

УДК 539.383

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАГРУЖЕНИИ**

Фомин В. М.

Определяются контактные напряжения под периодической системой штампов, расположенных на границе однородной упругой полуплоскости и движущихся под действием произвольной во времени нагрузки. В отличие от работы [1] решается более общая задача, когда, во-первых, система штампов инвариантна не только относительно сдвигов (трансляций) вдоль границы полуплоскости на векторы, кратные некоторому вектору a_0 , но и относительно отражений в периодической системе параллельных плоскостей π_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), перпендикулярных вектору a_0 и отстоящих одна от другой на расстоянии $l = \|a_0\|/2$ (эти преобразования образуют группу C_{1h} [2]); во-вторых, нагрузка не предполагается одинаковой для всех штампов (фиг. 1).

1. Рассмотрим множество X точек оси Ox , инвариантное относительно преобразований группы C_{1h} (фиг. 2, а). Назовем основным отрезок $[0, 2l]$, а основной элементарной ячейкой (ЭЯ) — отрезок $[0, l]$ оси и присвоим им символы X_0 и X_{01} соответственно. Система ЭЯ

$$X_{mn} = g_{m1}h_n X_{01} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; h_n \in H; n = 1, 2)$$

образует покрытие множества X . Через g_{m1} обозначается трансляция на вектор ma_0 , H — точечная группа, состоящая из двух элементов: тождественного преобразования h_1 и отражения h_2 в плоскости Π_0 .

Введем локальные системы координат на каждой из ЭЯ, переходящие одна в другую при преобразованиях симметрии (фиг. 2, а). В дальнейшей системе, образованную этими локальными системами координат, будем называть инвариантной. Точку x границы полуплоскости, а также ее абсциссу в инвариантной системе координат будем обозначать x_{mn} , если точка находится на ЭЯ X_{mn} .

Введем функции $\psi_n(x_0)$ ($n = 1, 2$), определенные на основном отрезке X_0 следующим образом: $\psi_n(x_0) = \delta_{np}$ ($x_0 \in X_{0p}$; δ_{np} — символ Кронекера; $n, p = 1, 2$). Разложим каждую из этих функций на составляющие, преобразующиеся по неэквивалентным неприводимым представлениям точечной группы H_k некоторого вектора $k \in \Omega$ (Ω — зона Бриллюэна) [2, 3]

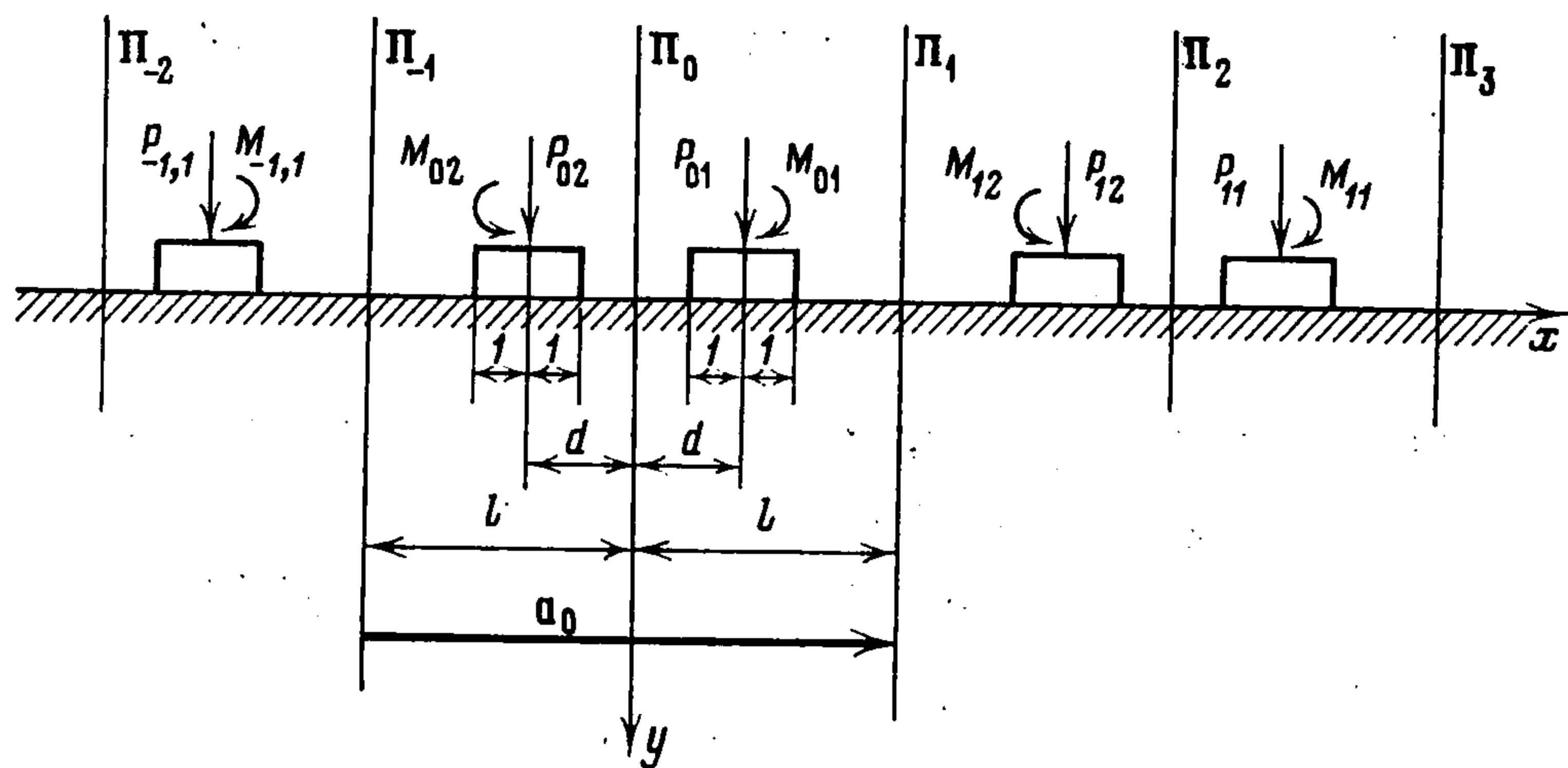
$$\psi_n(x_0) = \sum_{\mu=1}^{M_k} \psi_{n\mu}(x_0, k), \quad \psi_{n\mu}(x_0, k) = \frac{1}{N_k} \sum_{h \in H_k} \tau^\mu(h^{-1}) h \psi_n(x_0)$$

В этих формулах M_k — число неэквивалентных неприводимых представлений группы H_k , τ^μ — элемент матрицы этого представления (для группы C_{1h} эта матрица одномерна), N_k — порядок группы H_k .

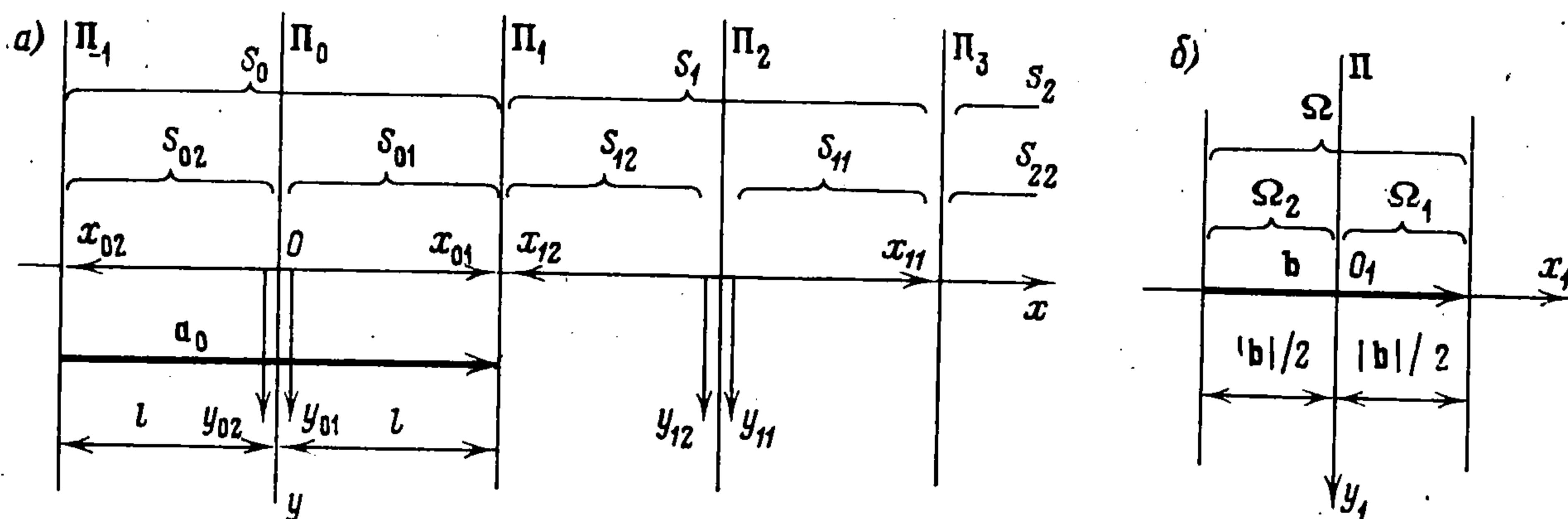
Из теории представлений групп следует, что функции

$$(1.1) \quad \Phi_{n\mu j}(x, k) = h_j' \psi_{n\mu}(x_0, h_j' k) \exp(-ih_j' k \cdot ma_0) \\ (j = 1, 2, \dots, L; x = g_{m1}x_0; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

при фиксированных n, k и μ преобразуются по неприводимому представлению группы C_{1h} .



Фиг. 1



Фиг. 2

В формуле (1.1) через h_j' ($j = 1, 2, \dots, L$) обозначены элементы группы H , участвующие в разложении ее на левые смежные классы по подгруппе H_k .

Для ограниченной функции $f(x)$ на X ряд

$$(1.2) \quad F(x_0, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(g_m x_0) \exp(im\alpha), \quad x_0 \in X_0$$

определяет обобщенную функцию на отрезке $\Gamma \{-\pi \leq \alpha \leq \pi\}$ с отождествленными концами.

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} (F, \exp(-im\alpha))$$

Это равенство может быть записано так:

$$f(x) = \frac{1}{|b|} (F, \exp(-ik \cdot ma_0))$$

Функция $F(x_0, k) = F(x_0, \alpha)$ рассматривается как обобщенная на зоне Бриллюена Ω , при этом $b = 2\pi a_0 / |a_0|^2$, $k = \alpha b / (2\pi)$.

Обозначим Δ_X множество ограниченных функций на X , для которых дискретное преобразование Фурье (1.2) имеет следующий вид:

$$(1.3) \quad F(x_0, k) = F_0(x_0, k) + \sum_{j=1}^J F_1(x_0, k_j) \delta(k - k_j)$$

Здесь $F_0(x_0, k)$ — кусочно-непрерывная функция, определенная по k всюду в Ω , за исключением конечного числа точек, и интегрируемая в Ω в смысле главного значения по Коши, $\delta(k)$ — дельта-функция.

С помощью теории представлений групп может быть доказано следующее утверждение: произвольная функция из Δ_X имеет дискретно-контину-

нуальное разложение

$$(1.4) \quad f(x) = \frac{1}{|b|} \int \sum_{\Omega_1, n, j=1}^2 F_0(h_j x_{0n}, h_j \mathbf{k}) \Phi_{n1j}(x, \mathbf{k}) d\Omega_{\mathbf{k}} + \\ + \frac{1}{|b|} \sum_{j=1}^J \sum_{\mu=1}^{M_j} \sum_{n=1}^2 F_1(x_{0n}, \mathbf{k}_j) \Phi_{n\mu 1}(x, \mathbf{k}_j)$$

по функциям $\Phi_{n\mu j}(x, \mathbf{k})$, преобразующимся по неприводимым представлениям группы C_{1h} . Здесь M_j — число неэквивалентных неприводимых представлений группы вектора \mathbf{k}_j , Ω_1 — ЭЯ зоны Бриллюэна, т. е. отрезок $[0, |b|/2]$ оси Ox_1 (фиг. 2, б).

Отметим, что изложенный выше алгоритм позволяет раскладывать на обобщенно-симметрические составляющие (т. е. преобразующиеся по неприводимым представлениям группы C_{1h}) функции на X более общего вида, чем аналогичный алгоритм в [4].

2. На границе однородной упругой полуплоскости расположена система штампов, инвариантная относительно преобразований группы C_{1h} (фиг. 1). Штампам присваиваются номера в соответствии с нумерацией ЭЯ, на которых они расположены. Переменные x и t будем полагать безразмерными — масштаб длин примем равным a (a — половина ширины штампа), а времени — a/c_2 (c_2 — скорость распространения поперечной упругой волны). Предполагается трение между штампами и полуплоскостью отсутствует и что длина площадки контакта равна ширине штампа.

На штампы действуют сосредоточенные вертикальные силы $P_{mn}(t)$ и моменты $M_{mn}(t)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 1, 2; t \geq 0$). Предполагается, что при $t \leq 0$ все штампы и полуплоскость находятся в покое. Силы и моменты, приложенные к штампам, можно считать при фиксированном t функциями, заданными на множестве X с группой симметрии C_{1h} , имеющим на каждой из ЭЯ по одной точке:

$$P_{mn}(t) = P(x, t), \quad M_{mn}(t) = M(x, t) \quad (x \in X_{mn}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 1, 2)$$

Предполагаем, что эти функции из Δ_X , а значит, для них справедливо разложение (1.4). Из линейности постановки задачи и симметрии системы штампов вытекает [5], что такое же разложение имеет место в инвариантной системе координат и для контактных напряжений $p(x, t)$ и перемещений $w(x, t)$ точек подошвы штампов и, кроме того, решение задачи при произвольном нагружении сводится к решению серии обобщенно-симметрических задач, в каждой из которых нагрузка преобразуется по неприводимому представлению группы C_{1h} .

Заметим, что вследствие ограниченности скорости распространения возбуждения в упругой среде напряжения под штампом в течение конечного промежутка времени $0 \leq t \leq t_0$ зависят от движения этого штампа и некоторого конечного числа соседних. Поэтому напряжения под упомянутым штампом можно определять решая задачу для полуплоскости с системой из конечного числа штампов, зависящего от t_0 . Однако эти же напряжения можно найти рассматривая бесконечную систему штампов, являющуюся расширением предыдущей, с приложением к добавленным штампам произвольной нагрузки из Δ_X . В последнем случае возможно применение теории представлений групп, что приводит к распаду задачи на серию обобщенно-симметрических задач, в каждой из которых приходится решать уравнения только для двух штампов (а в некоторых случаях даже для одного). Естественно, подобное расширение следует производить так, чтобы расширенная система обладала наибольшими симметрическими свойствами.

Рассмотрим случай, когда неприводимое представление, которому соответствует данная обобщенно-симметрическая задача, двумерно ($0 < \alpha < \pi$).

При помощи преобразования

$$(2.1) \quad \Phi_{n1j}(x, k) = \frac{1}{2} [\theta_{11}(x, k) + (-1)^{n+j} \theta_{22}(x, k)] - \\ - (-1)^j \frac{i}{2} [\theta_{21}(x, k) - (-1)^{n+j} \theta_{12}(x, k)] \quad (n, j = 1, 2)$$

переходим от функций $\Phi_{n1j}(x, k)$ ($n, j = 1, 2$) к функциям $\theta_{jn}(x, k)$ ($j, n = 1, 2$), преобразующимся при фиксированном n по двумерному вещественному неприводимому представлению группы

$$(2.2) \quad \theta_{jn}(gx, k) = \sum_{q=1}^2 \tau_{jq}^k(g) \theta_{qn}(x, k) \quad (g \in C_{1h}; j, n = 1, 2) \\ \tau_{jj}^k(g_{m1}) = \cos m\alpha, \quad \tau_{jq}^k(g_{m1}) = (-1)^q \sin m\alpha \quad (j \neq q) \\ \tau_{jj}^k(g_{m2}) = (-1)^{j-1} \cos m\alpha, \quad \tau_{jq}^k(g_{m2}) = -\sin m\alpha \quad (j \neq q) \\ (j, q = 1, 2)$$

Здесь $\alpha = k \cdot a_0$, g_{m1} — трансляция на вектор ma_0 , g_{m2} — отражение в плоскости π_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Рассмотрим нагрузки $p_{jr}(x, u, t)$ ($j, r = 1, 2$), состоящие из сосредоточенных импульсных сил, приложенных в точках $x = g_{mn} x_{01}$ ($x_{01} = u$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $n = 1, 2$) и преобразующиеся при фиксированном r по двумерному неприводимому представлению группы C_{1h}

$$(2.3) \quad p_{jr}(x_{01}, u, t) = \delta_{jr} \delta(x_{01} - u) \delta(t) \quad (j, r = 1, 2)$$

и функции $p_{jr}^{(N)}(x, u, t)$, являющиеся конечными отрезками $p_{jr}(x, u, t)$

$$p_{jr}^{(N)}(x, u, t) = p_{jr}(x, u, t) \quad (x \in X_{mn}; |m| \leq N; n = 1, 2) \\ p_{jr}^{(N)}(x, u, t) = 0 \quad (x \in X_{mn}; |m| > N; n = 1, 2)$$

Найдем двойное преобразование (Лапласа по t , Фурье по x) функций $p_{jr}^{(N)}(x, u, t)$:

$$\bar{\bar{p}}_{jr}^{(N)}(\xi, u, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^2 \sum_{m=-N}^N \tau_{jq}^k(g_{mq}) \exp(i2ml\xi - (-1)^q iu\xi)$$

Здесь и далее двойной чертой обозначаются двойные трансформанты (Лапласа и Фурье), одной чертой — трансформанты Лапласа.

Так как $\tau_{jr}^k(g) = \pm \cos m\alpha, \pm \sin m\alpha$, то функции $\bar{\bar{p}}_{jr}^{(N)}(\xi, u, s)$ при фиксированных u и s можно считать принадлежащими пространству обобщенных функций медленного роста S' [6]. Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в этом пространстве, будем иметь

$$(2.4) \quad \bar{\bar{p}}(\xi, u, s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\bar{p}}_{jr}^{(N)}(\xi, u, s) = (-1)^{j-r} i^{j-1} \times \\ \times \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{(r-1)(q-1)} \delta(\xi - T(k - (-1)^q \alpha_1)) z_r(u\xi) \\ T = \pi/l, \quad \alpha_1 = \alpha/(2\pi), \quad z_1(x) = \cos x, \quad z_2(x) = \sin x$$

Обозначим $v_{jr}^{(N)}(x, t)$ и $v_{jr}(x, t)$ вертикальные перемещения точек границы полуплоскости от действия нагрузок $p_{jr}^{(N)}(x, u, t)$ и $p_{jr}(x, u, t)$ соответственно. Воспользуемся формулой [7]

$$(2.5) \quad \bar{v}(x, s) = \frac{s^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{R(\xi, s)} \bar{\bar{p}}(\xi, s) e^{-ix\xi} d\xi$$

$$R(\xi, s) = (2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2}, \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}$$

Здесь $v(x, t)$ — безразмерное вертикальное перемещение граничной точки полуплоскости ($v(x, t) = v'(x, t)/a$, $v'(x, t)$ — размерное перемещение), $p(x, t)$ — безразмерная распределенная нагрузка ($p(x, t) = p'(x, t)/\mu$, μ — постоянная Ламе, $p'(x, t)$ — размерная нагрузка), c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной упругих волн. Для выделения однозначных ветвей радикалов $\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}$ и $\sqrt{\xi^2 + s^2}$ при фиксированном вещественном ξ в плоскости s делаются разрезы от точек ветвления $s = \pm i\xi/\beta$, $\pm i\xi$ до бесконечности вдоль соответствующих полуосей мнимой оси. Выбираются те ветви радикалов, которые принимают положительные значения на действительной оси плоскости s .

Продолжим функционал (2.4) с пространства S [6] на подпространство функций из $C(-\infty, \infty)$, стремящихся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. При помощи (2.5) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{v}_{jr}(x, u, s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}_{jr}^{(N)}(x, u, s) = \\ &= (-1)^{j-r} \frac{T}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_1(\xi_k, s) z_j(x\xi_k) z_r(u\xi_k) \\ \xi_k &= T(k + \alpha_1), \quad R_1(\xi, s) = s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} / R(\xi, s) \end{aligned}$$

Функции $\bar{v}_{jr}(x, u, s)$ ($j, r = 1, 2$) позволяют записать трансформанту вертикальных перемещений граничных точек полуплоскости от действия произвольных нагрузок $\bar{p}_q(x, s)$ ($q = 1, 2$), преобразующихся по неприводимому представлению группы симметрии, в виде

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{v}_j(x, s) &= \int_0^l \sum_{q=1}^2 \bar{v}_{jr}(x, u, s) \bar{p}_{q01}(u, s) du \quad (j = 1, 2) \\ \bar{p}_{qmn}(x, s) &= \bar{p}_q(x, s) \quad (x \in X_{mn}) \end{aligned}$$

Обозначим P_{j01}^* и M_{j01}^* ($j = 1, 2$) главный вектор и главный момент реактивных сил основания, действующих на основной штамп (расположенный на основной ЭЯ)

$$(2.7) \quad \begin{aligned} P_{j01}^*(t) &= \int_{d-1}^{d+1} p_{j01}(x_{01}, t) dx_{01}, \quad M_{j01}^*(t) = \int_{d-1}^{d+1} (x_{01} - d) p_{j01}(x_{01}, t) dx_{01} \\ (P_{jmn}(t) &= P'_{jmn}(t)/(a\mu), \quad M_{jmn}(t) = M'_{jmn}(t)/(a^2\mu) \end{aligned}$$

Здесь $p_{j01}(x_{01}, t)$ ($j = 1, 2$) — контактные напряжения под основным штампом при действии на систему штампов нагрузок $P_{jmn}(t)$ и $M_{jmn}(t)$ ($j = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), преобразующихся по неприводимому представлению группы C_{1h} . Сосредоточенные силы $P_{jmn}(t)$ и моменты $M_{jmn}(t)$ безразмерны. Их выражения через соответствующие размерные величины указаны в скобках.

Запишем уравнения движения основного штампа

$$(2.8) \quad \begin{aligned} m_0 \frac{d^2 w_{j01}^{(1)}}{dt^2} &= P_{j01}(t) - P_{j01}^*(t), \quad m_0 = m_0' c_2^2 / (a^2 \mu) \\ J_0 \frac{d^2 \varphi_{01}}{dt^2} &= M_{j01}(t) - M_{j01}^*(t), \quad J_0 = J_0' c_2^2 / (a^4 \mu) \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь m_0' и J_0' — размерные масса и осевой момент инерции штампа, $w_{j01}^{(1)}$ и φ_{01} — безразмерное поступательное и вращательное его перемещения. Применяя преобразование Лапласа к (2.7) и (2.8), учитывая, что

в начальный момент штампы находятся в покое и имеют нулевые начальные скорости, и полагая угловые перемещения малыми, будем иметь для перемещений точек подошвы штампа

$$(2.9) \quad \bar{w}_{j01}(x_{01}, s) = \frac{\bar{P}_{j01}(s) - \bar{P}_{j01}^*(s)}{m_0 s^2} + \frac{\bar{M}_{j01}(s) - \bar{M}_{j01}^*(s)}{J_0 s^2} (x_{01} - d) \quad (j=1, 2)$$

Приравнивая правые части формул (2.6) и (2.9) при $x_{01} \in [d-1, d+1]$ и делая замену переменных $u = \eta + d$, $x_{01} = \xi + d$, приходим к системе интегральных уравнений

$$(2.10) \quad \int_{-1}^1 \sum_{q=1}^2 \bar{v}_{jq}(\xi + d, \eta + d, s) \bar{p}_{q01}(\eta + d, s) d\eta = \\ = \frac{\bar{P}_{j01}(s) - \bar{P}_{j01}^*(s)}{m_0 s^2} + \frac{\bar{M}_{j01}(s) - \bar{M}_{j01}^*(s)}{J_0 s^2} \xi \quad (\xi \in [0, 1]; j=1, 2)$$

3. Решение системы уравнений (2.10) будем искать в виде ряда по полиномам Чебышева

$$(3.1) \quad \bar{p}_{j01}(\eta + d, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_{qr}(s) \frac{T_r(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

что соответствует определению контактных напряжений по формуле

$$p_{j01}(\eta + d, t) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{qr}(t) \frac{T_r(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

где $A_{qr}(t)$ — неизвестные функции времени.

Подставим (3.1) в (2.10) и (2.7) при $x_{01} = \xi + d$, затем (2.10) умножим на $T_n(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$ и проинтегрируем по ξ от -1 до $+1$. Используя равенства ($J_n(x)$ — бесселева функция первого рода)

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi, \quad \int_{-1}^1 \frac{T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cos bx dx = \\ = (-1)^n \pi J_{2n}(b) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ \int_{-1}^1 \frac{T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sin bx dx = (-1)^n \pi J_{2n+1}(b) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

будем иметь

$$(3.3) \quad \bar{P}_{j01}^*(s) = \pi \bar{A}_{j0}(s), \quad \bar{M}_{j01}^*(s) = \frac{\pi}{2} \bar{A}_{j1}(s) \quad (j=1, 2)$$

$$(3.4) \quad \sum_{q=1}^2 \sum_{r=0}^{\infty} B_{jqnr}(s) \bar{A}_{qr}(s) = \delta_{n0} d_0 \frac{\bar{P}_{j01}(s)}{\pi s^2} + \delta_{n1} d_1 \frac{\bar{M}_{j01}(s)}{\pi s^2} \\ (j=1, 2; n=0, 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$(3.5) \quad B_{jqnr}(s) = \frac{g_{jqnr}}{s^2} + (-1)^{j+q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{R}_1(\xi_k, s) h_{jkn} h_{qkr}$$

($j, q=1, 2; n, r=0, 1, 2, \dots$)

$h_{1kr} = \pi [\delta_r'' (-1)^{r/2} \cos(d\xi_k) - \delta_r' (-1)^{(r-1)/2} \text{sign}(\xi_k) \sin(d\xi_k)] J_r(|\xi_k|)$

$h_{2kr} = \pi [\delta_r'' (-1)^{r/2} \sin(d\xi_k) + \delta_r' (-1)^{(r-1)/2} \text{sign}(\xi_k) \cos(d\xi_k)] J_r(|\xi_k|)$

$\delta_r' = -\frac{1}{2} [(-1)^r - 1], \quad \delta_r'' = \frac{1}{2} [(-1)^r + 1]$

$g_{1100} = g_{2200} = d_0, \quad g_{1111} = g_{2211} = d_1/2, \quad d_0 = \frac{\pi^3}{TM_0}, \quad d_1 = \frac{\pi^3}{2TJ_0}$

$g_{jqnr} = 0$ для остальных значений j, q, n, r .

Произведем в бесконечной системе линейных уравнений (3.4) замену комплексного параметра $s = 1/z$. При этом преобразовании полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1/2$ отображается на внутренность единичного круга $|z - 1| < 1$. Функция $\bar{R}_1(\xi, s)$ при фиксированном вещественном ξ аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и $R_1(\xi, s) \sim \beta/s$ при $\operatorname{Re} s > \gamma > 0$. Отсюда следует, что $\bar{R}_1(\xi_k, 1/z)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) аналитична в круге $|z - 1| < 1$

$$\bar{R}_1\left(\xi_k, \frac{1}{z}\right) = z \sum_{m=0}^{\infty} R_{km}(z-1)^m$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_{jqnr}\left(\frac{1}{z}\right) &= z \sum_{m=0}^{\infty} B_{jqnrm}(z-1)^m \\ (3.6) \quad B_{jqnrm} &= g_{rqnj} \frac{\delta_{m0} + \delta_{m1}}{2} + (-1)^{j+q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{km} h_{jkn} h_{qkr} \\ &(j, q = 1, 2; n, r, m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Практически во всех встречающихся при решении задач случаях функции $\bar{P}_{j01}(1/z)$ и $\bar{M}_{j01}(1/z)$ ($j = 1, 2$) аналитичны в круге $|z - 1| < 1$ и представляются там в виде рядов

$$(3.7) \quad \bar{P}_{j01}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{j01m}(z-1)^m, \quad \bar{M}_{j01}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} M_{j01m}(z-1)^m$$

Будем искать функции $A_{qr}(1/z)$ в виде следующих рядов:

$$(3.8) \quad A_{qr}\left(\frac{1}{z}\right) = z \sum_{m=0}^{\infty} A_{qrm}(z-1)^m \quad (q = 1, 2; r = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставив (3.6)–(3.8) в систему (3.4), в которой положено $s = 1/z$, и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $z - 1$, приходим к рекуррентной формуле для систем линейных алгебраических уравнений относительно A_{qrm} ($q = 1, 2; r, m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} (3.9) \quad B_0 A_m &= D_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ D_0 &= C_0, \quad D_m = C_m - \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} A_k \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ B_m &= \|B_{jqnrm}\| \quad (j, q = 1, 2; n, r = 0, 1, 2, \dots) \\ C_m &= \|C_{jnm}\| \quad (j = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots), \\ A_m &= \|A_{qrm}\| \quad (q = 1, 2; r = 0, 1, 2, \dots) \\ C_{j0m} &= d_0 P_{j01m} \quad (j = 1, 2), \quad C_{j1m} = d_1 M_{j01m} \quad (j = 1, 2), \\ C_{jnm} &= 0 \quad (j = 1, 2; n \geq 2) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Аналогично исследованию ряда (4.4) в [1] проводится доказательство сходимости ряда, стоящего в правой части (3.6). Так же как и в [1], показывается, что при $n, r \geq 1$

$$B_{jjn0} = \frac{C}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad |B_{jqnr0}| \leq \frac{C}{n^2 r^2} \quad (j \neq q \text{ либо } n \neq r)$$

где C — некоторая постоянная.

Производя в системе (3.9) подстановку $A_{qrm} = A_{qrm}^{(1)} / \sqrt{B_{qrr0}}$ и деля левые и правые части j -строки на $\sqrt{B_{jjn0}}$, приходим к системе

$$(3.10) \quad B_0^{(1)} A_m^{(1)} = D_m^{(1)}$$

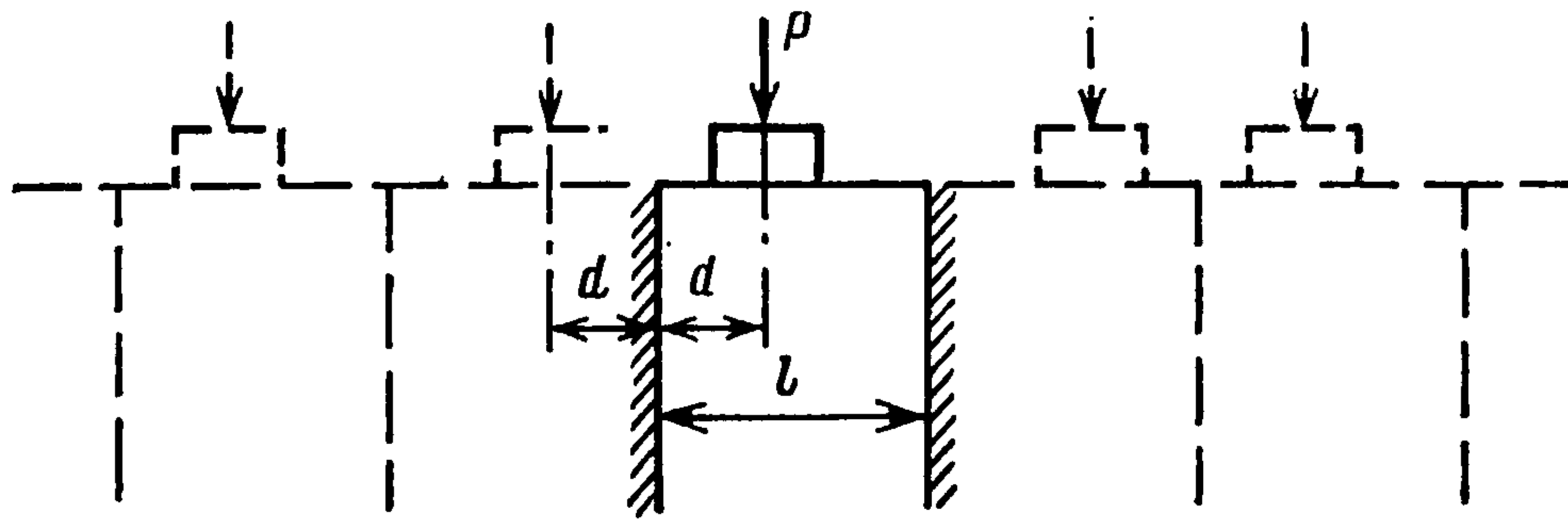
у которой $B_{jjnno}^{(1)} = 1$, а при $j \neq q$ или $n \neq r$

$$(3.11) \quad |B_{jqnro}^{(1)}| \leq \frac{C}{r^{3/2}} (n=0, r \geq 1), \frac{C}{n^{3/2}} (r=0, n \geq 1), \frac{C}{(nr)^{3/2}} (n, r \geq 1)$$

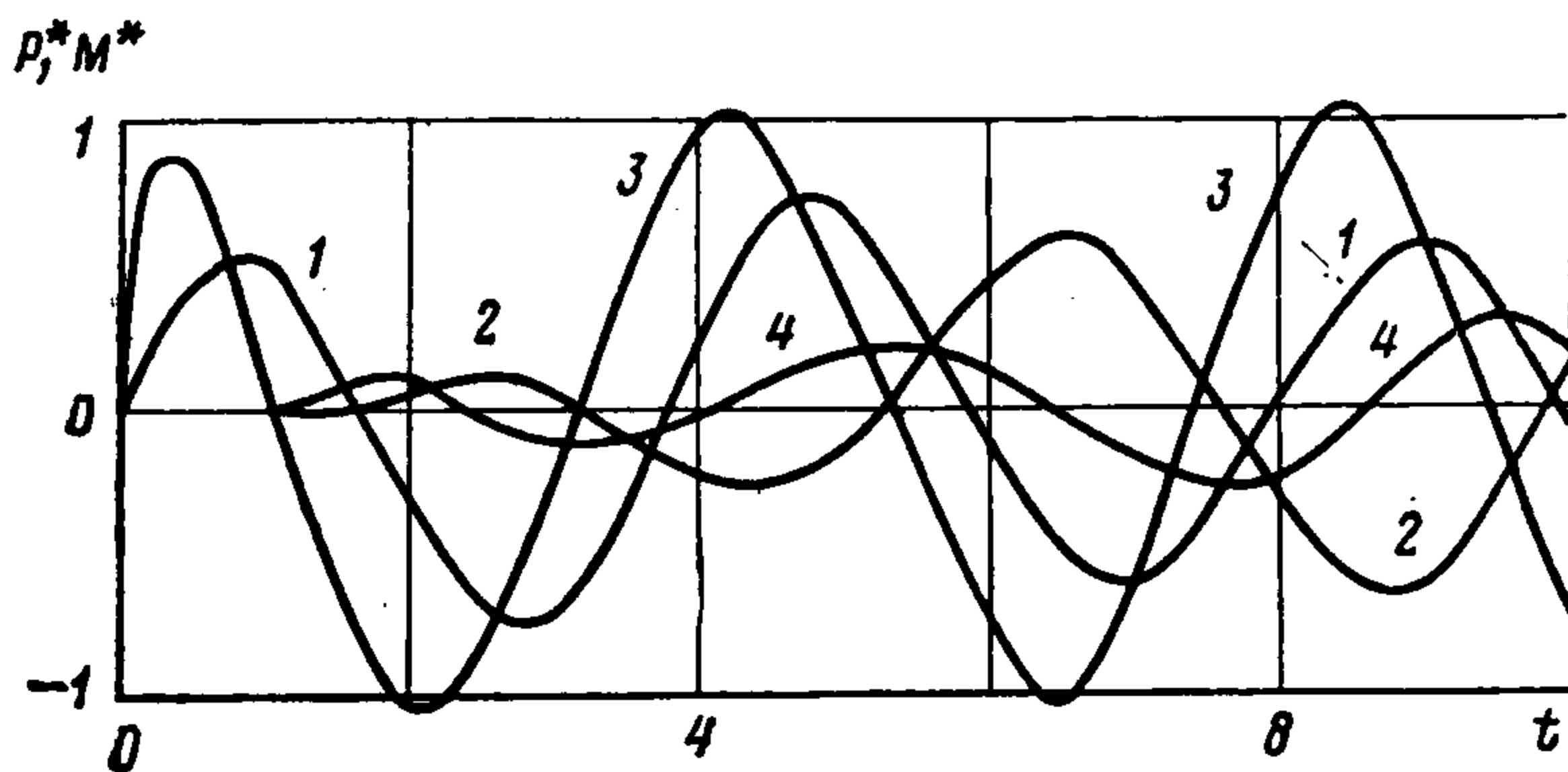
Из неравенств (3.11) вытекает, что (3.10) — нормальная система [8], а значит, и она, и система (3.9) решаются при помощи редукции.

Действуя аналогично [1], можно убедиться в том, что коэффициенты ряда (3.8) удовлетворяют асимптотике $A_{qrm} = O(1/m^2)$.

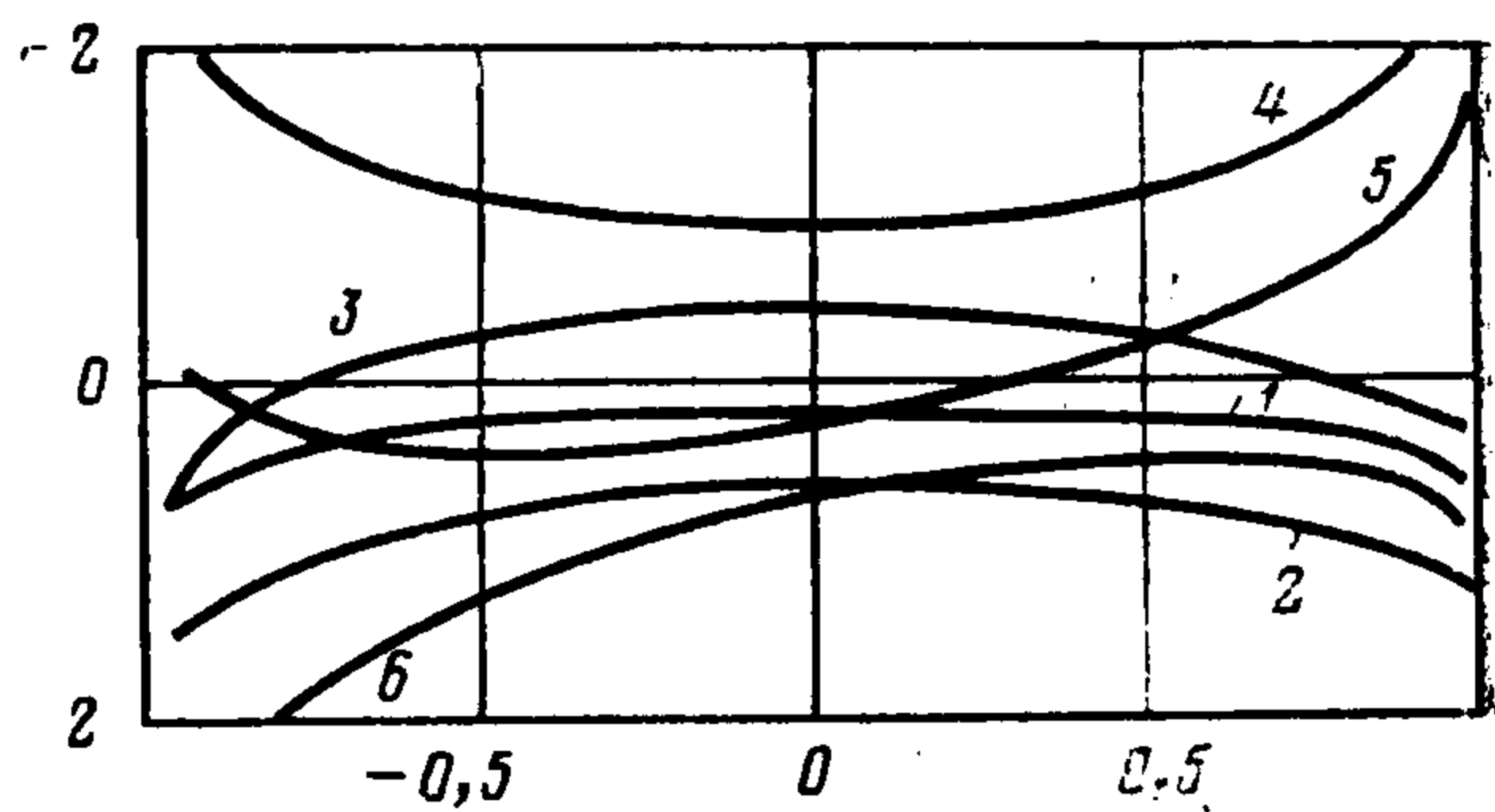
В результате последовательного решения усеченных систем при $m = 0, 1, 2, \dots$ получаем коэффициенты A_{qrm} ($q = 1, 2; r = 0, 1, 2, \dots, N; m = 0, 1, 2, \dots$) разложения (3.8). Производя обратную замену $z = 1/s$ и переходя к оригиналам, получаем ($L_m(t)$ — полином Лагерра)



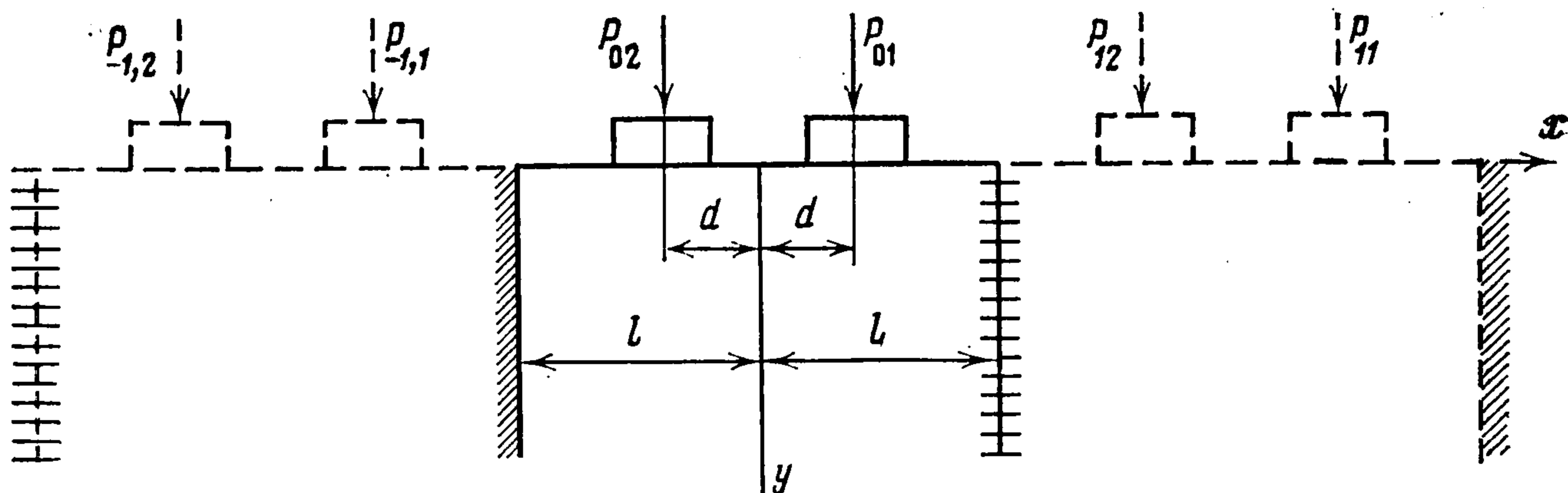
Фиг. 3



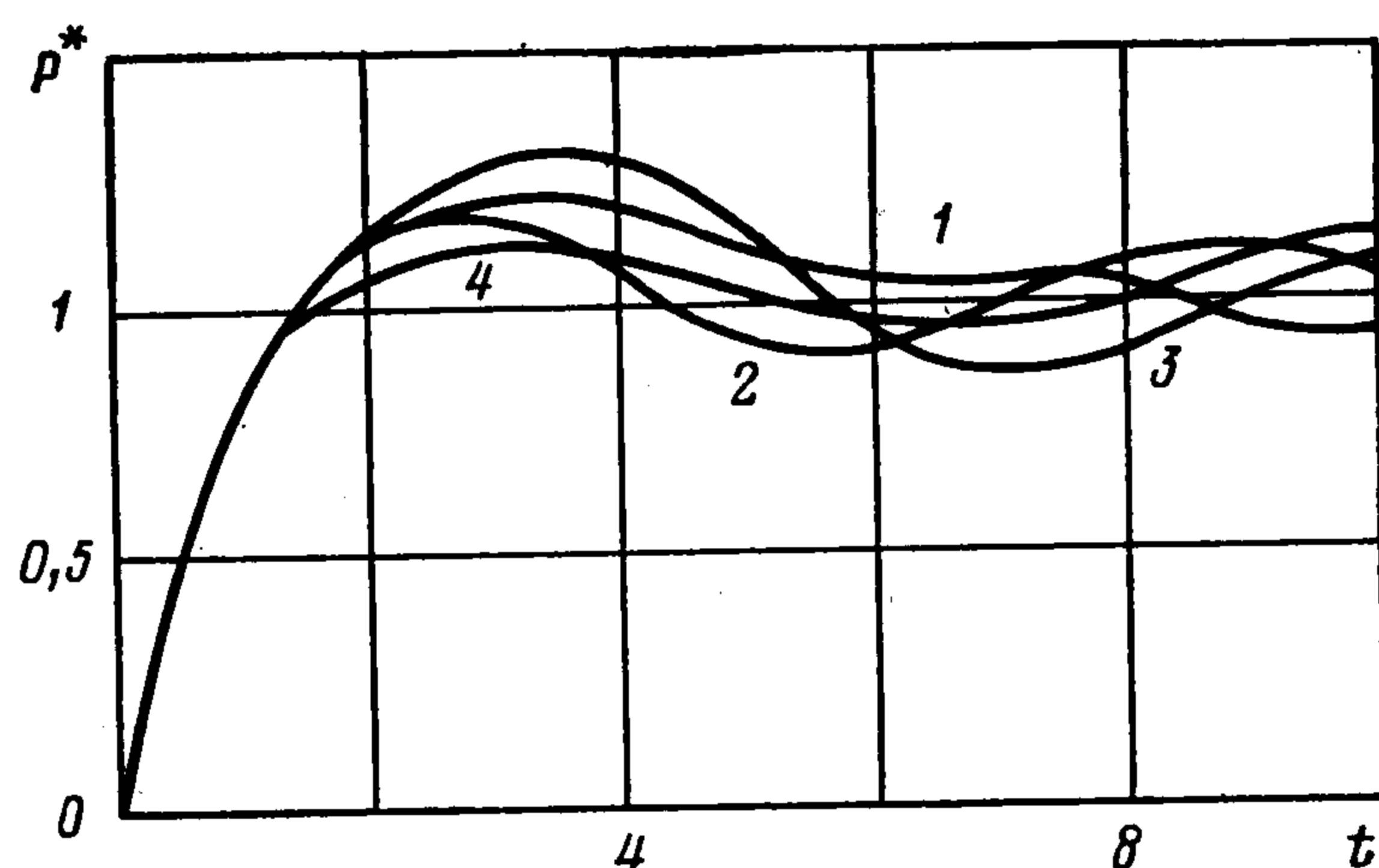
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$$A_{qr}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{qrm} (-1)^m L_m(t) \quad (q = 1, 2; r = 0, 1, 2, \dots, N)$$

Совершенно аналогично решается обобщенно-симметрическая задача, когда соответствующее неприводимое представление группы C_{1h} одномерно. В этом случае функции базиса (1.1) преобразуются по одномерному вещественному представлению. Проводя выкладки, аналогичные приведенным выше, задачу сводим к одному интегральному уравнению вида (2.10).

Для вычисления контактных напряжений при действии на штампы произвольной нагрузки из Δ_x следует просуммировать контактные напряжения, определенные при решении обобщенно-симметрических задач.

Пример 1. На торце однородной упругой полуполосы, находящейся между двумя идеально гладкими абсолютно жесткими направляющими, расположен штамп, к середине которого приложена вертикальная гармоническая сила $P(t) = H(t) \cos(\omega t)$, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда (фиг. 3). Эта задача эквивалентна периодической контактной задаче с попарно расположенными штампами. В этом случае нагрузка преобразуется по одномерному представлению с $\alpha = 0$. В результате применения изложенного выше алгоритма определяем контактные напряжения при разных значениях t . На фиг. 4 приведены графики изменения главного вектора P^* и главного момента M^* реактивных сил основания на временном интервале $[0, 10]$ при $\omega = 1,5$, $l = 4$, $d = 1,5$. Кривые 1 и 2 соответствуют изменению P^* и M^* при $d_0 = 12,5$, $d_1 = 10$; кривые 3 и 4 — при $d_0 = 100$, $d_1 = 50$. На фиг. 5 приведены эпюры контактных напряжений при $\omega = 1,5$, $l = 4$, $d = 1,5$, $d_0 = 12,5$, $d_1 = 10$ для моментов времени $t = 0,2; 0,8; 1,8; 2,8; 3,8; 4,8$ (соответственно, кривые 1—6).

Пример 2. На торце упругой полуполосы, приведенной на фиг. 6, симметрично расположены два штампа. Левая грань полуполосы упирается в идеально гладкую абсолютно жесткую поверхность («скользящая» грань), на правую грань наложены связи, препятствующие вертикальным смещениям точек грани («опертая» грань). К серединам штампов при $t = 0$ внезапно прикладываются вертикальные единичные силы $P = H(t)$. Задача определения контактных напряжений под этими штампами эквивалентна контактной задаче для полуплоскости с периодически повторяющейся системой из двух штампов. Полуплоскость склеивается из полуполос, указанных выше (фиг. 6). Нагрузка продолжается с заданной (основной) полуполосы на остальные так, чтобы в результате она оказалась симметричной относительно скользящих граней и антисимметричной относительно опертых. Можно убедиться, что $P_{mn}(t) = -\sqrt{2}H(t) \sin[(m-1)\pi/2]$. В этом случае необходимо решить одну обобщенно-симметрическую задачу, соответствующую двумерному неприводимому представлению группы C_{1h} с параметром $\alpha = \pi/2$. На фиг. 7 приведены графики изменения реакций под штампами, расположенными на основной полуполосе, в зависимости от t . Кривые 1 и 2 соответствуют реакциям под правым и левым штампами при $d = 2$, кривые 3 и 4 при $d = 2,5$, значения остальных параметров таковы: $l = 4$, $d_0 = 12,5$, $d_1 = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В. М. Нестационарная динамическая периодическая контактная задача для однородной упругой полуплоскости. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 315—323.
2. Каплан И. Г. Симметрия многоэлектронных систем. М.: Наука, 1969. 407 с.
3. Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967. 307 с.
4. Бурьшкин М. Л. Разложение вектор-функции, определенной в области с пространственной группой симметрии в трансляционно-усеченном случае. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 7, с. 582—586.
5. Бурьшкин М. Л. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 849—861.
6. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
8. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса.: Госиздат Украины, 1922. 521 с.

Одесса

Поступила в редакцию
11.V.1985