

УДК 539.3 : 534.1

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Ле Хань Чау

Строятся одномерные уравнения высокочастотных продольных колебаний упругих стержней. Формулируются задачи на сечении для определения «эффективных» упругих характеристик стержня. В случае стержня круглого сечения найдены упругие характеристики, дисперсионные кривые и спектр. Даются сравнения с аналогичными результатами трехмерной теории упругости и с экспериментом.

1. Одномерная теория высокочастотных продольных колебаний стержней. Рассмотрим изотропный однородный прямой стержень длиной $2L$ с постоянным поперечным сечением S , занимающий в недеформированном состоянии объем V в декартовой системе координат $x^1, x^2, x^3 \equiv x$ (индекс 3 обычно опускается). Начало системы координат поместим в центре стержня, а ось x направим по его центральной оси. Поперечное сечение считаем центрально-симметричным (если $(x^1, x^2) \in S$, то $(-x^1, -x^2) \in S$).

При задании начальных условий стержень совершает колебательные движения. Задача заключается в построении одномерной динамической модели высокочастотных колебаний стержня, которая асимптотически точна в области длинных волн и, кроме того, качественно правильно описывает интегральные характеристики стержня в области коротких волн. Взяв за основу вариационный подход [1, 2], постулируем, что движение стержня будет происходить в соответствии со следующим вариационным принципом:

$$(1.1) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{-L}^L \Lambda dx dt = 0, \quad \Lambda = K - \Phi$$

где K и Φ — одномерные плотности кинетической и внутренней энергии стержня.

В классической теории продольных колебаний стержней оказываются верными формулы

$$(1.2) \quad K = \frac{1}{2} \rho u^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} E u_{,x}^2$$

где u — среднее по поперечному сечению продольное перемещение, E — модуль Юнга, ρ — плотность упругого материала стержня. Модель (1.1), (1.2) описывает низкочастотные длинноволновые колебания стержней. Естественно предположить, что при возрастании частоты колебаний становятся существенными внутренние степени свободы, характеризующие новые формы (ветви) колебаний стержня, и эти колебания в некотором диапазоне частот можно описывать включив в число аргументов функций K и Φ соответствующий набор внутренних степеней свободы. В рамках этого подхода самый важный момент — определение набора существенных степеней свободы и установление зависимости K и Φ от них [1, 2]. Существо предлагаемой модели продольных колебаний стержня заключается

в формулах

$$(1.3) \quad K = \frac{1}{2}\rho(u, t^2 + \psi, t^2 + v, t^2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu(s_1 u^2, x + s_2 \psi^2, x + s_3 v^2, x + 2r_1 h^{-1} \psi u, x +$$

$$+ 2r_2 h^{-1} \psi v, x + 2r_3 h^{-1} v \psi, x + \beta_1^2 h^{-2} \psi^2 + \beta_2^2 h^{-2} v^2)$$

Здесь u — среднее продольное перемещение; ψ и v отвечают двум высокочастотным ветвям колебаний, главные члены которых описывают первые собственные формы колебаний поперечного сечения как двумерного упругого континуума; h — максимальное расстояние от границы S до его центра, μ — модуль сдвига. Плотность кинетической энергии K имеет простой вид. Функция же Φ , в отличие от квадратичных форм общего вида по $u, \psi, v, u, x, \psi, x, v, x$, обладает некоторыми особенностями — в ней отсутствуют члены типа $u^2, \psi, x u, u, x v, uv, x, \dots$. Модель (1.1), (1.3) содержит восемь констант: $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3, \beta_1^2, \beta_2^2$, для определения которых нужно решать задачи на сечении, сформулированные ниже в п. 2.

Модель стержня (1.1), (1.3) аналогично модели высокочастотных колебаний оболочек в [3] (см. также [4—6]) строится в два этапа. На первом этапе из трехмерного функционала находятся ветви колебания стержня в длинноволновой области при помощи вариационно-асимптотического метода [2]. Причем в области длинных волн будем сохранять лишь главные в асимптотическом смысле члены, а всеми членами порядка h/l по сравнению с главным пренебрегать (здесь l — длина волны по продольной оси x). Представляя перемещения стержня в виде суперпозиции по найденным ветвям колебаний, на втором этапе производится усреднение трехмерного функционала действия и отыскивается среди асимптотически эквивалентных функционалов наиболее удачная экстраполяция на короткие волны. Последнее означает прибавление или отбрасывание в усредненном функционале членов, малых в длинноволновой области, но существенных в коротковолновой. В основу выбора экстраполяции положены следующие критерии: а) сохранение в усредненном функционале главных в асимптотическом смысле членов каждой ветви и главных перекрестных членов между рассматриваемыми ветвями колебаний, б) гиперболичность усредненных уравнений. Эти критерии позволяют выбирать ту модель, которая удовлетворяет указанным требованиям.

2. Длинноволновые ветви колебаний. Сначала сформулируем постановку задачи о колебании стержня в рамках трехмерной теории упругости. Обозначим $w^i(x^1, x^2, x, t)$ перемещения точек стержня. Предположим для определенности, что боковая граница и торцы стержня свободны от нагрузок. Тогда истинные перемещения стержня — стационарная точка функционала

$$(2.1) \quad I = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \Lambda \, dv \, dt, \quad \Lambda = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}\rho w_{i,t} w_{i,t} = \frac{1}{2}\rho (w, t^2 + w_{\alpha,t} w_{\alpha,t})$$

$$U = \frac{1}{2} [\lambda (w^{\alpha,\alpha})^2 + 2\lambda w^{\alpha,\alpha} w_{,\alpha} + (\lambda + 2\mu) w^2, x + 2\mu w_{(\alpha,\beta)} w^{(\alpha,\beta)} +$$

$$+ \mu (w_{,\alpha} + w_{\alpha,x}) (w^{,\alpha} + w^{\alpha,x})]$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе упругого материала стержня. Греческие индексы соответствуют проекциям на оси x^α и пробегают значения 1, 2. Запятой в индексах обозначается частное дифференцирование, круглыми скобками в индексах — операция симметризации. По повторяющимся индексам производится суммирование.

Проведем асимптотический анализ функционала (2.1) в области длинных волн. Сделаем замену координат $\zeta^\alpha = x^\alpha/h$. При этом малый параметр h входит явно в плотность внутренней энергии

$$(2.2) \quad U = \frac{1}{2}\mu [\gamma h^{-2} (w_{|\alpha}^\alpha)^2 + 2\gamma h^{-1} w_{|\alpha}^\alpha w_{,x} + e^{-2} w_{,x}^2 + \\ + 2h^{-2} w_{(\alpha|\beta)} w^{(\alpha|\beta)} + (h^{-1} w_{|\alpha} + w_{\alpha,x}) (\bar{h}^{-1} w^{|\alpha} + w_{,x}^\alpha)], \quad \gamma = \lambda/\mu \\ e = \sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$$

а функционал действия (2.1) примет вид

$$(2.3) \quad I = h^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-L}^L \langle \Lambda \rangle dx \quad (\langle \Lambda \rangle = \int_{\Omega} \Lambda d\zeta^1 d\zeta^2)$$

где Ω — область изменений (ζ^1, ζ^2) , не зависящая от h ; вертикальной чертой в индексах обозначается частное дифференцирование по ζ^α .

Предположим, что $h \ll l$, где l — характерный масштаб изменения напряженного состояния по продольной координате x («длина волны») [2]. Сохранив в функционале (2.3) асимптотически главные члены, получим

$$(2.4) \quad I = h^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{-L}^L \bar{\Lambda} dx dt \\ \bar{\Lambda} = \frac{1}{2} \langle \rho (w_{,t}^2 + w_{\alpha,t} w_{,t}^\alpha) - \mu (\gamma h^{-2} (w_{|\alpha}^\alpha)^2 + \\ + 2h^{-2} w_{(\alpha|\beta)} w^{(\alpha|\beta)} + h^{-2} w_{|\alpha} w^{|\alpha}) \rangle$$

Экстремали функционала (2.4) совпадают с экстремалими функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{\Lambda} dt$$

Последние — линейные суперпозиции собственных форм (ветвей) колебаний, которые разбиваются на две серии, а именно:

$$(2.5) \quad \text{Серия } FL_{\parallel}: w = v_{(n)} f_{(n)}(\zeta^\alpha), \quad w_\alpha \equiv 0 \\ \text{Серия } TFL_{\perp}: w_\alpha = \psi_{(n)} f_{\alpha(n)}(\zeta^\beta), \quad w \equiv 0$$

В каждой ветви собственные частоты и собственные функции можно найти решая следующие задачи на собственные значения:

$$(2.6) \quad FL_{\parallel}: -\Delta f_{(n)} = \beta_{\parallel(n)}^2 f_{(n)}, \quad f_{(n)|\alpha} v^\alpha = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \\ TFL_{\perp}: -(\gamma + 1) f_{(n)|\beta\alpha}^\beta - \Delta f_{\alpha(n)} = \beta_{\perp(n)}^2 f_{\alpha(n)} \\ \gamma f_{(n)|\beta}^\beta + 2f_{(\alpha(n)|\beta)} v^\beta = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad \beta = \omega h/C_2, \quad C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, v^α — компоненты вектора внешней нормали к контуру $\partial\Omega$. На собственные функции $f_{(n)}$ и $f_{\alpha(n)}$ можно наложить следующие условия нормировки:

$$\langle f_{(n)}^2 \rangle = 1, \quad \langle f_{\alpha(n)} f_{(n)}^\alpha \rangle = 1$$

Среди собственных ветвей колебаний особо выделим ветви, составляющие «ядра» операторов (2.6) (собственные частоты равны нулю). Они соответствуют классическим низкочастотным ветвям колебаний и хорошо изучены. Остальные ветви назовем высокочастотными ветвями колебаний (при $h \rightarrow 0$ $\omega \rightarrow \infty$). Сформулируем задачи (2.6) для этих ветвей колебаний в вариационных терминах

$$(2.7) \quad FL_{\parallel}: \langle f_{|\alpha} \delta f^{|\alpha} \rangle = \beta_{\parallel}^2 \langle f \delta f \rangle; \quad \langle f^2 \rangle = 1, \quad \langle f \rangle = 0$$

$$(2.8) \quad TFL_{\perp}: \langle \gamma f_{|\beta}^\beta \delta f_{|\alpha}^\alpha + 2f_{(\alpha|\beta)} \delta f^{(\alpha|\beta)} \rangle = \beta_{\perp}^2 \langle f_\alpha \delta f^\alpha \rangle \\ \langle f_\alpha f^\alpha \rangle = 1, \quad \langle f_\alpha \rangle = 0, \quad \langle e^{\alpha\beta} f_\alpha \zeta_\beta \rangle = 0$$

где $e^{\alpha\beta}$ — двумерные символы Леви-Чивиты. Здесь и в дальнейшем номер ветви у функций опускается.

Следующие поправки могут быть найдены для каждой ветви в отдельности [6]. Сформулируем результаты в вариационных терминах

$$(2.9) \quad FL_{\parallel}: w = vf(\zeta^{\alpha}), \quad w_{\alpha} = hv, {}_x g_{\alpha}(\zeta^{\beta})$$

$$(2.10) \quad \langle \gamma g_{|\beta}^{\beta} \delta g_{|\alpha}^{\alpha} + 2g_{(\alpha|\beta)} \delta g^{(\alpha|\beta)} + \gamma f \delta g_{|\alpha}^{\alpha} - f_{|\alpha} \delta g^{\alpha} \rangle = \beta_{\parallel}^2 \langle g_{\alpha} \delta g^{\alpha} \rangle$$

$$(2.11) \quad TFL_{\perp}: w_{\alpha} = \psi f_{\alpha}(\zeta^{\beta}), \quad w = h\psi, {}_x g(\zeta^{\alpha})$$

$$(2.12) \quad \langle g_{|\alpha} \delta g^{\alpha} + f_{\alpha} \delta g^{\alpha} - \gamma f_{|\alpha}^{\alpha} \delta g \rangle = \beta_{\perp}^2 \langle g \delta g \rangle$$

3. Усредненный лагранжиан отдельной высокочастотной ветви колебаний. Перед тем как перейти ко второму этапу построения уравнений колебаний стержня, удобно сначала найти главные члены каждой ветви в области длинных волн в усредненном функционале действия. Рассмотрим одну ветвь в серии FL_{\parallel} . Пусть в формулах (2.9) v — произвольная функция от x и t . Подставляя (2.9) в функционал (2.3), сохраняя главные члены и усредняя по сечению, получим

$$\langle \Lambda \rangle = 1/2 \rho (v, {}_t^2 + h^2 v, {}_{xt}^2 \langle g_{\alpha} g^{\alpha} \rangle) - 1/2 \mu [h^{-2} v^2 \langle f^{\alpha} f_{|\alpha} \rangle + v, {}_x^2 (\langle \gamma (g_{|\alpha}^{\alpha})^2 + 2g_{(\alpha|\beta)} g^{(\alpha|\beta)} + 2\gamma f g_{|\alpha}^{\alpha} - 2g^{\alpha} f_{|\alpha} \rangle + e^{-2})]$$

Согласно вариационным уравнениям (2.7) и (2.10), имеем

$$\langle f_{|\alpha} f^{\alpha} \rangle = \beta_{\parallel}^2$$

$$\langle \gamma (g_{|\alpha}^{\alpha})^2 + 2g_{(\alpha|\beta)} g^{(\alpha|\beta)} + \gamma f g_{|\alpha}^{\alpha} - f_{|\alpha} g^{\alpha} \rangle = \beta_{\parallel}^2 \langle g_{\alpha} g^{\alpha} \rangle = c \beta_{\parallel}^2$$

Следовательно

$$(3.1) \quad \langle \Lambda \rangle = 1/2 \rho v, {}_t^2 + 1/2 \rho c h^2 v, {}_{xt}^2 - 1/2 \mu [\beta_{\parallel}^2 h^{-2} v^2 + v, {}_x^2 (c \beta_{\parallel}^2 + k_3 + e^{-2})] \\ k_3 = \langle \gamma f g_{|\alpha}^{\alpha} - g^{\alpha} f_{|\alpha} \rangle$$

Поскольку в области длинных волн v описывает гармоническое колебание, с частотой, близкой к частоте $\omega_{\parallel} = \beta_{\parallel} C_2/h$, слагаемое $1/2 \rho c h^2 v, {}_{xt}^2$ в формуле (3.1) в первом приближении можно заменить на $1/2 \mu c \beta_{\parallel}^2 v, {}_x^2$. Окончательно, главные члены ветви FL_{\parallel} в усредненном лагранжиане следующие:

$$(3.2) \quad \langle \Lambda \rangle = 1/2 \rho v, {}_t^2 - 1/2 \mu (\beta_{\parallel}^2 h^{-2} v^2 + (k_3 + e^{-2}) v, {}_x^2)$$

Аналогично для ветви TFL_{\perp} имеем

$$(3.3) \quad \langle \Lambda \rangle = 1/2 \rho \psi, {}_t^2 - 1/2 \mu (\beta_{\perp}^2 h^{-2} \psi^2 + (k_2 + 1) \psi, {}_x^2) \\ k_2 = \langle f_{\alpha} g^{\alpha} - \gamma g f_{|\alpha}^{\alpha} \rangle$$

(f_{α} и g — решения вариационных задач (2.8) и (2.12)).

4. Уравнения высокочастотных продольных колебаний стержней. Будем строить уравнения, описывающие семейство трех первых продольных ветвей колебаний. Такое семейство было выбрано для простоты окончательных формул. С таким же успехом можно построить модели, включающие большее число взаимодействующих ветвей колебаний.

Итак, представим перемещения стержня в виде

$$(4.1) \quad w = \bar{u}d + \bar{v}f + h\bar{\psi}, {}_x g, \quad w_{\alpha} = \bar{\psi}f_{\alpha} + h\bar{u}, {}_x e_{\alpha} + h\bar{v}, {}_x g_{\alpha}$$

где искомые \bar{u} , $\bar{\psi}$, \bar{v} — произвольные функции x , t (обозначение без черты зарезервированы для функций, появляющихся в результате замены искомым функций в окончательных уравнениях). Функция \bar{u} принадлежит классической продольной ветви колебаний и описывает среднее продольное перемещение стержня (в области длинных волн). Функции $\bar{\psi}$ и \bar{v} со-

ответствуют первым высокочастотным продольным ветвям колебаний в сериях TFL_{\perp} и FL_{\parallel} . Базисные функции f и f_{α} — ортонормированные собственные функции в задачах (2.7), (2.8), а функции g_{α} и g определяются через f и f_{α} при решении задач (2.10), (2.12). Из асимптотического анализа функционала (2.3) можно показать, что $d = (\text{mes } \Omega)^{-1/2} = \text{const}$, а e_{α} — линейная по ζ^{α} функция, являющаяся решением вариационной задачи

$$(4.2) \quad \langle \gamma e_{|\alpha}^{\alpha} \delta e_{|\beta}^{\beta} + 2e_{(\alpha|\beta)} \delta e^{(\alpha|\beta)} + \gamma d \delta e_{|\alpha}^{\alpha} \rangle = 0; \quad \langle e_{\alpha} \rangle = 0, \quad \langle e^{\alpha\beta} e_{\alpha} \zeta_{\beta} \rangle = 0$$

Это уравнение имеет очевидное решение (ν — коэффициент Пуассона)

$$(4.3) \quad e_{\alpha} = -d\nu \zeta_{\alpha}$$

Подставим формулы (4.1) в функционал (2.3) и проинтегрируем по области Ω . Оставив главные члены каждой ветви и главные перекрестные члены в усредненном лагранжиане, с учетом результатов п. 3 получаем

$$(4.4) \quad \langle \Lambda \rangle = 1/2\rho(\bar{u},_t^2 + 2b_1 h \bar{u},_t \bar{\psi},_{xt} + \bar{\psi},_t^2 + 2b_2 h \bar{\psi},_t \bar{u},_{xt} + 2b_3 h \bar{\psi},_t \bar{v},_{xt} + \bar{v},_t^2 + 2b_4 h \bar{v},_t \bar{\psi},_{xt}) - 1/2\mu [\beta_1^2 h^{-2} \bar{\psi}^2 + 2a_1 h^{-1} \bar{\psi} \bar{u},_x + 2a_2 h^{-1} \bar{\psi} \bar{v},_x + 2r_1 h^{-1} \bar{u},_x \bar{\psi} + 2r_2 h^{-1} \bar{\psi} \bar{v},_x + 2r_3 h^{-1} \bar{v},_x \bar{\psi} + \beta_2^2 h^{-2} \bar{v}^2 + 2a_3 h^{-1} \bar{v} \bar{\psi},_x + k_1 \bar{u},_x^2 + (k_2 + 1) \bar{\psi},_x^2 + (k_3 + e^{-2}) \bar{v},_x^2]$$

Здесь β_1^2, β_2^2 — первые собственные числа β_{\perp}^2 и β_{\parallel}^2 в задачах (2.8) (2.7); формулы для остальных коэффициентов имеют вид

$$(4.5) \quad b_1 = \langle dg \rangle, \quad b_2 = \langle f_{\alpha} e^{\alpha} \rangle, \quad b_3 = \langle f_{\alpha} g^{\alpha} \rangle, \quad b_4 = \langle fg \rangle \\ a_1 = \langle \gamma f_{|\alpha}^{\alpha} e_{|\beta}^{\beta} + 2f_{(\alpha|\beta)} e^{(\alpha|\beta)} \rangle, \quad a_2 = \langle \gamma f_{|\alpha}^{\alpha} g_{|\beta}^{\beta} + 2f_{(\alpha|\beta)} g^{(\alpha|\beta)} \rangle \\ a_3 = \langle f_{|\alpha} g^{|\alpha} \rangle, \quad r_1 = \gamma \langle f_{|\alpha}^{\alpha} d \rangle, \quad r_2 = \gamma \langle f_{|\alpha}^{\alpha} f \rangle \\ r_3 = \langle f_{|\alpha} f^{\alpha} \rangle, \quad k_1 = E/\mu = 2(1 + \nu)$$

Коэффициенты k_2, k_3 задаются формулами в (3.1), (3.3).

Используя вариационные уравнения (2.7), (2.8), (2.10), (2.12), (4.2), можно доказать следующие равенства:

$$(4.6) \quad b_1 = b_2, \quad b_3 = b_4, \quad a_1 = b_2 \beta_1^2, \quad a_2 = b_3 \beta_1^2, \quad a_3 = b_4 \beta_2^2 \\ r_1 = -b_2 \beta_1^2 = -a_1, \quad r_3 - r_2 = b_3 (\beta_1^2 - \beta_2^2) = a_2 - a_3$$

Из соотношений (4.6) вытекает, что все главные перекрестные члены в усредненном лагранжиане (4.4) в сумме образуют дивергентные члены, не влияющие на уравнения для $\bar{u}, \bar{\psi}, \bar{v}$. Поэтому возможен способ коротковолновой экстраполяции, в котором все перекрестные члены в (4.4) отброшены, что привело бы к независимости ветвей колебаний. Однако дополнительный анализ показывает, что такая экстраполяция приведет к качественно неверному описанию в области коротких волн дисперсионных кривых и интегральных характеристик стержня. Поэтому здесь будем сохранять все перекрестные члены и попытаемся лишь отыскивать замену искомым функций, которая бы упростила формулу (4.4), т. е. привела бы (4.4) к выражению, не содержащему производных выше первого порядка по x и t .

Используя свойства (4.6), образуем в выражении (4.4) полные квадраты

$$\langle \Lambda \rangle \cong 1/2\rho [(\bar{u},_t + b_2 h \bar{\psi},_{xt})^2 + (\bar{\psi},_t + b_2 h \bar{u},_{xt} + b_3 h \bar{v},_{xt})^2 + \\ + (\bar{v},_t + b_3 h \bar{\psi},_{xt})^2 - (b_2^2 + b_3^2) h^2 \bar{\psi},_{xt}^2 - b_2^2 h^2 \bar{u},_{xt}^2 - b_3^2 h^2 \bar{v},_{xt}^2] - \\ - 1/2\mu [\beta_1^2 h^{-2} (\bar{\psi} + b_2 h \bar{u},_x + b_3 h \bar{v},_x)^2 + 2r_1 h^{-1} \bar{\psi} \bar{u},_x + \\ + 2r_2 h^{-1} \bar{\psi} \bar{v},_x + 2r_3 h^{-1} \bar{v} \bar{\psi},_x + \beta_2^2 h^{-2} (\bar{v} + b_3 h \bar{\psi},_x)^2 + \\ + (k_1 - b_2^2 \beta_1^2) \bar{u},_x^2 + (k_2 + 1 - b_3^2 \beta_2^2) \bar{\psi},_x^2 + \\ + (k_3 + e^{-2} - b_3^2 \beta_1^2) \bar{v},_x^2]$$

Члены в кинетической энергии $-1/2\rho (b_2^2 + b_3^2) h^2 \bar{\psi}_{,xt}^2$ и $-1/2\rho b_3^2 h^2 \bar{v}_{,xt}^2$ на длинных волнах можно заменить на $-1/2\mu (b_2^2 + b_3^2) \beta_1^2 \bar{\psi}_{,x}^2$ и $-1/2\mu b_3^2 \beta_2^2 \bar{v}_{,x}^2$ (подобно тому, как это было сделано в п. 3). Член $-1/2\rho b_2^2 h^2 \bar{u}_{,xt}^2$ на длинных волнах мал, и его можно опускать. Тогда лагранжиан примет вид

$$(4.7) \quad \langle \Lambda \rangle = 1/2\rho [(\bar{u} + b_2 h \bar{\psi}_{,x}),_t^2 + (\bar{\psi} + b_2 h \bar{u}_{,x} + b_3 h \bar{v}_{,x}),_t^2 + (\bar{v} + b_3 h \bar{\psi}_{,x}),_t^2] - 1/2\mu [\beta_1^2 h^{-2} (\bar{\psi} + b_2 h \bar{u}_{,x} + b_3 h \bar{v}_{,x})^2 + 2r_1 h^{-1} \bar{\psi} \bar{u}_{,x} + 2r_2 h^{-1} \bar{\psi} \bar{v}_{,x} + 2r_3 h^{-1} \bar{v} \bar{\psi}_{,x} + \beta_2^2 h^{-2} (\bar{v} + b_3 h \bar{\psi}_{,x})^2 + (k_1 - b_2^2 \beta_1^2) \bar{u}_{,x}^2 + (k_2 - 1 - b_3^2 \beta_2^2 + (b_2^2 + b_3^2) \beta_1^2) \bar{\psi}_{,x}^2 + (k_3 + e^{-2} - b_3^2 \beta_1^2 + b_3^2 \beta_2^2) \bar{v}_{,x}^2]$$

Формула (4.7) подсказывает замену $\bar{u} \rightarrow u$, $\bar{\psi} \rightarrow \psi$, $\bar{v} \rightarrow v$, где

$$(4.8) \quad u = \bar{u} + b_3 h \bar{\psi}_{,x}, \quad \psi = \bar{\psi} + b_2 h \bar{u}_{,x} + b_3 h \bar{v}_{,x}, \quad v = \bar{v} + b_3 h \bar{\psi}_{,x}$$

Оставив в (4.7) главные члены от u , ψ , v и главные перекрестные члены, получим, что $\langle \Lambda \rangle = K - \Phi$, где K и Φ имеют вид (1.3), а коэффициенты s_1 , s_2 , s_3 вычисляются по формулам

$$(4.9) \quad s_1 = k_1 + \frac{r_1^2}{\beta_1^2}, \quad s_2 = k_2 + 1 - \frac{r_1^2}{\beta_1^2} + \frac{(r_3 - r_2)^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}$$

$$s_3 = k_3 + e^{-2} - \frac{(r_3 - r_2)^2}{\beta_2^2 - \beta_1^2}$$

С точностью до несущественной постоянной h^2 вариационный принцип примет форму (1.1). Варьируя функционал (1.1), получим уравнения высокочастотных продольных колебаний стержня и граничные условия свободного края

$$(4.10) \quad \rho u_{,tt} = \mu \left(s_1 u_{,xx} + \frac{r_1}{h} \psi_{,x} \right), \quad \rho \psi_{,tt} = \mu \left(s_2 \psi_{,xx} - \frac{r_1}{h} u_{,x} + \frac{r_3 - r_2}{h} v_{,x} - \frac{\beta_1^2}{h^2} \psi \right), \quad \rho v_{,tt} = \mu \left(s_3 v_{,xx} - \frac{r_3 - r_2}{h} \psi_{,x} - \frac{\beta_2^2}{h^2} v \right)$$

$$(4.11) \quad s_1 u_{,x} + \frac{r_1}{h} \psi = 0, \quad s_2 \psi_{,x} + \frac{r_3}{h} v = 0, \quad s_3 v_{,x} + \frac{r_2}{h} \psi = 0$$

при $x = \pm L$

5. Вычисления коэффициентов уравнений высокочастотных продольных колебаний в случае стержня круглого сечения. Для завершения построения модели нужно найти коэффициенты уравнений (4.10) β_1 , β_2 , r_1 , r_2 , r_3 , s_2 , s_3 (коэффициент s_1 найдется, если известны r_1 и β_1). Нахождение этих коэффициентов сводится к решению сформулированных в п. 2 задач на сечении. Как правило, последние могут быть решены только численными методами. Одним из исключений является стержень круглого сечения, где коэффициенты явно находятся. В этом случае задачи (2.7) (2.8), (2.10), (2.12) решаются в полярной системе координат (r, φ) , где $r = \sqrt{\zeta_\alpha \zeta^\alpha}$, $\varphi = \arg(\zeta^1, \zeta^2)$. Очевидно, что для продольных ветвей колебаний $f_\varphi \equiv g_\varphi \equiv 0$, а f , f_r , g , g_r зависят только от r (осевая симметрия). Таким образом, задачи (2.7), (2.8), (2.10), (2.12) сводятся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений Бесселя и явно решаются в функциях Бесселя.

Приведем результаты. Числа β_1 , β_2 — наименьшие корни следующих трансцендентных уравнений:

$$(5.1) \quad e\beta_1 J_0(e\beta_1) = 2e^2 J_1(e\beta_1), \quad J_1(\beta_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = 3,83171$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода. Остальные коэффициенты даются формулами

$$(5.2) \quad r_1 = -\frac{2\gamma\beta_1}{\chi}, \quad r_2 = \frac{2\gamma e^2 \beta_1^2}{(\beta_2^2 - \beta_1^2 e)\chi}, \quad r_3 = -\frac{2\beta_2^2 \beta_1}{(\beta_2^2 - \beta_1^2 e^2)\chi}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{\beta_1^2 - 4(1 - e^2)}}$$

$$k_2 + 1 = \frac{\beta_1^2/e^2 - 12}{\chi^2} + \frac{8\beta_1 J_0(\beta_1)}{\chi^2 J_1(\beta_1)},$$

$$k_3 + e^2 = 1 + \frac{8e\beta_2 J_1(\beta_2 e)}{2e\beta_2 J_1(\beta_2 e) - \beta_2^2 J_0(\beta_2 e)}$$

Коэффициенты s_1, s_2, s_3 вычисляются при помощи формул (4.9). Ниже приведены численные значения $\beta_1, r_1, r_2, r_3, s_2, s_3$ в зависимости от ν

ν	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
β_1	2,604	2,733	2,885	3,068	3,294	3,584	3,977	4,552
$-r_1$	0	0,262	0,584	0,99	1,52	2,247	3,314	5,057
r_2	0	0,083	0,197	0,355	0,583	0,925	1,474	2,443
$-r_3$	3,097	3,109	3,123	3,138	3,154	3,172	3,192	3,214
s_1	2	2,109	2,241	2,404	2,613	2,893	3,294	3,934
s_2	0,625	0,624	0,622	0,617	0,608	0,591	0,557	0,475
s_3	1,885	1,954	2,032	2,125	2,238	2,382	2,578	2,874

Для восстановления перемещений стержня по значениям u, ψ, v нужно знать базисные функции f, f_r . Приведем их выражения

$$f = \frac{J_0(\beta_2 r)}{\sqrt{\pi} J_0(\beta_2)}, \quad f_r = \frac{2e J_1(e\beta_1 r)}{\sqrt{\pi} \chi J_0(e\beta_1)}$$

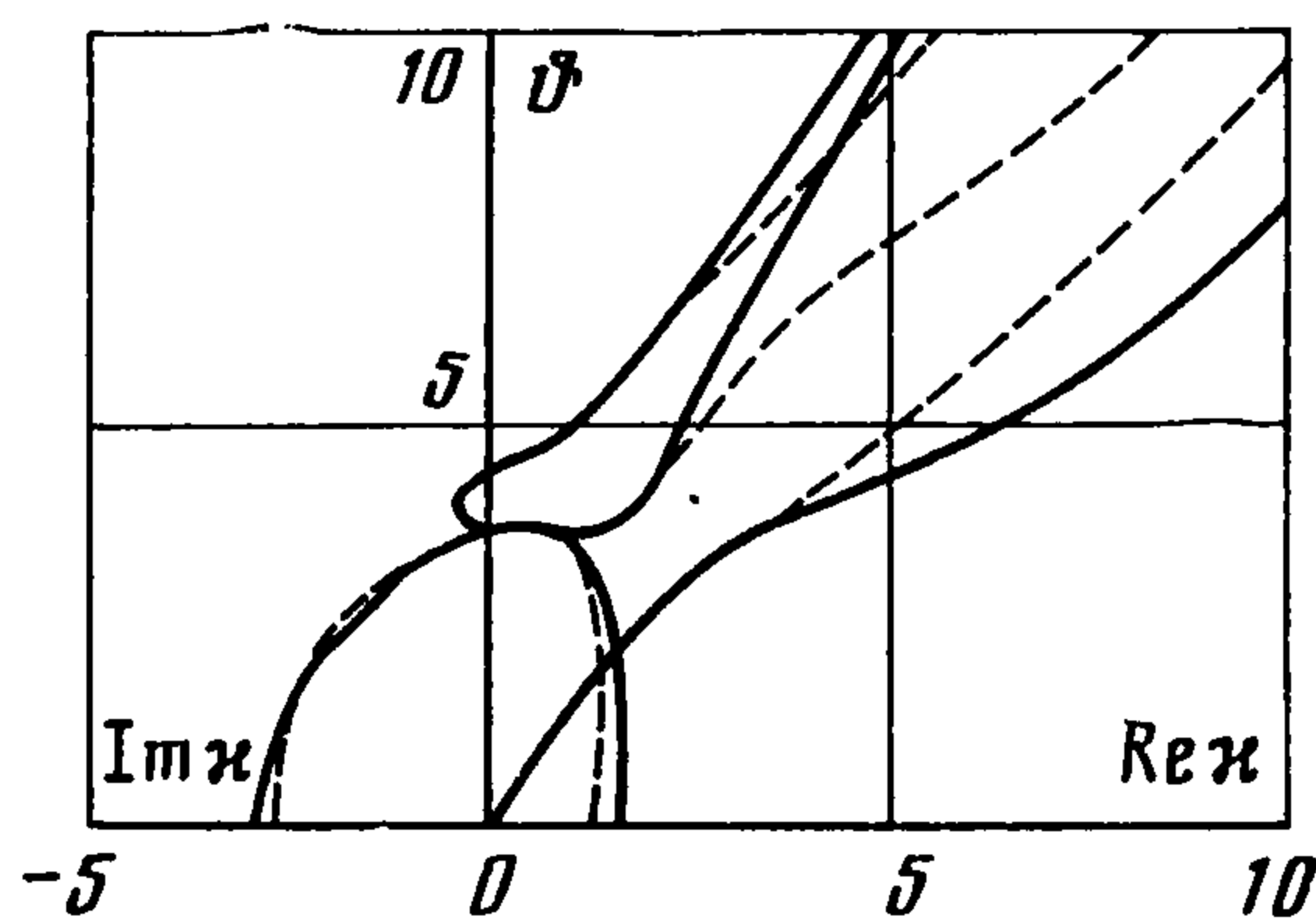
6. Дисперсионные кривые и частотные характеристики стержня круглого сечения. На фиг. 1 показаны дисперсионные кривые для системы уравнений (4.10), рассмотренной в области $-\infty < x < +\infty$ при $\nu = 0,3317$ (сплошные линии). Здесь $\kappa = kh$ — безразмерное волновое число, $\vartheta = \omega h / C_2$ — безразмерная частота колебаний. Для комплексной ветви нарисованы ее проекции на вещественную и комплексную плоскости: $(\vartheta, \text{Re } \kappa)$ и $(\vartheta, \text{Im } \kappa)$. Для сравнения нарисованы также три первые ветви дисперсионных кривых, вычисленных по трехмерной теории упругости [7] (штриховые линии). Они являются решениями дисперсионного уравнения [8, 9]

$$(6.1) \quad 2p(q^2 + \kappa^2)J_1(p)J_1(q) - (q^2 - \kappa^2)^2 J_0(p)J_1(q) - 4\kappa^2 p q J_1(p)J_0(q) = 0$$

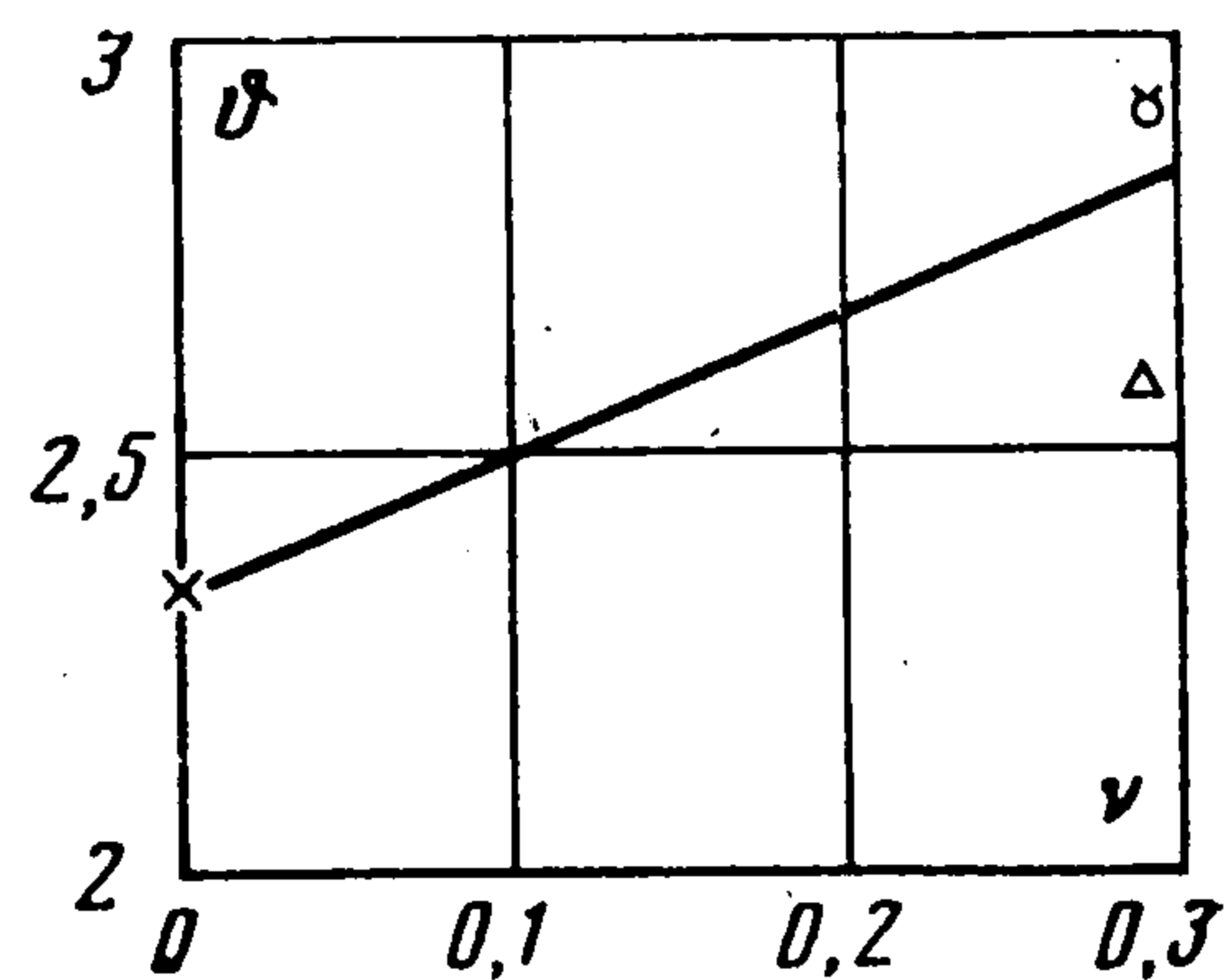
где $p = \sqrt{e^2 \vartheta^2 - \kappa^2}$, $q = \sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2}$. Используя метод Ньютона, можно доказать, что при $|\kappa| \ll 1$ из (6.1) вытекают следующие асимптотические формулы для первых трех ветвей колебаний (с точностью до κ^4):

$$(6.2) \quad \vartheta^2 = 2(1 + \nu)\kappa^2, \quad \vartheta^2 = \beta_1^2 + (k_2 + 1)\kappa^2, \quad \vartheta^2 = \beta_2^2 + (k_3 + e^{-2})\kappa^2$$

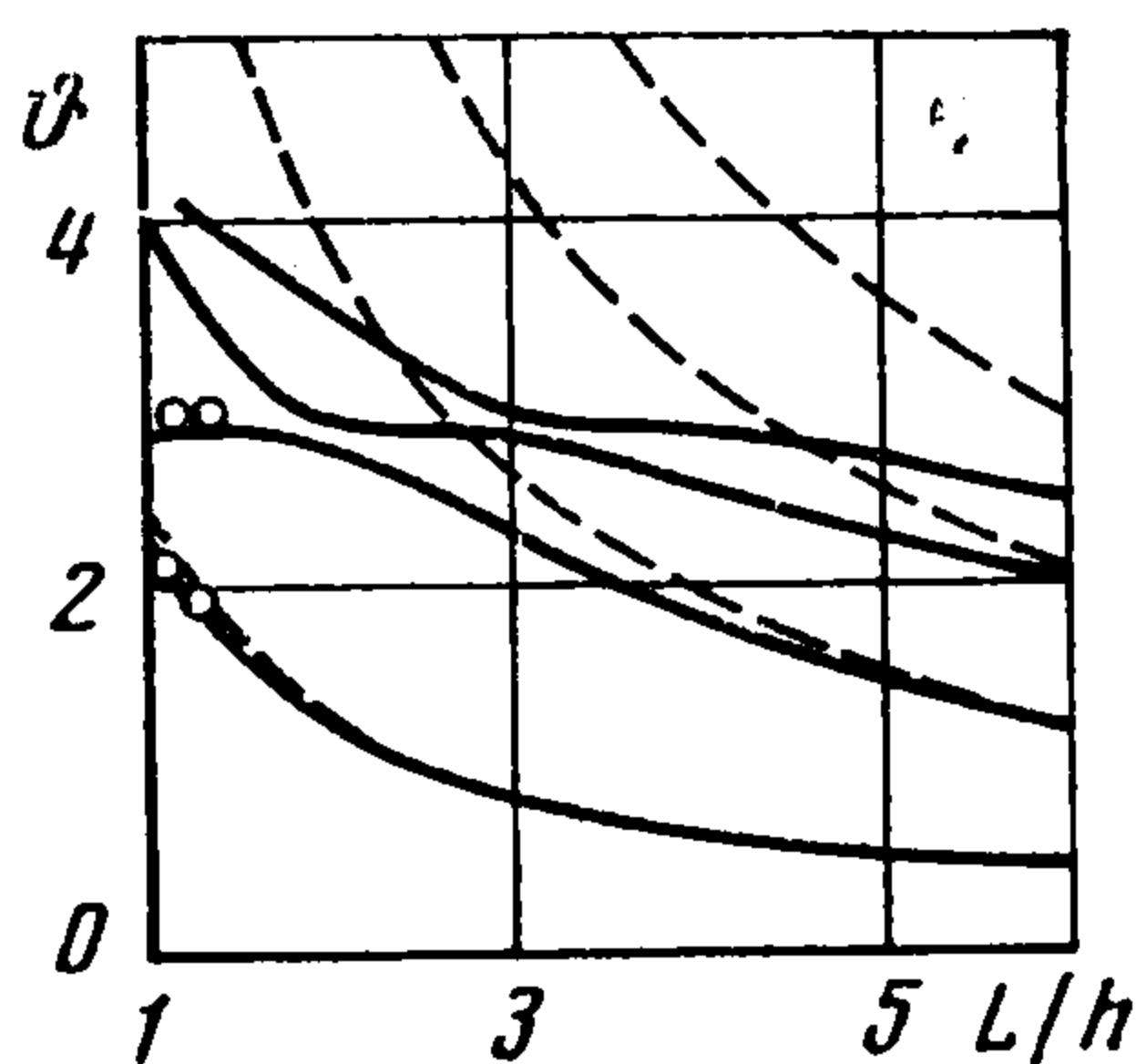
где $\beta_1, \beta_2, k_2, k_3$ заданы формулами (5.1), (5.2). Можно доказать, что из дисперсионного соотношения для уравнений (4.10) также вытекают формулы (6.2). Таким образом, уравнения (4.10) асимптотически точно описывают поведение дисперсионных кривых в области длинных волн. В области же коротких волн, как видно из фиг. 2, наблюдается качественно хорошее соответствие с трехмерной теорией.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Наличие комплексной ветви для дисперсионного уравнения модели (4.10) и взаимодействия волн с различными волновыми числами позволяют описать новые эффекты, отсутствовавшие в классической теории стержней. Один из них — существование краевой моды в полубесконечном стержне. Зависимость частоты краевой моды от ν показана на фиг. 2. При $\nu = 0,29$ имеем $\vartheta = 2,83$. Для сравнения приведем экспериментальное значение частоты краевой моды $\vartheta_e = 2,92$ (светлая точка) ([10], табл. 2). По трехмерной теории упругости, $\vartheta_t = 2,921$ (крестики) ([11], с. 209—210, фиг. 86). В [10, 11] эксперименты и теоретические расчеты выполнены для конечного длинного стержня: $\nu = 0,29$, $2h = 0,935$ см, $2L = 8,835$ см. По одномерной теории Миндлина — Мак-Нивена, $\vartheta_M = 2,59$ (треугольник) [12, 13].

На фиг. 3 дан спектр конечного стержня при $\nu = 0,29$. Показаны четыре первые собственные частоты для четных мод продольных колебаний стержня в зависимости от L/h (сплошные линии). Штриховыми линиями обозначены кривые, рассчитанные по классической теории продольных колебаний стержней. При $\vartheta \geq 2$ наблюдается достаточно сильное расхождение классической теории от построенной. К сожалению, немногочисленные экспериментальные данные [14] (светлые точки на фиг. 3) недостаточны для сравнения.

Автор благодарит В. Л. Бердичевского за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1984. 560 с.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. Бердичевский В. Л., Ле Хань Чау. Высокочастотные колебания оболочек.— Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с. 584—589.
4. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. К теории криволинейных стержней типа Тимошенко.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1015—1024.
5. Бердичевский В. Л. Об энергии упругого стержня.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 4, с. 704—718.
6. Квашнина С. С. Высокочастотные длинноволновые колебания упругих стержней.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 2, с. 335—341.
7. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder.— J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 51, № 1, p. 265—283.
8. Pochhammer L. Uber die Fortflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in einem unbergrenzten isotropen Kreiszyylinder.— J. rein und angew. Math., 1876, v. 81, № 4, p. 324—336.
9. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar.— Quart. J. Pure and Appl. Math., 1886, v. 21, p. 287—298.
10. Booker R. E., Sagar E. H. Velocity dispersion of the lowest—order longitudinal mode in finite rods of circular cross section.— J. Acoust. Soc. Amer. 1971, v. 49, No. 5, 1491—1498.
11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
12. Mindlin R. D., McNiven H. D. Axially symmetric waves in elastic rods.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, v. 27, No. 1, p. 145—151.
13. McNiven H. D., Perry D. C. Axially symmetric waves in elastic rods.— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, No. 4, p. 433—437.
14. McMahon G. W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, v. 36, No. 1, p. 87—92.