

УДК 539.3 : 534.1

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ С МЕХАНО-ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ

Клочков Б. Н.

Дается теоретическое рассмотрение механических волновых процессов в мышечной ткани в широком диапазоне частот. Как и в [1], упругие волны изучаются на основе континуальной механо-химической модели [2—5], обобщенной на случай произвольного дискретного и непрерывного спектра времен релаксации [6]. Для скорости и затухания упругих волн в тонких образцах из мышечной ткани получены аналитические выражения, содержащие упругие и вязкие параметры, а также параметры, отвечающие за анизотропию и активность мышцы. Найдены условия устойчивости мышечного образца. Проведено сопоставление с известными экспериментальными результатами и показано, что построенная модель удовлетворительно описывает характеристики упругих волн в мышце в различных ее состояниях.

Исследование упругих волн в среде является важным (зачастую единственным) способом определения ее структуры, реологических и функциональных свойств. Особенно это касается сред биологической природы, в частности мышечной ткани и тканей внутренних органов. Биологические среды, как правило, являются анизотропными и гетерогенными, причем мышечная ткань проявляет еще и активные свойства — развивает напряжение в результате химических реакций. Во время мышечного сокращения (например, одиночного) скорость и затухание упругих волн зависят от напряжения и степени укорочения мышцы. В зависимости от длины волны, способа возбуждения и направления распространения возможны [механические волны] различных типов, в которых структурные и реологические свойства среды проявляются по-разному.

Если длина волны мала по сравнению с характерными линейными размерами образца ткани, то в нем возможны продольные волны, обусловленные сжимаемостью и распространяющиеся под разными углами к осям анизотропии, а также поперечные (сдвиговые) волны. Эти типы волн применительно к мышечной ткани были рассмотрены в [1, 2, 7]. Затухание продольных волн в противоположность их скорости сильно зависит от состояния мышцы и от направления распространения (вдоль или поперек волокон) [1, 8]. В тонких по сравнению с длиной волны образцах возможны продольные [6] и изгибные волны смещения, а также крутильные волны. Продольные и изгибные волны возможны также и в образцах в виде тонких пластин, толщина которых мала по сравнению с длиной волны, а размеры в двух других направлениях велики. Представляют интерес также поверхностные волны (волны Релея) и некоторые другие.

1. Мышечная ткань считается двухфазной и многокомпонентной сплошной средой, причем активная фаза 1 — вязкоупругая, и в ней происходят химические реакции. Пассивная фаза 2 — упругая, и в ней существуют источники вещества, необходимые для активации и сокращения мышцы. Между фазами существует обмен веществом.

Система координат может быть криволинейной. Компоненты тензора напряжений среды σ^{ij} слагаются из компонент тензоров напряжений активной σ_1^{ij} и пассивной σ_2^{ij} фаз с учетом их объемного содержания φ_1 и φ_2 :

$$(1.1) \quad \sigma^{ij} = \varphi_1 \sigma_1^{ij} + \varphi_2 \sigma_2^{ij} \quad (\varphi_1 + \varphi_2 = 1)$$

Пусть деформации малы, а среда несжимаема. В этом случае реологические уравнения, описывающие мышечную ткань, имеют вид

$$(1.2) \quad \sigma_1^{ij} = p_1 g^{ij} + \sigma_{1\Sigma}^{ij}, \quad \sigma_{1\Sigma}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sigma_{1\alpha}^{ij}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{1\alpha}^{ij} &= p_\alpha' g^{ij} + L_\alpha^{ijkl} \frac{d\Delta_{kl}^\alpha}{dt} + N_\alpha^{ij} = A_\alpha^{ijkl} \eta_{kl}^\alpha \\ \sigma_2^{ij} &= p_2 g^{ij} + B^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \eta_{kl}^\alpha + \Delta_{kl}^\alpha \end{aligned}$$

Величины ε_{kl} — компоненты тензора деформаций среды в целом, η_{kl}^α — обратимая часть компонент тензора деформаций, а Δ_{kl}^α — их необратимая часть, N_α^{ij} — компоненты тензора активных напряжений, определяемые химическими реакциями, p_α' , $p_{1,2}$ — множители Лагранжа. Предполагается, что $\Delta_{ii}^\alpha = 0$ и $\eta_{ii}^\alpha = 0$, а следовательно, и $\varepsilon_{ii} = 0$. Компоненты A_α^{ijmn} и B^{ijkl} — коэффициенты упругости, а L_α^{ijkl} — вязкости, g^{ij} — компоненты метрического тензора.

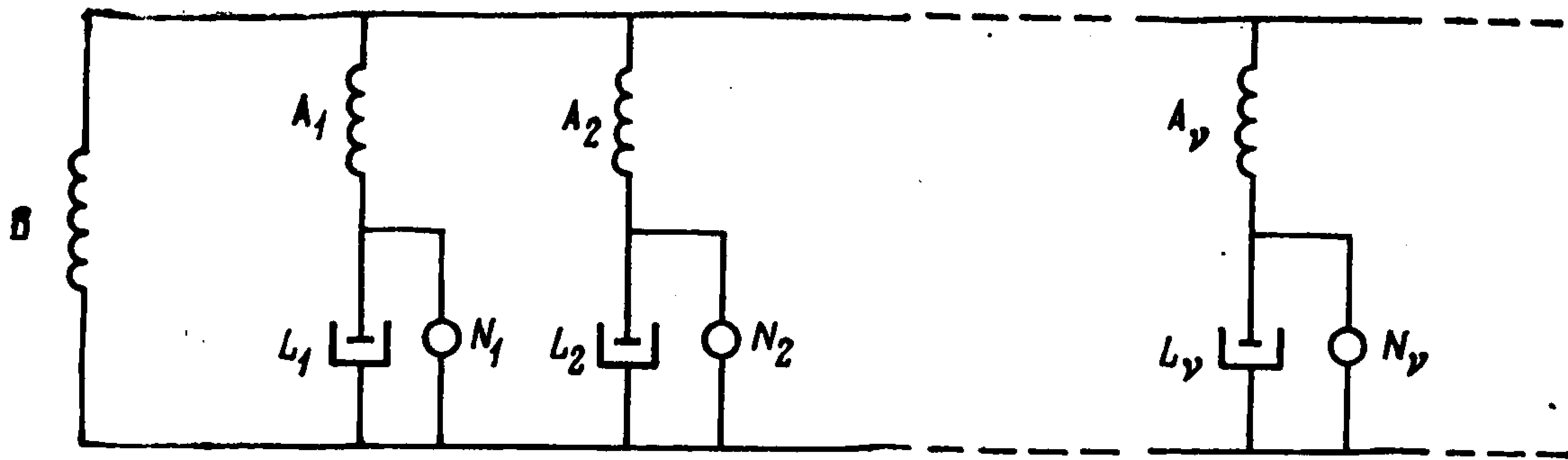
Данные уравнения получены при помощи методов механики сплошной среды и неравновесной термодинамики аналогично [1—5]. При этом использованы балансовые соотношения для концентраций компонент вещества фаз и полной энергии каждой фазы, теорема живых сил фаз, уравнения притока тепла фаз, тождество Гиббса для каждой фазы (причем, внутренняя энергия активной фазы 1 зависит от η_{mn}^α , $\alpha = 1, 2, \dots$). На их основе получено уравнение баланса энтропии среды, из которого следуют связи между термодинамическими потоками и силами, в частности уравнение в (1.2), связывающее $\sigma_{1\alpha}^{ij}$ с $d\Delta_{kl}^\alpha/dt$ и с N_α^{ij} . В отличие от [3—5], где учтены лишь медленные процессы изменения напряжений и деформаций, в модели (1.1)—(1.3) содержится полный спектр времен релаксации, который проявляется при увеличении частоты воздействия на среду. В принципе, вместо суммы в (1.2) можно записать интеграл, считая спектр времен релаксации непрерывным (см. ниже).

В модели (1.1)—(1.3) предполагается, что малый материальный объем активной фазы 1 содержит дискретный набор (вообще говоря, бесконечный) параллельно соединенных субэлементов с номерами α ($\alpha = 1, 2, \dots$) каждый из которых характеризуется коэффициентами вязкости L_α^{ijkl} , коэффициентами упругости A_α^{ijmn} , а также активным напряжением N_α^{ij} . Одномерный аналог модели изображен на фиг. 1. На ней фаза 2 состоит из упругого элемента B , а фаза 1 — из субэлементов с упругостями $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$, вязкостями $L_1, L_2, \dots, L_\nu, \dots$, активностями $N_1, N_2, \dots, N_\nu, \dots$. В результате химических реакций (например, при активации мышцы) параметры элемента B и субэлементов с $A_\alpha, L_\alpha, N_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \nu, \dots$) изменяются. Простейшая модель такого изменения в случае наличия лишь трех элементов B, A_1, L_1 предложена в [9]. Для пассивной ($N_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, \nu, \dots$) мышцы аналогичная фиг. 1 схема была предложена, например, в [10].

Величины L_α^{ijkl} , A_α^{ijmn} , B^{ijkl} — тензорные коэффициенты, определяемые метрическим тензором g^{ij} и тензором b^{ij} , характеризующим анизотропию. Для мышцы справедлива гипотеза о трансверсальной изотропии, причем выделенное направление совпадает с направлением мышечных волокон. В этом случае [11]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} B^{ijkl} &= \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \nu_1 (g^{ik} b^{jl} + g^{jk} b^{il} + g^{il} b^{jk} + g^{jl} b^{ik}) + \\ &+ \nu_2 g^{ij} b^{kl} + \nu_3 b^{ij} b^{kl} \end{aligned}$$

Здесь μ — обычный изотропный коэффициент Ламе, а $\nu_{1,2,3}$ определяют трансверсальную изотропию. Аналогичные выражения справедливы для A_α^{ijkl} (вместо μ , $\nu_{1,2,3}$ будут стоять μ_A^α , $\nu_{A1,2,3}^\alpha$) и для L_α^{ijkl} (вместо μ , $\nu_{1,2,3}$ — μ_L^α , $\nu_{L1,2,3}^\alpha$). Компоненты B^{ijkl} , A_α^{ijkl} , L_α^{ijkl} , как и N_α^{ij} , зависят от состояния мышечной ткани, которое может изменяться в результате химических процессов.



Фиг. 1

Вообще говоря, можно потребовать, чтобы условие несжимаемости выполнялось только для каждой из фаз. В этом случае появятся дополнительные слагаемые и коэффициенты в выражениях для A_α^{ijkl} и L_α^{ijkl} . Если среда сжимаема, то для ее описания справедливы уравнения (1.1)–(1.3), лишь вместо первых соотношений (1.2), (1.3) будут стоять

$$\begin{aligned} \sigma_1^{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sigma_{1\alpha}^{ij}, & \sigma_{1\alpha}^{ij} &= L_\alpha^{ijkl} \frac{d\Delta_{kl}^\alpha}{dt} + N_\alpha^{ij} = A_\alpha^{ijkl} \eta_{kl}^\alpha \\ \sigma_2^{ij} &= B^{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

причем выражения для B^{ijkl} , A_α^{ijkl} , L_α^{ijkl} будут содержать дополнительные по сравнению с (1.4) слагаемые [1] и $\varepsilon_{ii} \neq 0$, $\eta_{ii}^\alpha \neq 0$, $\Delta_{ii}^\alpha \neq 0$.

Ради простоты можно положить $N_\alpha^{ij} = 0$ при $\alpha \geq 2$, $N_1^{ij} \neq 0$, а также $L_1^{ijkl} = 0$. Компоненты тензора активных напряжений N_1^{ij} примем в виде

$$(1.5) \quad N_1^{ij} = n_1^{ij} + m_1^{ij}$$

где n_1^{ij} отвечает за наличие активных напряжений, развиваемых в результате биохимических реакций, а m_1^{ij} отражает вклад в активные напряжения в результате упругого деформирования образовавшихся при биохимических реакциях микросвязей (см. п. 5).

Выражение для n_1^{ij} получается из условия постоянства числа мышечных волокон в поперечном сечении образца при его деформировании (вмороженности анизотропии) [2, 3].

Для конечных деформаций имеем

$$(1.6) \quad n_1^{ij} = \gamma_1 \sqrt{\frac{g_{33}}{G_{33}}} b^{ij}, \quad b^{ij} = \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^3} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^3}$$

$$(1.7) \quad dx^i = \left(\delta_k^i + \frac{\partial w^i}{\partial x^k} \right) d\xi^k, \quad G_{33} = 2\varepsilon_{33} + g_{33}$$

где x^i — эйлеровы, а ξ^i — лагранжевы координаты, причем ось ξ^3 совпадает с направлением мышечного волокна, w^k — компоненты вектора перемещений среды, δ_k^i — символ Кронекера, $\gamma_1 = \gamma_1(l_\Delta)$ — параметр активности, зависящий от степени перекрытия активных центров структурных элементов волокон мышечной ткани l_Δ , на которых образуются микросвязи

$$(1.8) \quad l_\Delta = (1 + 2\varepsilon_{33}/g_{33})^{1/2} - (1 + 2\eta_{33}^1/g_{33})^{1/2}$$

Компоненты g_{33} , G_{33} , ε_{33} , η_{33}^1 в (1.6)–(1.8) взяты в системе координат ξ^i , а n_1^{ij} , b^{ij} , w^i — в x^i .

Если деформации малы и ось x^3 совпадает с направлением волокон, то

$$(1.9) \quad n_1^{ij} = \frac{1}{g_{33}} \left(\gamma_1 \delta_3^i \delta_3^j + \gamma_1 \delta_3^i \frac{\partial w^j}{\partial x^3} + \gamma_1 \delta_3^j \frac{\partial w^i}{\partial x^3} + \gamma_1' \delta_3^i \delta_3^j \Delta_{33}^1 - \gamma_1 \frac{\varepsilon_{33}}{g_{33}} \delta_3^i \delta_3^j \right), \quad \gamma_1' = \frac{\partial \gamma_1}{\partial l_\Delta}, \quad l_\Delta = \frac{\Delta_{33}^1}{g_{33}}$$

$$(1.10) \quad m_1^{ij} = \Gamma_1^{ijkl} \Delta_{kl}^1$$

где Γ_1^{ijkl} определяет упругие свойства микросвязей. Для Γ_1^{ijkl} справедлива формула типа (1.4), причем вместо $\mu, \nu_{1,2,3}$ будут стоять $\Gamma_\mu^1, \Gamma_{\nu_{1,2,3}}^1$.

Перепишем уравнения (1.2), исключив Δ_{kl}^α :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} L_\alpha^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\alpha} \sigma_{1\alpha}^{ij} + \sigma_{1\alpha}^{ab} &= L_\alpha^{abkl} \epsilon_{kl} + N_{\alpha p}^{ab} \\ A_{ijkl}^{\circ\alpha} A_\alpha^{ijmn} &= \delta_k^m \delta_l^n, \quad N_{\alpha p}^{ab} = N_\alpha^{ab} + p_\alpha' g^{ab} \end{aligned}$$

Поскольку N_α^{ab} зависят от Δ_{kl}^α и ϵ_{kl} , то необходимо еще привлечь соотношение

$$(1.12) \quad \Delta_{mn}^\alpha = \epsilon_{mn} - A_{ijmn}^{\circ\alpha} \sigma_{1\alpha}^{ij}$$

При достаточно быстро протекающих механических воздействиях вязкие свойства мышечной ткани не успевают проявиться полностью. Пусть, например, смещение в ткани происходит с частотой f . Характерные времена изменения компонент $\sigma_{1\alpha}^{ij}$ и ϵ_{kl} равны, соответственно, величинам $\tau_\alpha^\sigma(i, j)$ и $\tau_\alpha^\epsilon(k, l)$, являющимся комбинацией $L_\alpha^{ijkl}, A_\alpha^{ijkl}, N_\alpha^{ij}$ (см. (1.5), (1.9)–(1.12)). Если $f \gg 1/\tau_\alpha^\sigma(i, j)$, то уравнение (1.11) перейдет в

$$L_\alpha^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\alpha} \sigma_{1\alpha}^{ij} = L_\alpha^{abkl} \epsilon_{kl} + N_{\alpha p}^{ab}$$

Если $f \gg 1/\tau_\alpha^\sigma(i, j), 1/\tau_\alpha^\epsilon(k, l)$, то уравнение (1.11) еще более упрощается:

$$(1.13) \quad \sigma_{1\alpha}^{ij} = A_\alpha^{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Таким образом, при достаточно большой частоте воздействия f вкладом активных напряжений N_α^{ij} можно пренебречь и отличие активной и пассивной мышц будет содержаться лишь в коэффициентах $A_\alpha^{ijkl}, B^{ijkl}, L_\alpha^{ijkl}$.

В случае, когда $f \ll 1/\tau_\alpha^\sigma(i, j)$, имеем

$$\sigma_{1\alpha}^{ab} = L_\alpha^{abkl} \epsilon_{kl} + N_{\alpha p}^{ab}$$

При $f \ll 1/\tau_\alpha^\sigma(i, j), 1/\tau_\alpha^\epsilon(k, l)$ получаем

$$(1.14) \quad \sigma_{1\alpha}^{ab} = N_{\alpha p}^{ab}$$

Пусть справедливы условия

$$(1.15) \quad \dots, \frac{1}{\tau_{\nu-1}^\sigma(i, j)}, \frac{1}{\tau_{\nu-1}^\epsilon(k, l)} \ll f \sim \frac{1}{\tau_\nu^\sigma(i, j)} \sim \frac{1}{\tau_\nu^\epsilon(k, l)} \ll \frac{1}{\tau_1^\sigma(i, j)}, \frac{1}{\tau_{\nu+1}^\epsilon(k, l)}, \dots$$

Тогда субэлементы активной фазы 1 с номерами 1, 2, 3, ..., $\nu - 1$ можно описывать уравнениями (1.13), т. е. эти субэлементы практически становятся чисто упругими. Субэлементы с номерами $\nu + 1, \nu + 2, \dots$ можно описывать уравнениями (1.14), которые в отсутствие активных напряжений превращаются в тривиальные. Таким образом, при условиях (1.15)

уравнение, связывающее $\sigma_{1\Sigma}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sigma_{1\alpha}^{ij}$ с ϵ_{ij} , имеет вид

$$(1.16) \quad \begin{aligned} L_\nu^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\nu} \sigma_{1\Sigma}^{ij} + \sigma_{1\Sigma}^{ab} &= A_\Sigma^{abkl} \epsilon_{kl} + L_\nu^{abkl} (A_{ijkl}^{\circ\nu} A_\Sigma^{ijmn} + \\ &+ \delta_k^m \delta_l^n \epsilon_{mn} + N_{\Sigma p}^{ab} + N_{\nu p}^{ab} + L_\nu^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\nu} N_{\Sigma p}^{ij} \\ A_\Sigma^{abkl} &= \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} A_\alpha^{abkl}, \quad N_{\Sigma p}^{ab} = \sum_{\alpha=\nu+1}^{\infty} N_{\alpha p}^{ab} \end{aligned}$$

Если справедливы упомянутые выше условия, а именно $N_\alpha^{ij} = 0$ для $\alpha \geq 2$, $L_1^{ijkl} = 0$ и

$$A_{\Sigma 2}^{abkl} = \sum_{\alpha=2}^{\nu-1} A_\alpha^{abkl}, \quad p_\Sigma = \sum_{\alpha=\nu+1}^{\infty} p_\alpha'$$

то вместо (1.16) получаем более простые уравнения

$$(1.17) \quad L_\nu^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\nu} \sigma_{1\Sigma}^{ij} + \sigma_{1\Sigma}^{ab} = A_{\Sigma 2}^{abkl} \varepsilon_{kl} + L_\nu^{abkl} (A_{ijkl}^{\circ\nu} A_{\Sigma 2}^{ijmn} + \delta_k^m \delta_l^n) \varepsilon_{mn} + \\ + N_{1p}^{ab} + p_\Sigma g^{ab} + L_\nu^{abkl} A_{ijkl}^{\circ\nu} (N_{1p}^{ij} + p_\Sigma g^{ij})$$

Итак, на достаточно высоких частотах упругие свойства фазы 1 определяются суммарными коэффициентами упругости субэлементов 1, 2, ..., ..., $\nu - 1$, а вязкие — коэффициентами вязкости «выделенного» субэлемента ν . На низких частотах ($\nu = 2$), когда

$$\frac{1}{\tau_2^e(k, l)}, \quad \frac{1}{\tau_2^\sigma(i, j)} \sim f \ll \frac{1}{\tau_3^e(k, l)}, \quad \frac{1}{\tau_3^\sigma(i, j)}; \quad \frac{1}{\tau_4^e(k, l)}, \quad \frac{1}{\tau_4^\sigma(i, j)}; \dots$$

уравнение (1.17) переходит в

$$L_2^{abkl} A_{ijkl}^{\circ 2} \sigma_{1\Sigma}^{ij} + \sigma_{1\Sigma}^{ab} = L_2^{abkl} \varepsilon_{kl} + N_{1p}^{ab} + L_2^{abkl} A_{ijkl}^{\circ 2} (N_{1p}^{ij} + p_\Sigma g^{ij}) + p_\Sigma g^{ab}$$

В принципе, на любых частотах в достаточно узком диапазоне можно приближенно пользоваться уравнениями типа (1.17) вместо уравнений (1.2). Однако значения коэффициентов в них будут зависеть от средней частоты f_0 выбранного диапазона. При этом $L_\nu^{ijkl} A_{mnkl}^{\circ\nu}$ с ростом f_0 уменьшаются, а $A_{\Sigma 2}^{ijkl}$ увеличиваются.

Уравнения (1.1), (1.17), (1.3) при учете первого соотношения в (1.2) после исключения Δ_{kl}^1 из N_{1p}^{ij} дают связь между компонентами тензоров напряжений σ^{ij} и деформаций ε_{ij} , характеризующих мышечную ткань как целое.

Приведем интегральную форму связи компонент тензора напряжений σ^{ij} и деформаций ε_{ij} . Сначала для отдельного субэлемента α выпишем связь между компонентами $\sigma_{1\alpha}^{ij}$ и ε_{ij} , исключив Δ_{ij}^α . В силу (1.5), (1.9), (1.10) выражение для N_{1p}^{ij} можно представить в виде

$$N_{1p}^{ij} = N_{01}^{ij} + N_{\varepsilon 1}^{ijkl} \varepsilon_{kl} + N_{\Delta 1}^{ijkl} \Delta_{kl}^1$$

Тогда для субэлемента с номером $\alpha = 1$ из (1.2) с учетом (1.12) имеем

$$(1.18) \quad C_{\alpha kl}^{ab} \sigma_{1\alpha}^{kl} + a_{\alpha mn}^{ab} \sigma_{1\alpha}^{mn} = r_\alpha^{ab} \\ C_{\alpha kl}^{ab} = \delta_k^a \delta_l^b + N_{\Delta \alpha}^{abij} A_{ijkl}^{\circ \alpha}, \quad a_{\alpha mn}^{ab} = L_\alpha^{abkl} A_{klmn}^{\circ \alpha} \\ r_\alpha^{ab} = L_\alpha^{abkl} \varepsilon_{kl} + (N_{\varepsilon \alpha}^{abkl} + N_{\Delta \alpha}^{abkl}) \varepsilon_{kl} + N_{0\alpha}^{ab} + p_\alpha' g^{ab}$$

Применив к (1.18) преобразование Лапласа

$$F_{1\alpha}^{ab}(s) = \int_0^\infty \sigma_{1\alpha}^{ab}(t) e^{-st} dt, \quad F_{r\alpha}^{ab}(s) = \int_0^\infty r_\alpha^{ab}(t) e^{-st} dt$$

или получим

$$(1.19) \quad F_{1\alpha}^{kl} = b_{\alpha ab}^{\circ kl} F_{r\alpha}^{ab} + b_{\alpha ab}^{\circ kl} a_{\alpha mn}^{ab} \sigma_{1\alpha}^{mn}(t=0) \\ b_{\alpha ab}^{\circ mn} (C_{\alpha kl}^{ab} + s a_{\alpha kl}^b) = \delta_k^m \delta_l^n$$

Полагая для простоты $\sigma_{1\alpha}^n(t=0) = 0$ и применяя к (1.19) обратное преобразование Лапласа, получим

$$(1.20) \quad \sigma_{1\alpha}^{kl}(t) = \int_0^t f_{\alpha ab}^{kl}(t-\tau) r_\alpha^{ab}(\tau) d\tau$$

$$(1.21) \quad f_{\alpha ab}^{kl}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} e^{st} b_{\alpha ab}^{\circ kl}(s) ds$$

Просуммировав (1.20) по всем α , найдем σ_{Σ}^{kl} и при помощи (1.1)—(1.3) выпишем искомую связь между σ^{ij} и ε_{ij}

$$(1.22) \quad \sigma^{ij} = p g^{ij} + \varphi_2 B^{ijkl} \varepsilon_{kl} + \varphi_1 \int_0^t \varphi^{ijmn} (t - \tau) \dot{\varepsilon}_{mn}(\tau) d\tau + \\ + \varphi_1 \int_0^t f_{1ab}^{ij} (t - \tau) [(N_{\varepsilon 1}^{abmn} + N_{\Delta 1}^{abmn}) \varepsilon_{mn}(\tau) + N_{01}^{ab}] d\tau$$

$$(1.23) \quad \varphi^{klmn}(t) = \sum_{\alpha=2}^{\infty} f_{\alpha ab}^{kl}(t) L_{\alpha}^{abmn}$$

В случае непрерывного распределения спектра времен релаксации компоненты тензора функции релаксации $\varphi^{ijmn}(t)$ не выражаются через сумму функций (1.21) в виде (1.23). В этом смысле уравнения (1.22) можно считать более общими, чем (1.1)—(1.3).

В [1, 2, 7] в рамках модели типа (1.1)—(1.3), (1.16) с учетом сжимаемости получены выражения для скорости и затухания продольных волн, распространяющихся вдоль мышечных волокон и поперек них, при этом вклад активности N_{α}^{ij} определяется лишь членом типа (1.10). Для поперечных волн [1], распространяющихся вдоль волокон, на скорость и затухание кроме (1.10) влияет и член типа (1.9), тогда как при распространении перпендикулярно — лишь (1.10). В [6] приведены выражения для скорости и затухания продольных волн в тонких мышечных образцах, полученные в рамках модели (1.1)—(1.4), (1.16) при $N_{\alpha}^{ij} \neq 0$, $L_{\alpha}^{ijkl} \neq 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots$).

2. Теперь рассмотрим цилиндрический образец произвольного сечения из мышечной ткани, описываемой рассмотренными выше уравнениями. Мышечные волокна параллельны оси образца. Примем, для простоты, что боковая поверхность образца свободна от напряжений. Пусть ось $x^3 = z$ прямоугольной декартовой системы координат x^i направлена вдоль оси образца. Считаем, что образец достаточно тонкий. В таком образце отлична от нуля только одна компонента тензора напряжений σ^{33} .

Пусть образец подвержен продольным смещениям (вдоль оси образца). Отличны от нуля также и поперечные смещения. Можно показать, что $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, $\Delta_{11}^{\alpha} = \Delta_{22}^{\alpha}$, $\eta_{11}^{\alpha} = \eta_{22}^{\alpha}$, $\sigma_1^{11} = \sigma_1^{22}$, $\sigma_2^{11} = \sigma_2^{22}$. Условия несжимаемости имеют вид: $2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} = 0$, $2\Delta_{11}^{\alpha} + \Delta_{33}^{\alpha} = 0$, $2\eta_{11}^{\alpha} + \eta_{33}^{\alpha} = 0$. Тогда определяющие уравнения (1.2), (1.17), (1.3) запишем следующим образом:

$$(2.1) \quad \sigma_1^{11} = p_1 + A_{\Sigma 1} \varepsilon_{33} + \sigma_{1v}^{11} + N_{1p}^{11} \\ \sigma_{1v}^{11} = p_v' + L_{v1} \Delta_{33}^{1v} = A_{v1} \eta_{33}^{1v}, \quad N_{1p}^{11} = A_1 \eta_{33}^{11}$$

$$(2.2) \quad \sigma_1^{33} = p_1 + A_{\Sigma 3} \varepsilon_{33} + \sigma_{1v}^{33} + N_{1p}^{33} \\ \sigma_{1v}^{33} = p_v' + L_{v3} \Delta_{33}^{1v} = A_{v3} \eta_{33}^{1v}, \quad N_{1p}^{33} = A_3 \eta_{33}^{11}$$

$$(2.3) \quad \sigma_2^{11} = p_2 + B_1 \varepsilon_{33}, \quad \sigma_2^{33} = p_2 + B_3 \varepsilon_{33}$$

$$A_{\Sigma 1} = \sum_{\alpha=2}^{v-1} (-\mu_A^{\alpha} + \nu_{A2}^{\alpha}), \quad A_{v1} = -\mu_A^v + \nu_{A2}^v, \quad A_1 = -\mu_A^1 + \nu_{A2}^1$$

$$L_{v1} = -\mu_L^v + \nu_{L2}^v, \quad B_1 = -\mu + \nu_2, \quad A_{\Sigma 3} = \sum_{\alpha=2}^{v-1} (2\mu_A^{\alpha} + 4\nu_{A1}^{\alpha} + \nu_{A2}^{\alpha} + \nu_{A3}^{\alpha})$$

$$A_{v3} = 2\mu_A^v + 4\nu_{A1}^v + \nu_{A2}^v + \nu_{A3}^v, \quad A_3 = 2\mu_A^1 + 4\nu_{A1}^1 + \nu_{A2}^1 + \nu_{A3}^1$$

$$L_{v3} = 2\mu_L^v + 4\nu_{L1}^v + \nu_{L2}^v + \nu_{L3}^v, \quad B_3 = 2\mu + 4\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

Граничные условия на боковой поверхности образца при учете (2.1), (2.3) приводят к соотношению

$$(2.4) \quad \varphi_1 (p_1 + A_{\Sigma 1} \varepsilon_{33} + A_{v1} \eta_{33}^{1v} + A_1 \eta_{33}^{11}) + \varphi_2 (p_2 + B_1 \varepsilon_{33}) = 0$$

Для σ^{33} имеем выражение

$$(2.5) \quad \sigma^{33} = \varphi_1 (p_1 + A_{\Sigma 3} \varepsilon_{33} + A_{\nu 3} \eta_{33}^\nu + A_3 \eta^{133'}) + \varphi_2 (p_2 + B_3 \varepsilon_{33})$$

Для активных напряжений в случае малых деформаций из (1.5), (1.9), (1.10) следуют соотношения

$$(2.6) \quad N_1^{33} = n_1^{33} + m_1^{33} = \gamma + \gamma' \Delta_{33}^1 + \gamma \varepsilon_{33} + \Gamma_3 \Delta_{33}^1$$

$$(2.7) \quad N_1^{11} = m_1^{11} = \Gamma_1 \Delta_{33}^1$$

$$(\gamma \equiv \gamma_1, \Gamma_3 = 2\Gamma_\mu + 4\Gamma_{\nu 1} + \Gamma_{\nu 2} + \Gamma_{\nu 3}, \Gamma_1 = -\Gamma_\mu + \Gamma_{\nu 2})$$

Исключая Δ_{33}^ν , Δ_{33}^1 , $\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2$ из (2.4)–(2.7) и подставляя их в $\sigma^{33} = \varphi_1 \sigma_1^{33} + \varphi_2 \sigma_2^{33}$ при помощи (2.2), (2.3), получим уравнение, связывающее σ^{33} и ε_{33}

$$(2.8) \quad L_{\nu p} \sigma^{33} + \sigma^{33} = E \varepsilon_{33} + L_{\nu p} (E + \varphi_1 E_\nu) \varepsilon_{33} + \gamma_0$$

$$L_{\nu p} = \frac{L_\nu}{E_\nu}, \quad E = \varphi_2 E_2 + \varphi_1 E_\Sigma + \varphi_1 E_1 \frac{\gamma + \gamma' + E_\Gamma}{E_1 + \gamma' + E_\Gamma}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma \varphi_1 E_1}{E_1 + \gamma' + E_\Gamma}$$

$$E_\nu = A_{\nu 3} - A_{\nu 1}, \quad E_1 = A_3 - A_1, \quad E_2 = B_3 - B_1$$

$$E_\Sigma = A_{\Sigma 3} - A_{\Sigma 1}, \quad E_\Gamma = \Gamma_3 - \Gamma_1, \quad L_\nu = L_{\nu 3} - L_{\nu 1}$$

Коэффициенты в (2.8) постоянны во времени. Величина E_2 — модуль Юнга упругой пассивной фазы 2, E_1 , E_ν , E_Σ — модули Юнга упругих элементов в активной фазе 1, E_Γ — модуль Юнга микросвязей, L_ν — коэффициент вязкости фазы 1; γ_0 имеет смысл активного напряжения мышцы.

3. В качестве примера волнового процесса исследуем продольные волны в образце из мышечной ткани, поперечный линейный размер которого мал по сравнению с длиной волны. Волновые процессы происходят на некотором напряженно-деформированном состоянии (фоне), возникающем после активации мышцы. Приведем соотношения только для волны.

Используя уравнение движения и связь между деформацией ε_{33} и перемещением $w_3 = w^3$

$$\rho \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad \rho v_0^2 = E$$

при помощи (2.8) получим уравнение для исследования волн в виде

$$(3.1) \quad \rho L_{\nu p} \frac{\partial^3 w_3}{\partial t^3} + \rho \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = \rho v_0^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} + L_{\nu p} (\rho v_0^2 + \varphi_1 E_\nu) \frac{\partial^3 w_3}{\partial t \partial z^2}$$

Оно формально не отличается от известного уравнения в теории линейной вязкоупругости [12]. При исследовании решения основной интерес здесь представляет его зависимость от активных параметров γ , γ' , E_Γ , которые могут изменяться в зависимости от состояния мышечной ткани, поскольку она является средой с переменной структурой.

Если частота волны f велика по сравнению с характерными частотами мышечного сокращения τ_c^{-1} , то коэффициенты в (3.1) могут быть медленными функциями времени (например, при фоновом одиночном сокращении), причем $\gamma' = 0$. Если, наоборот, $f \ll \tau_c^{-1}$, то для некоторого постоянного во времени фонового активированного состояния в (3.1) необходимо положить $E_\Sigma = 0$, $\nu = 2$, а $\gamma' \neq 0$. При $f \sim \tau_c^{-1}$ модель требует уточнения.

Подставляя $w_3 = w_0 \exp [i(\omega t - kz)]$ в (3.1), где w_0 — постоянная амплитуда волны, получим дисперсионное уравнение

$$(3.2) \quad k^2 = \frac{\omega^2 (1 + i L_{\nu p} \omega)}{v_0^2 (1 + i a L_{\nu p} \omega)}, \quad a = \frac{\rho v_0^2 + \varphi_1 E_\nu}{\rho v_0^2}$$

Считая частоту ω действительной (заданной), найдем при помощи (3.2) скорости $v_{1,2}$ и коэффициенты затухания $\kappa_{1,2}$ продольных волн, рас-

пространяющихся в противоположные стороны (мышечный образец считаем бесконечным в продольном направлении)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} w_3 &= w_0 \exp [i(\omega t \mp k_d z)] \exp (\pm k_m z), \quad k = k_d + ik_m \\ k_d &= [(n^2 + m^2)^{1/2} + n]^{1/2}, \quad v_{1,2} = \pm \frac{\omega}{k_d}, \quad \kappa_{1,2} = \mp k_m = \mp \frac{m}{k_d} \\ m &= \frac{L_{vp} \omega k_0^2 (1 - a)}{2 [1 + (L_{vp} \omega a)^2]}, \quad n = mL_{vp} \omega a + \frac{k_0^2}{2}, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2}{v_0^2} \end{aligned}$$

Если пренебречь затуханием ($L_{vp} \omega \ll 1$), то из (3.3) при $v_0^2 > 0$ получим выражение для скорости распространения продольной волны $v_{1,2}$ в виде

$$(3.4) \quad v_{1,2} = \pm (v_0^2)^{1/2} = \pm \frac{\Lambda^{1/2}}{\bar{\rho}^{1/2}}, \quad \Lambda = \varphi_2 E_2 + \varphi_1 E_\Sigma + \varphi_1 E_1 \frac{\gamma + \gamma' + E_\Gamma}{E_1 + \gamma' + E_\Gamma}$$

Из (3.4) следует, что скорость распространения зависит не только от модулей Юнга E_2 , E_1 , E_Σ пассивных элементов фаз (которые, впрочем, могут зависеть от состояния мышцы), но и от модулей Юнга E_Γ микросвязей, возникающих в результате биохимических реакций после возбуждения мышцы, а также от параметров активности: γ , характеризующего активное напряжение, и γ' , зависящего от деформации в фоновом состоянии. Если предположить, для определенности, что дополнительные упругие коэффициенты, возникающие из-за анизотропии, $\nu_{1,2,3}$, $\nu_{A1,2,3}^\alpha$, $\nu_{L1,2,3}^\alpha$, $\Gamma_{\nu_{1,2,3}}$ малы по сравнению с обычными изотропными упругими коэффициентами Ламе μ , μ_A^α , μ_L^α , Γ_μ соответственно, то E_2 , E_1 , E_ν , E_Σ , E_Γ , L_ν положительны. Величина $\gamma \geq 0$, а γ' может быть положительна, равна нулю или отрицательна.

Вычислить скорость и затухание данной волны можно зная $\varphi_{1,2}$, а также вязкоупругие и активные параметры, которые можно определить в статических и динамических экспериментах на образце мышечной ткани. Наоборот, зная скорость и затухание волны в различных состояниях мышцы, можно определить некоторые вязкоупругие и активные параметры ткани или хотя бы связи между ними.

Из (3.3) следует, что $m < 0$ при всех разумных значениях параметров, т. е. продольные волны по мере распространения будут затухать.

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости в данной системе. Из (3.2), обозначая $\omega = -is_1$, получим, что

$$(4.1) \quad L_{vp} s_1^3 + s_1^2 + L_{vp} a v_0^2 k^2 s_1 + v_0^2 k^2 = 0$$

Величина $\omega = \omega_d + i\omega_m$ при $\omega_m > 0$ даст устойчивость во времени; при этом действительная часть s_1 отрицательна. При действительном k условия отрицательности действительных частей корней уравнения (4.1) по критерию Рауса — Гурвица сводятся к следующему:

$$(4.2) \quad v_0^2 \geq 0$$

Из (4.2) следует, что система устойчива, если

$$(4.3) \quad \Lambda \geq 0$$

Поскольку в нижней полуплоскости ω ($\omega_m < 0$) нет точек ветвления функций $k_{1,2}(\omega)$ из (3.2), то неустойчивость при невыполнении (4.3) будет конвективной [13].

Пусть образец из мышечной ткани имеет конечную длину L . Рассмотрим частный случай жесткого крепления образца, когда граничные ус-

словия сводятся к следующим:

$$(4.4) \quad w_3(z=0) = w_3(z=L) = 0$$

Используя частное решение волнового уравнения (3.1) в виде

$$w_3(z, t) = e^{i\omega t} (C_1 e^{-ikz} + C_2 e^{ikz})$$

где $k = k(\omega)$ находится из дисперсионного уравнения (3.2), и граничные условия (4.4), получим уравнение для нахождения комплексной частоты ω

$$(4.5) \quad iL_{vp}\omega^3 + \omega^2 - iL_{vp}av_0^2 \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \omega - \frac{\pi^2 n^2}{L^2} v_0^2 = 0$$

Уравнение (4.5) при $\omega = -is_1$ аналогично уравнению (4.1), и его анализ дает условия устойчивости, совпадающие с (4.2) для $n^2 > 0$. Для $n = 0$ условие устойчивости, как следует из (4.5), всегда выполнено.

Таким образом, для образца мышечной ткани конечной длины L невыполнение условий (4.3) приводит к абсолютной неустойчивости, в то время как для образца бесконечной длины — только к конвективной неустойчивости.

Неустойчивость, возможная в принципе на низких частотах $f \ll \tau_c^{-1}$ при $\gamma' < 0$, определяется, как следует из (4.3), одним из следующих условий:

$$\begin{aligned} -E_1 - E_\Gamma < \gamma' < -E_1 - E_\Gamma + \frac{E_1 - \gamma}{1 + \varphi_2 E_2 / \varphi_1 E_1} \quad (\gamma < E_1) \\ -E_1 - E_\Gamma + \frac{E_1 - \gamma}{1 + \varphi_2 E_2 / \varphi_1 E_1} < \gamma' < -E_1 - E_\Gamma \quad (\gamma > E_1) \end{aligned}$$

Заметим, что если $N_\alpha^{ij} \neq 0$, $L_\alpha^{ijkl} \neq 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), причем выражения для N_α^{ij} имеют структуру типа (1.9), (1.10), то выполнение условий неустойчивости системы облегчается (неустойчивость в принципе может быть даже при $\gamma_\alpha' > 0$ за счет достаточно большой величины γ_α). Возможно усиление волн.

При потере устойчивости (условия (4.3) не выполняются) образец мышечной ткани конечной длины, возможно, становится генератором автоколебаний, параметры которых можно найти при учете нелинейных свойств мышцы. Экспериментально наблюдавшиеся автоколебания на мышечных препаратах описаны, например, в [14].

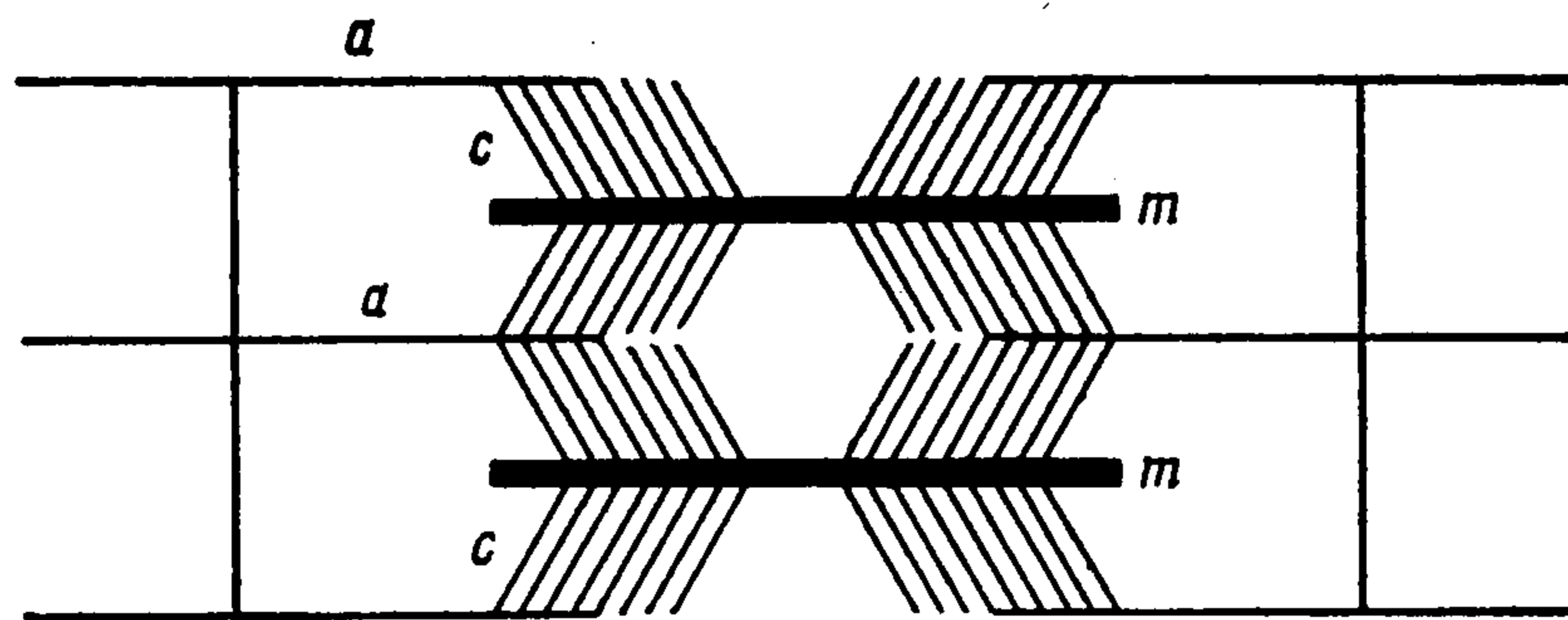
5. Проведем некоторые сопоставления полученных выражений для скоростей и затуханий (3.3), (3.4) с результатами экспериментов [10, 15—17].

Вначале напомним вкратце характерные особенности микроструктуры мышечной ткани [18]. На микроуровне волокна мышечной ткани образованы параллельно расположенными миофибриллами, которые в свою очередь заполнены белковыми микро-нитями двух типов — актиновыми (a) (тонкими) и миозиновыми (m) (толстыми) (фиг. 2). Сокращение мышцы сопровождается движением одних нитей между другими с участием замыкания и размыкания микросвязей (c) (мостиков) между нитями. Мышца может находиться в различных состояниях: пассивном (мостики разомкнуты), одиночном сокращении (в ответ на одиночный возбуждающий сигнал), тетавическом сокращении (периодическое возбуждение с высокой частотой), ригорном или контрактуре (мостики замкнуты и фиксированы). При этом механические характеристики (например, упругость и вязкость) нитей и мостиков, вообще говоря, зависят от состояния мышечной ткани.

Пусть условия устойчивости (4.3) выполнены. В этом случае выражение для скорости распространения продольной волны в образце из мышечной ткани (3.4) дает монотонное увеличение скорости при увеличении активного параметра γ или γ' , или E_Γ .

Рассмотрим простейший частный случай, когда либо частота волны $f \gg \tau_c^{-1}$ (для скелетных мышц $\tau_c \sim 10^{-2}$ с), либо в фоновом состоянии сокращение мышцы происходит в пределах «плато» колоколообразной зависимости $\gamma = \gamma(l_\Delta)$. В этих обоих случаях $\gamma' = 0$. Для оценок примем [5, 10, 14]

$$\begin{aligned} E_v &= (1 + \beta) E_{v0}, \quad E_\Sigma = (1 + \beta) E_{\Sigma 0}, \quad L_{vp} = L_{v\Gamma 0} / (1 + \beta_1) \\ E_{v0} &= E_1 / 0,6, \quad \varphi_2 E_2 = 10^5 \text{ Н/м}^2, \quad \varphi_1 E_{\Sigma 0} = 10^6 \text{ Н/м}^2 \\ \varphi_1 E_1 &= 1,2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \quad L_{vp0} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}, \quad f = 3 \cdot 10^3 \text{ Гц}, \quad \rho = 1035 \text{ кг/м}^3 \end{aligned}$$



Фиг. 2

Для пассивной мышцы ($\gamma = \beta = \beta_1 = E_T = 0$) из (3.3) имеем $v_1 = 52,9$ м/с, $\kappa_1 = 188$ м⁻¹. Для мышцы, находящейся в ригорном состоянии (мышца пассивна, но все мостики замкнуты), положив $\gamma = 0$, $\beta = 8$, $\beta_1 = 0,5$, $E_T = E_1$, найдем $v_1 = 144$ м/с, $\kappa_1 = 42$ м⁻¹. Если мышца находится в активированном состоянии (тетанусе), то примем $\phi_1 \gamma = 7,5 \cdot 10^5$ Н/м², $\beta = 14$, $\beta_1 = 0,7$, $E_T = 1,5 E_1$; тогда $v_1 = 175$ м/с, $\kappa_1 = 34$ м⁻¹.

Из сравнения с опытными данными [10, 15—17] можно показать, что эти оценки значений скоростей и затуханий продольных волн в тонком образце мышечной ткани в пассивном, ригорном и тетаническом состояниях близки к наблюдаемым.

Если частота волны f сравнима с собственными характерными частотами мышечного сокращения τ_c^{-1} , то могут существовать резонансные эффекты и, по-видимому, происходить параметрические явления. Для описания колебательных процессов на микроуровне мышечной ткани необходимо ввести внутренние параметры, описывающие циклические структурные перестройки белков, и уравнения для них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клочков Б. Н. Анализ акустических свойств мышечной ткани. — Механика композит. материалов, 1985, № 1, с. 132—137.
2. Клочков Б. Н. Континуальная механо-химическая модель мышечной ткани при больших деформациях. Деп. в ВИНТИ 29.09.83, № 5424-83. Рига 1983. 13с.
3. Клочков Б. Н. Об учете конечных деформаций в модели мышцы. — В кн.: Тез. докл. 3-й Всес. конф. по проблемам биомеханики. Рига: Изд-е Ин-та мех. полимеров АН ЛатвССР, 1983, т. 1, с. 18—20.
4. Усик П. И. Континуальная механо-химическая модель мышечной ткани. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 448—458.
5. Регирер С. А. Лекции по биологической механике. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1980. 144 с.
6. Клочков Б. Н. Акустическая модель мышечной ткани. — В кн.: Акустические свойства биологических объектов. Симпозиум. Тез. докл., Пущино: Изд-е науч. центра биол. исслед. АН СССР, 1984, с. 69—70.
7. Клочков Б. Н. О распространении продольных волн в мышечной ткани. — В кн.: Биофизика и биохимия мышечного сокращения. Симпозиум. Тбилиси: Мецниереба, 1983, с. 96—97.
8. Nassiri D. K., Nicholas D., Hill C. R. Attenuation of ultrasound in skeletal muscle. — Ultrasonics, 1979, v. 17, No. 5, p. 230—232.
9. Apter J. T., Graessley W. W. A physical model for muscular behaviour. — Biophys. J., 1970, v. 10, No. 6, p. 539—555.
10. Truong X. T. Viscoelastic wave propagation and rheologic properties of skeletal muscle. — Amer. J. Physiol., 1974, v. 226, No. 2, p. 256—264.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. 4-е изд. М.: Наука. Т. 1. 1983. 528 с. Т. 2. 1984. 560 с.
12. Christensen R. M. Theory of viscoelasticity. An introduction. N. Y.—L.: Acad. Press, 1971. 245 p.— Рус. перев. М.: Мир, 1974. 338 с.
13. Ахизер А. И., Половин Р. В. Критерии нарастания волн. — Успехи физ. наук, 1971, т. 104, вып. 2, с. 185—200.
14. Децеровский В. И. Математические модели мышечного сокращения. М.: Наука, 1977. 160 с.
15. Schoenberg M., Wells J. B., Podolsky R. J. Muscle compliance and the longitudinal transmission of mechanical impulses. — J. Gen. Physiol., 1974, v. 64, No. 6, p. 623—642.
16. Hasan H., Mason P. Pulse propagation in muscle. — Phys. in Med. Biol., 1978, v. 23, No. 5, p. 917—927.
17. Пасечник В. И., Сарезян А. П. Исследование вязкоупругих свойств мышцы в покое и в процессе сокращения. — В кн.: Механизмы мышечного сокращения. М.: Наука, 1972, с. 220—229.
18. Bagshaw C. R. Muscle contraction. L.—N. Y.: Chapman and Hall, 1982. 79 p.— Рус. перев.: М.: Мир, 1985. 127 с.

Горький

Поступила в редакцию
17.1.1985