(x, y, 0)), M(x, y) \in \Omega$$

определению плоских замкнутых областей $S_1 \subset \Omega$, $S_2 \subset \Omega$ и скалярной величины h из условий

$$\begin{aligned}
(1.1) \quad & z = -t - \delta, \ \Phi_1(u_{1z}') + 2\pi\lambda_1 u_1 + u_2 = q(M), \ u_{1z}' \geqslant \\
& \geqslant 0 \quad (M(x, y) \in S_1) \\
& \Phi_1(u_{1z}') + 2\pi\lambda_1 u_1 + u_2 > q(M), \quad u_{1z}' = 0 \ (M(x, y) \in (\Omega \setminus S_1)) \\
& u_{1z}' = 0 \ (M(x, y) \in (E_2 \setminus \Omega)) \quad (q(x, y) = h - f(x, y) \in \\
& \in L_r(\Omega))
\end{aligned}$$



$z = 0,\ \Phi_2(u_{3z}') + 2\pi\lambda_3 u_3 - u_2 = -\delta,\ u_{3z}' \geqslant 0\quad (M(x, y) \in S_2)$

$\Phi_2(u_{3z}') + 2\pi\lambda_3 u_3 - u_2 > -\delta,\ u_{3z}' = 0\ (M(x, y) \in (\Omega \setminus S_2))$

$u_{3z}' = 0\ (M(x, y) \in (E_2 \setminus \Omega))$

$$\iint\limits_{S_1} u_{1z}'(x, y, -t-\delta)\,dx\,dy = P,\quad u_2|_\Gamma = \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$$

Здесь $\Omega \subset E_2$ — ограниченная область с границей Γ, n — единичный вектор внешней нормали к контуру Γ, u_{iz}'— производная по z функции u_i $(i = 1, 3)$, $\Phi_i(p_i)$, $-\infty < p_i < \infty$ $(i = 1, 2)$ — строго возрастающие непрерывные функции и $\Phi_i(0) = 0$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ — постоянные, $t > 0$ — толщина пластины, $\delta \geqslant 0$ — зазор между пластиной *2* и полупространством *3*, $h > 0$ — жесткое перемещение тела *1* вдоль оси z, которое вызвано силой $P > 0$, действующей на тело *1*. Функция $f(x, y) \geqslant 0$ определяет зазор между пластиной и телом *1* до их деформации (фигура), т. е. при $h = 0$ и $P = 0$. Ортогональные проекции множеств S_1 и S_2 соответственно на плоскости $z = -t - \delta$ и $z = -\delta$ являются теми частями поверхности пластины, которые вступают в контакт с телом *1* и полупространством *3* после деформации. Функции $v_i = \Phi_i(p_i)$ $(i = 1, 2)$ описывают механические характеристики шероховатостей тел. В дальнейшем $p_i = F_i(v_i)$ означает обратную функцию для $v_i = \Phi_i(p_i)$.

Если ввести потенциалы

$$u_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1} \frac{p_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z + t + \delta)^2]^{1/2}},$$

$$z \leqslant -t - \delta$$

$$u_2(x, y) = \lambda_2 \iint\limits_{S_1} G(x, y, \xi, \eta)\,p_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\lambda_2 \iint\limits_{S_2} G(x, y, \xi, \eta)\,p_2(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$u_3(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_2} \frac{p_2(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{1/2}},\quad z \geqslant 0$$

($G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина для краевой задачи $\Delta^2 w(M) = 0$, $M \in \Omega$; $w|_\Gamma = \partial w/\partial n|_\Gamma = 0$) и обозначить

$$H(M, N) = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{-1/2}$$

$$Hp_i = \int\limits_{S_i} H(M, N)\,p_i(N)\,dS_N,\quad Gp_i = \int\limits_{S_i} G(M, N)\,p_i(N)\,dS_N$$

$$Ip_1 = \int\limits_{S_1} p_1(N)\,dS_N;\quad M(x, y) \in \Omega,\quad N(\xi, \eta) \in S_i,\quad i = 1, 2$$

то задача (1.1) эквивалентна задаче отыскания контактных давлений $p_1(M)$, $p_2(M)$, множеств S_1, S_2 и величины h из системы

(1.2) $\Phi_1(p_1) + (\lambda_1 H + \lambda_2 G)\,p_1 - \lambda_2 G p_2 = q;\quad p_1 \geqslant 0\quad (M \in S_1)$

$\Phi_1(p_1) + (\lambda_1 H + \lambda_2 G)\,p_1 - \lambda_2 G p_2 > q;\ p_1 = 0\ (M \in (\Omega \setminus S_1))$

$\Phi_2(p_2) - \lambda_2 G p_1 + (\lambda_3 H + \lambda_2 G)\,p_2 = -\delta;\ p_2 \geqslant 0\ (M \in S_2)$

$$\Phi_2(p_2) - \lambda_2 G p_1 + (\lambda_3 H + \lambda_2 G) p_2 > -\delta; \ p_2 = 0 \ (M \in (\Omega \setminus S_2))$$
$$I p_1 = P$$

Введем векторы и симметричную матрицу второго порядка

$$g(M) = (q(M), -\delta), \ v(M) = (v_1(M), v_2(M)), \ F(v(M)) = (F_1(v_1(M)), F_2(v_2(M))), \ Q(F(v(M))) = (Q(F_1(v_1(M))), Q(F_2(v_2(M))))$$

$$K(M,N) = \begin{Vmatrix} \bar\lambda_1 H(M,N) + \varkappa & -\varkappa \\ -\varkappa & \bar\lambda_3 H(M,N) + \varkappa \end{Vmatrix}$$

$$\varkappa = \bar\lambda_2 G(M,N), \ \bar\lambda_i = \lambda_i/\lambda, \ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ i = 1, 2, 3$$

Рассмотрим относительно неизвестной вектор-функции $v(M)$ и скаляра h систему нелинейных уравнений

$$v(M) + \lambda \int_\Omega K(M,N) Q(F(v(N))) dS_N = g(M)$$

$$\int_\Omega Q(F_1(v_1(N))) dS_N = P; \quad M, N \in \Omega$$

которую для удобства запишем в операторном виде

(1.3) $\qquad v + \lambda KQFv = g, \ IQF_1 v_1 = P$

Теорема 1. Если (v_1^*, v_2^*, h) — решение системы (1.3), то $(p_1 = QF_1 v_1^*, \ p_2 = QF_2 v_2^*, \ S_1 = \{M: v_1^* \geqslant 0\}, \ S_2 = \{M: v_2^* \geqslant 0\}, \ h)$ — решение системы (1.2), причем $\operatorname{supp} p_i(M) \subseteq S_i$, $i = 1, 2$. Обратно: если (p_1, p_2, S_1, S_2, h) — решение системы (1.2) и

(1.4) $\qquad v^* = g - \lambda KQp \ (M \in \Omega, N \in S_i)$

то тройка (v_1^*, v_2^*, h) — решение системы (1.3). Области S_1 и S_2 могут быть многосвязными.

Доказательство. Для сокращения записи введем обозначения

$$\omega_1 = S_1 \cap S_2; \ \omega_2 = S_2 \cap (\Omega \setminus S_1); \ \omega_3 = S_1 \cap (\Omega \setminus S_2);$$
$$\omega_4 = \Omega \setminus (S_1 \cup S_2)$$

Пусть (v_1^*, v_2^*, h) — решение системы (1.3) и $M \in \omega_1$. Из определения оператора Q и (1.3) вытекают соотношения

$$p_1 = QF_1 v_1^* \geqslant 0, \ p_2 = QF_2 v_2^* \geqslant 0, \ \Phi_1(p_1) + (\lambda_1 H + \lambda_2 G) p_1 - \lambda_2 G p_2 = q, \ \Phi_2(p_2) - \lambda_2 G p_1 + (\lambda_3 H + \lambda_2 G) p_2 = -\delta, \ I p_1 = P$$

которые означают, что (p_1, p_2, S_1, S_2, h) — решение системы (1.2) для $M \in \omega_1$. Аналогично показывается, что (p_1, p_2, S_1, S_2, h) — решение системы (1.2) при $M \in \omega_i$, $i = 2, 3, 4$.

Включения $\operatorname{supp} p_i(M) \subseteq S_i$ $(i = 1, 2)$ очевидны. Этим завершается доказательство прямой части теоремы.

Если (p_1, p_2, S_1, S_2, h) — решение системы (1.2), то можно убедиться (рассмотрев поочередно случаи $M \in \omega_i$, $i = 1, 2, 3, 4$), что (1.4) можно записать так: $v^* = g - \lambda KQFv^*$, т. е. $v^* = (v_1^*, v_2^*, h)$ — решение (1.3).

Таким образом, для решения поставленной контактной задачи (1.2) достаточно найти решение (v_1^*, v_2^*, h) системы (1.3), поскольку $p_1 = QF_1 v_1^*$, $p_2 = QF_2 v_2^*$, $S_1 = \{M: v_1^* \geqslant 0\}$, $S_2 = \{M: v_2^* \geqslant 0\}$. Поэтому в дальнейшем исследуется система (1.3).

2. Корректность задачи. Обозначим через $v^\circ(M) = (v_1^\circ(M), v_2^\circ(M))$ решение системы уравнений Гаммерштейна (1.3) при $h = h_0$ и пусть

$$P_0 = \int_\Omega Q(F_1(v_1^\circ(M)))\,dS_M \tag{2.1}$$

Далее полагаем, что функции F_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условию

$$|F_i(v)| \leqslant c_* |v|^{1/\alpha};\ c_* = \text{const},\ 0 < \alpha \leqslant 1$$

Теорема 2. Если $r = 1 + 1/\alpha$, $1/2 < \alpha \leqslant 1$ и $P \in [0, P_0]$, то система (1.3) имеет единственное решение $\{v^* \in L_{r,2};\ h \in [0, h_0]\}$. При этом $h = h(P)$ $(0 \leqslant P \leqslant P_0)$ — непрерывная строго возрастающая функция, и если функция $f(M)$ непрерывна, то $v^*(M) \in C(\Omega)$ (h_0 — произвольное число из интервала $[0, \infty)$. Этому числу соответствует величина P_0, определяемая по формуле (2.1). Величина $C(\Omega)$ — пространство вектор-функций, координаты которых — непрерывные функции на Ω).

Доказательство. Оператор K — вполне непрерывный оператор из $L_{q,2}$ $(q = 1 + \alpha)$ в $L_{q,2}{}^* = L_{r,2}$ $(r = 1 + 1/\alpha)$ [7]. Сужение K на $L_{2,2}$ — самосопряженный строго положительный оператор. Поэтому существует квадратный корень $D = K^{1/2}$ из оператора K, который является вполне непрерывным оператором из $L_{2,2}$ в $L_{q,2}{}^*$ [6]. Сопряженный оператор D^* действует из $L_{q,2}{}^*$ в $L_{2,2}$.

Если в первом уравнении системы (1.3) выполнить замену переменных [6] $v = Dt + g$, то вместо него получим эквивалентное уравнение

$$Ut \equiv t + \lambda D^*QF(Dt + g) = 0;\ t \in L_{2,2} \tag{2.2}$$

с непрерывным монотонным и потенциальным оператором U (монотонность U следует из монотонности функций $QF_i(v_i)$ $(i = 1, 2)$).

Оценим снизу скалярное произведение (Ut, t):

$$(Ut, t) = (t, t) + \lambda(QF(Dt + g), Dt + g) - \lambda(QF(Dt + g), g) \geqslant (t, t) - \lambda(QF(Dt + g), g) \geqslant (t, t) - \lambda\|g\|_{L_{r,2}}\|QF(Dt + g)\|_{L_{q,2}}$$

Используя свойства операторов Q и F_i, а также неравенство Минковского, получим

$$\|QF(Dt + g)\|_{L_{q,2}} \leqslant c_*(\|D\|\,\|t\|_{L_{2,2}} + \|g\|_{L_{r,2}})^{1/\alpha}$$

Поэтому имеем оценку

$$(Ut, t) \geqslant \|t\|^2_{L_{2,2}} - c_*\lambda\|g\|_{L_{r,2}}\|t\|^{1/\alpha}_{L_{2,2}}(\|D\| + \|g\|_{L_{r,2}}/\|t\|_{L_{2,2}})^{1/\alpha}$$

и при $\alpha > 1/2$ существует такое число $\rho > 0$, что при $\|t\|_{L_{2,2}} \geqslant \rho$ справедливо неравенство $(Ut, t) > 0$, т. е. на основании теоремы Браудера — Минти ([6], с. 262) уравнение (2.2) для всех $h \in [0, \infty)$ имеет решение $t^* \in L_{2,2}$, которому соответствует решение $v^* = Dt^* + g$ первого уравнения (1.3).

Отсюда непосредственно следует существование функции

$$P(h) = \int_\Omega Q(F_1(v_1^*(M)))\,dS_M;\quad h \in [0, \infty)$$

Покажем строгую монотонность и непрерывность этой функции.

Пусть вектор-функции v_1, v_2 — решения первого уравнения (1.3), соответствующие значениям $h = h_1$ и $h = h_2$. Введем обозначения

$$\varepsilon = v_2 - v_1,\ d = QFv_2 - QFv_1,\ \Delta h = (h_2 - h_1, 0)$$

Тогда из (1.3) получим

$$(2.3)\qquad \varepsilon + \lambda K d = \Delta h$$

$$(\varepsilon, d) + \lambda (Kd, d) = (\Delta h, d) \equiv (h_2 - h_1)(P(h_2) - P(h_1))$$

где $(\varepsilon, d) \geqslant 0$ (следствие монотонности оператора QF).

Используя предположение, что множество $\{M: f(M) = 0\} \neq \varnothing$, можно доказать (методом от противного), что $d \neq 0$ при $h_1 \neq h_2$. Отсюда, из строгой положительности K (в смысле определения данного во введении) и (2.3) следует, что $d = 0$ только при $h_1 = h_2$. Поэтому при $h_1 \neq h_2$ левая часть второго равенства (2.3) положительна. Это означает строгое возрастание функции $P(h)$. Далее из строгой положительности K и второго равенства (2.3) следует, что $d \to 0$ при $\Delta h \to 0$ и $P(h)$ — непрерывная функция. Поэтому и функция $h = h(P)$ $(P \in [0, P_0])$ — строго возрастающая непрерывная функция с областью значений $[0, h_0]$.

Единственность решения системы (1.3) — очевидное следствие равенств (2.3) и того, что $d = 0$ только при $\Delta h = 0$.

Покажем теперь, что $v^* \in C(\Omega)$ при $g \in C(\Omega)$. Имеем

$$(2.4)\qquad v^* + \lambda KQFv^* = g$$

Возможна альтернатива: 1) $v^* \in L_{r,2}$ — разрывная ограниченная вектор-функция; 2) $v^* \in L_{r,2}$ — неограниченная вектор-функция. При первой возможности левая часть неравенства (2.4) — разрывная ограниченная вектор-функция (поскольку оператор λKQF переводит всякую ограниченную вектор-функцию в непрерывную), что противоречит непрерывности g. Если учесть, что функция H имеет слабую особенность, а функция G непрерывна, то вторая возможность приводит к аналогичному противоречию. Поэтому v^* — непрерывная вектор-функция.

Можно указать и другие условия существования решения системы (1.3). Например, при $g \in C(\Omega)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и достаточно малых λ_i можно использовать принцип Шаудера, как это сделано в [1].

Для решения системы (1.3) могут быть применены разные приближенные методы [6, 8]. При этом следует учитывать, что оператор Q дифференцируем по Фреше лишь на некоторых множествах $\omega \subset L_p$. Например, он (как оператор, действующий из $C(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, дифференцируем на множестве

$$\omega = \{v : v \in C(\Omega),\ \operatorname{mes}\{M : v(M) = 0\} = 0\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галанов Б. А.* Пространственные контактные задачи для упругих шероховатых тел при упругопластических деформациях неровностей.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 1020—1029.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
3. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
4. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования.— ПММ, 1976, т. 42, вып. 3, с. 466—474.
5. *Рабинович В. Л., Спектор А. А.* Решение некоторых классов пространственных контактных задач с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 2, с. 93—100.
6. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 415 с.
7. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. В., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.

Киев

Поступила в редакцию
24.VI.1985