

УДК 539.3 : 534.1

## О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ

Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н.

Предлагается приближенный аналитический метод решения краевых задач о гармонических колебаниях ограниченной пластины, контактирующей с жидкостью. Процедура построения последовательных приближений такова, что первое приближение описывает решение в главном, а последующие приближения сводятся к небольшим уточнениям первого приближения. Метод реализуется в решении модельной задачи о плоских колебаниях пластины — полосы в жестком экране при одностороннем контакте с жидкой средой. Наряду с приближенным аналитическим решением приводятся результаты численного решения задачи. Сопоставление этих решений позволяет оценить погрешности аналитического метода при определении резонансных частот и форм колебаний пластины в жидкости. В несколько иной постановке подобная задача рассматривалась ранее; наиболее полное изложение результатов и библиографические сведения представлены в [1].

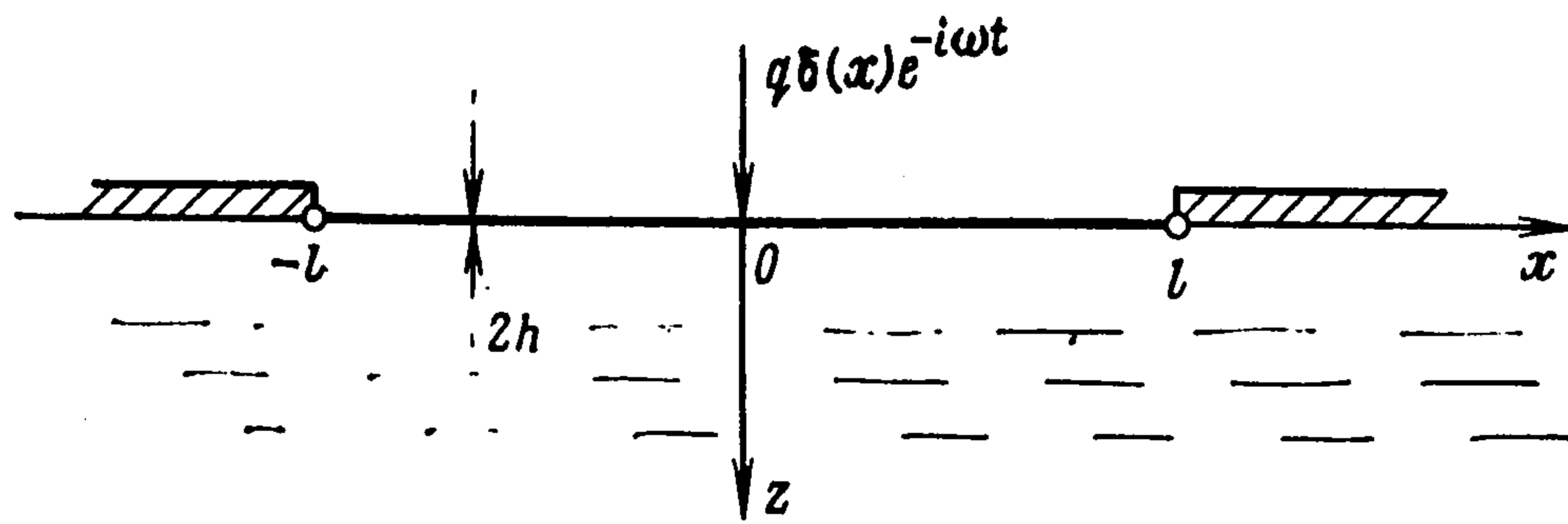
1. Рассмотрим плоскую задачу о колебаниях по формам цилиндрического изгиба упругой пластины — полосы шириной  $2l$  и толщиной  $2h$  ( $h/l \ll \ll 1$ ) в бесконечном жестком экране на границе жидкого полупространства ( $-\infty \leq x \leq \infty, z \geq 0$ ). Примем, что колебания возбуждаются линейно сосредоточенной поперечной нагрузкой  $q\delta(x) \exp(-i\omega t)$ , приложенной к пластине на равном расстоянии от краев  $x = \pm l$ , на которых зададим условия шарнирного опирания  $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$  ( $w$  — прогиб пластины) (фиг. 1). Система уравнений совместных колебаний пластины и жидкости после отделения временного множителя  $\exp(-i\omega t)$  записывается следующим образом:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Lw(\xi) + P(\xi, 0) &= ql^{-1}\delta(\xi), \quad \Delta P + \gamma^2 P = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, |\xi| \leq 1} &= \omega^2 \rho l w(\xi), \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, |\xi| > 1} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial P}{\partial r} - i\gamma P \right) &= 0, \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \\ \gamma &= kl, \quad k = \omega/c, \quad L \equiv Dl^{-4} d^4/d\xi^4 - 2\omega^2 \rho_0 h \\ \Delta &\equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{z}{l} \end{aligned}$$

Здесь  $P(\xi, \eta)$  — акустическое давление,  $\rho_0, E, \nu$  — плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины,  $\rho, c$  — плотность жидкости и скорость звука в ней.

Известно, что при колебаниях пластин, контактирующих с жидкостью, в диапазоне до частоты совпадения [1] длины изгибных волн значительно меньше длин пространственных волн в среде. Частота совпадения находится на пределе применимости динамических уравнений теории тонких пластин; ей соответствует длина свободной поперечной волны изгиба, превышающая толщину пластины менее чем на порядок. Поэтому можно принять, что компонента решения, соответствующая пространственным волнам в среде, должна быть медленно меняющейся по сравнению с компонентой, описывающей колебания пластины совместно с жидкостью в пристеночном слое.

В [2] при решении аналогичной задачи для неограниченной пластины построено рекуррентный процесс определения быстро и медленно меняющихся компонент прогиба пластины и акустического давления в произвольной точке среды; показана схо-



Фиг. 1

димось последовательных приближений к точному решению в геометрической прогрессии со знаменателем, являющимся большим параметром. Эта процедура может быть перенесена на задачи о вынужденных колебаниях ограниченной пластины. Так как первое приближение указанного процесса для быстро меняющейся компоненты решения описывает ближнее поле давлений типа неизлучающих поверхностных волн, то на резонансных частотах системы соответствующие формулы дадут неограниченный рост амплитуд колебаний. Последующее построение медленно меняющейся компоненты решения, удовлетворяющей условию излучения, не изменит положения, так как эта компонента складывается с первым приближением. Поэтому процедура построения первого приближения в данной задаче должна быть скорректирована так, чтобы уже на этапе получения быстро меняющейся компоненты учитывалось демпфирующее влияние излучения звука.

Следуя выкладкам [2], представим быстро меняющиеся компоненты решения системы (1.1) для форм колебаний, симметричных относительно линии приложения нагрузки, в виде

$$(1.2) \quad w_1(\xi) = \sum_{j=1}^3 f_j(\xi), \quad P_1(\xi, \eta) = -\omega^2 \rho l \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{-1} f_j(\xi) \exp(-\alpha_j \eta) \\ f_j(\xi) = c_j \cos \beta_j |\xi| + b_j \sin \beta_j |\xi|, \quad \beta_j = (\alpha_j^2 + \gamma^2)^{1/2}$$

Здесь  $\alpha_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} \alpha_{2,3} > 0$  — корни характеристического уравнения, соответствующие экспоненциально затухающим в окрестности пластины интегралам акустического давления

$$(1.3) \quad \alpha^5 + 2\gamma^2 \alpha^3 - \gamma^2 (g_1 - \gamma^2) \alpha - g_0 \gamma^2 = 0 \\ g_1 = 3(1 - \nu^2) \left( \frac{l}{h} \frac{c}{c_0} \right)^3, \quad g_0 = \frac{l}{2h} \frac{\rho}{\rho_0} g_1, \quad c_0 = \left( \frac{E}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

При антисимметричной возбуждающей нагрузке формы колебаний имеют аналогичный вид с добавлением множителя  $\operatorname{sgn} \xi$ .

Для определения шести неизвестных постоянных  $c_j$ ,  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в выражениях (1.2) необходимо сформулировать шесть условий. Четыре из них известны: два краевых условия и два условия, выделяющих особенность прогиба пластины на линии действия силы, совпадающую с главной особенностью функции прогиба при колебаниях пластины в вакууме. Условие непротекания накладывает ограничение и на особенность функции давления, связывая ее на линии действия силы с особенностью функции прогиба. Оставшийся произвол в постоянных снимается при задании значения функции давления на краях пластины.

Для вывода этого условия представим точное значение давления жидкости на поверхности пластины в форме интеграла от произведения функции прогиба на функцию Грина задачи Неймана для уравнения Гельмгольца

$$(1.4) \quad P(\xi, 0) \equiv w * G = \omega^2 \rho l \int_{-1}^1 w(\xi_0) G(\xi, 0; \xi_0, 0) d\xi_0 \\ G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = -\frac{i}{4} \sum_{k=1}^2 H_0^{(1)}(\gamma [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - (-1)^k \eta_0)^2]^{1/2})$$

$(H_0^{(1)}(x))$  — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка). Подстановка этого выражения в (1.1) приводит к интегродифференциальному уравнению относительно прогиба пластины. Первое приближение функции прогиба (1.2) удовлетворяет этому уравнению с точностью до разности между  $P_1(\xi, 0)$  и  $w_1 * G$ . При помощи оставшегося произвола в выборе постоянных можно обратить эту разность в нуль не более чем в двух точках (для симметричного решения); Наилучшее приближение получается в случае, когда эти точки выбраны на краях пластины:

$$P_1(\xi, 0) - w_1 * G = 0, \quad \xi = \pm 1$$

Подстановка выражений (1.2) в перечисленные выше условия приводит к шести алгебраическим уравнениям для определения постоянных  $c_j$ ,  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^3 x_{jk} = -\frac{\delta_{k2} q l^3}{2D}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \sum_{j=1}^3 f_j(1) \beta_j^n = 0, \quad n = 0, 2$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{-1} f_j(1) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 f_j(\xi) H_0^{(1)}(\gamma(1-\xi)) d\xi$$

$$x_{j1} = \beta_j b_j, \quad x_{j2} = x_{j1} \beta_j^2, \quad x_{j3} = x_{j1} \alpha_j^{-1}$$

Построенное таким образом решение  $w_1$ ,  $P_1$  можно дополнить до точного, вводя новые неизвестные функции  $w_2$ ,  $P_2$ :  $w = w_1 + w_2$ ,  $P = P_1 + P_2$ .

Уравнение второго приближения относительно функции  $w_2$  является однородным, а уравнение для  $P_2$  — неоднородным с правой частью

$$2\omega^2 \rho l \delta(\xi) \sum_{j=1}^3 x_{j1} \exp(-\alpha_j \eta)$$

отражающей разрыв в производной первого приближения (1.2) для функции давления на линии действия силы. Ввиду экспоненциального затухания коэффициента при дельта-функции этот разрыв локализован на небольшом участке оси  $z$  вблизи пластины.

Решение неоднородного уравнения для  $P_2$  будем строить при помощи функции Грина уравнения Гельмгольца, удовлетворяющей однородному условию Неймана на поверхности пластины и условию излучения на бесконечности. Свертка ее с правой частью этого уравнения определяет излучающую компоненту давления, которую можно представить в виде суммы  $P_{2r} = P_2^{(\infty)} + P_2^{(1)}$ , где  $P_2^{(\infty)}$  совпадает с давлением, создаваемым при колебаниях бесконечной пластины под действием линейно сосредоточенной силы [2], а  $P_2^{(1)}$  характеризует излучение звука от краев пластины.

На поверхности пластины  $P_{2r}$  не обращается тождественно в нуль и не удовлетворяет первому уравнению (1.1). Образующуюся невязку снимем положив

$$P_2 = P_{2r} + P_{20}, \quad \partial P_{20} / \partial \eta |_{\eta=0} = \omega^2 \rho l w_{20}$$

Подстановка этой суммы в систему (1.1) приводит к однородному уравнению Гельмгольца относительно  $P_{20}$  и к уравнению

$$(1.6) \quad Lw_{20} + P_{20}(\xi, 0) = -P_{2r}(\xi, 0)$$

Оно отличается от первого уравнения (1.1) правой частью. Поэтому можно использовать выражение (1.2) для  $w_1$  в качестве приближенной функ-

ции Грина уравнения (1.6). Тогда

$$w_{20}(\xi) = -\frac{l}{q} \int_{-1}^1 w_1(\xi - \xi_0) P_{2r}(\xi_0, 0) d\xi_0$$

Определенные таким образом функции  $w_2, P_2$  отличаются от точного решения на величины  $w_3, P_3$ . Вследствие этого рекуррентный процесс может быть продолжен: записывая суммы  $w = w_1 + w_2 + w_3, P = P_1 + P_2 + P_3$  и подставляя их в исходную систему уравнений, получим уравнения третьего приближения.

2. Сопоставим приближенное аналитическое решение с результатами численного решения. Численное решение рассматриваемой задачи будем строить на основе интегродифференциального уравнения, которое в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$(2.1) \quad \frac{d^4 w^\circ}{d\xi^4} - p_1 \lambda^2 w^\circ = \frac{i}{2} p_2 \lambda^2 \int_{-1}^1 H_0^{(1)}(\gamma r) w^\circ(\zeta) d\zeta + p_3 q^\circ \delta(\xi - \xi_q)$$

$$r = |\xi - \zeta|, \quad \gamma = p_4 \lambda, \quad \lambda = 2\omega l \left[ \frac{\rho_0 (1 - \nu^2)}{E} \right]^{1/2}$$

$$w^\circ = \frac{w}{\bar{W}}, \quad q^\circ = \frac{q}{\bar{F}}$$

$$p_1 = 12 \left( \frac{l}{h} \right)^2, \quad p_2 = p_1 \frac{l}{h} \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p_3 = 8 \frac{l^3 \bar{F}}{D \bar{W}}$$

$$p_4 = \frac{1}{c} \left[ \frac{E}{\rho_0 (1 - \nu^2)} \right]^{1/2}$$

Здесь  $\lambda$  — безразмерная частота,  $p_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — безразмерные параметры  $\xi_q$  — координата линии приложения нагрузки,  $\bar{W}, \bar{F}$  — масштабные постоянные.

Выделяя в решении нерегулярную составляющую, представим функцию прогиба в виде (в дальнейшем индекс  $^\circ$  опускаем)

$$w(\xi) = w_0(\xi) + p_3 q G_0(\xi, \xi_q)$$

где  $G_0(\xi, \xi_q)$  — функция Грина задачи без учета жидкости. Регулярная составляющая  $w_0(\xi)$  удовлетворяет уравнению вида (2.1), в котором вторым слагаемым в правой части уравнения является

$$\frac{i}{2} p_2 p_3 \lambda^2 q H(\xi, \xi_q), \quad H(\xi, \xi_q) = \int_{-1}^1 H_0^{(1)}(\gamma r) G_0(\zeta, \xi_q) d\zeta$$

Для численного решения интегродифференциального уравнения относительно  $w_0(\xi)$  введем на отрезке  $-1 \leq \xi \leq 1$  равномерную сетку

$$\Delta_{N+1} = \{\xi_j = -1 + (j-1)\delta, j = 1, 2, \dots, N+1; \delta = 2/N\}$$

Выполним аппроксимацию уравнения в узлах  $j = 2, 3, \dots, N$ , заменяя производную функции  $w_0(\xi)$  разностным отношением второго порядка точности, а функцию  $w_0(\xi)$  под знаком интеграла — кусочно-линейной, интерполирующей функцией (на сетке  $\Delta_{N+1}$ ). Для аппроксимации производной в уравнении (2.1) в узлах  $j = 2, N$  и производных в краевых условиях введем законтурные точки  $\xi_{N+2} = \xi_{N+1} + \delta, \xi_0 = \xi_1 - \delta$ . Затем при помощи уравнений, аппроксимирующих краевые условия, исключаются значения сеточной функции  $w_j$  в узлах  $j = 0, 1, N+1, N+2$  из разрешающей системы алгебраических уравнений. В результате приходим к уравнениям, которые в матрично-векторной форме записываются следующим образом:

$$(2.2) \quad A_p W = (i/2) p_2 \lambda^2 \delta^4 (A_g W + p_3 q H)$$

$$W = [w_2, w_3, \dots, w_N]^T, \quad H = [H_2, H_3, \dots, H_N]^T, \quad H_j = H(\xi_j, \xi_q)$$

Здесь  $A_p, A_g$  — матрицы порядка  $N-1$ , аппроксимирующие дифференциальный и интегральный операторы. Ленточная матрица  $A_p$  содержит вещественные элементы. Комплексные элементы матрицы  $A_g$  выражаются по формуле

$$a_{jk} = -(k-j-1) h_{k,j+1}^0 + (k-j+1) h_{k+1,j+1}^0 + \delta^{-1} (h_{k+1,j+1}^1 - h_{k,j+1}^1)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, N-1$$

Матрицы  $\{h_{jk}^0\}$ ,  $\{h_{jk}^1\}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ;  $k = 1, 2, \dots, N + 1$ ) имеют следующую простую структуру:

$$\{h_{jk}^0\} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_2 & a_1 & a_1 & \dots & a_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_j = \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} H_0^{(1)}(\gamma\xi) d\xi$$

$$\{h_{jk}^1\} = \begin{vmatrix} -b_1 & b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ -b_2 & -b_1 & b_1 & \dots & b_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}$$

$$b_j = \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} H_0^{(1)}(\gamma\xi) \xi d\xi$$

После отделения действительных и мнимых частей в (2.2) получаем систему алгебраических уравнений порядка  $2(N - 1)$  относительно действительных и мнимых частей значений  $w_j$ , аппроксимирующих регулярную составляющую прогиба  $w_0(\xi)$  в узлах  $j = 2, 3, \dots, N$ .

В численном исследовании, проведенном по указанному алгоритму, рассматривался случай колебаний стальной пластины, контактирующей с водой. Были заданы следующие значения параметров задачи:  $l/h = 100$ ,  $p_1 = 1,2 \cdot 10^5$ ,  $p_2 = 1,538 \cdot 10^6$ ,  $p_3 = 480$ ,  $p_4 = 3,494$ . В качестве масштабной постоянной  $\bar{W}$  было принято значение прогиба при статическом нагружении пластины сосредоточенной силой, приложенной в средней точке:  $\bar{W} = ql^3/(6D)$ .

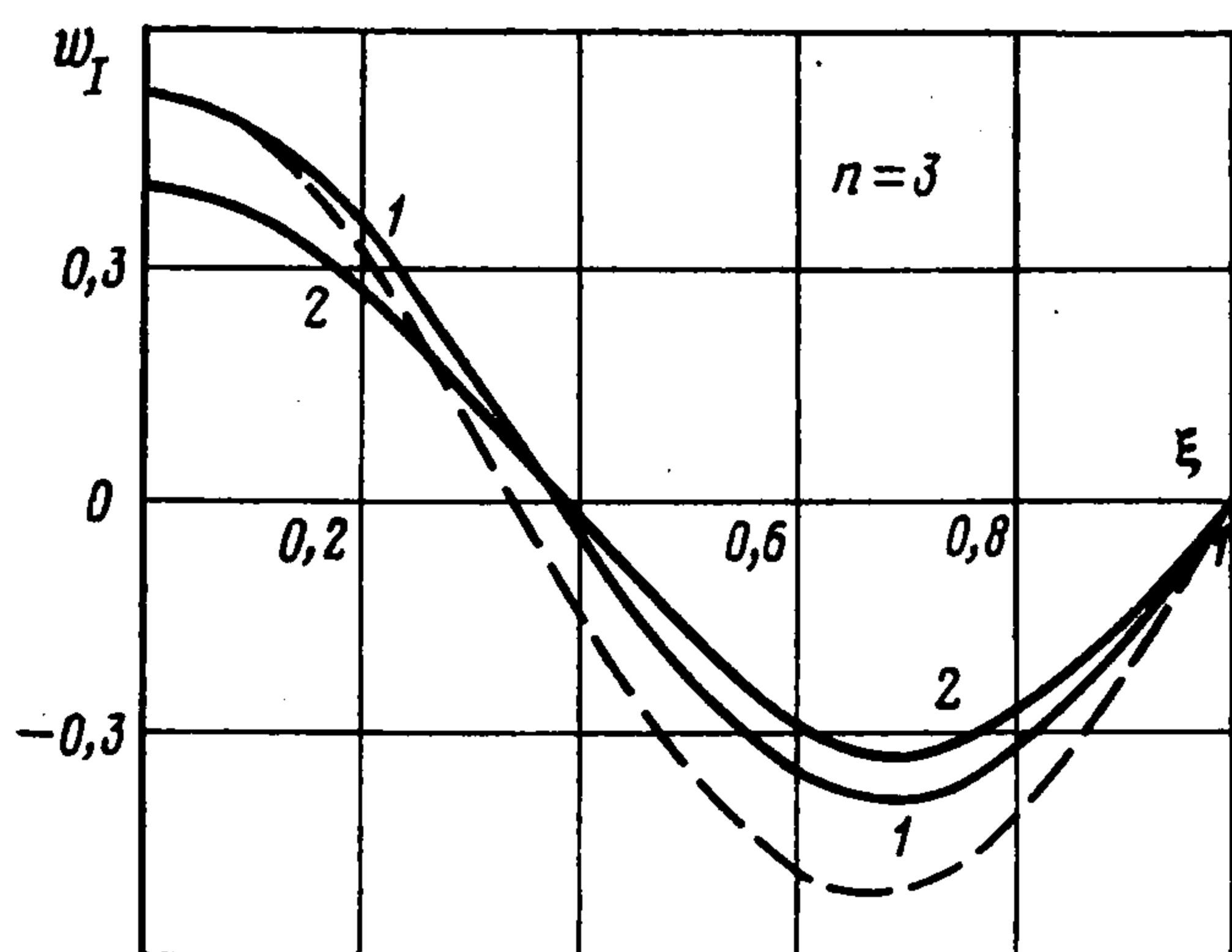
Результаты численного решения сравнивались с результатами приближенного аналитического метода (п. 1), а в случае резонансных колебаний — и с решением задачи о свободных колебаниях бесконечной пластины ( $-\infty \leq x \leq \infty$ ), контактирующей с жидкостью. В последнем случае существует решение типа стоячих волн  $w(\xi) = w_0 \sin k_0 \xi$ . Дисперсионное уравнение, являющееся условием существования этого решения, сводится к уравнению (1.3) относительно величины  $(k_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ,  $k_0 > \gamma$ .

Ниже в первой строке приведены значения пяти первых резонансных частот  $\lambda_n$ , найденные численным методом. Во второй строке представлены результаты расчета по формулам (1.2)–(1.5). Оценки резонансных частот, определенные из дисперсионного уравнения при целом числе полуволн, укладывающемся на ширине ограниченной пластины, приведены в третьей строке

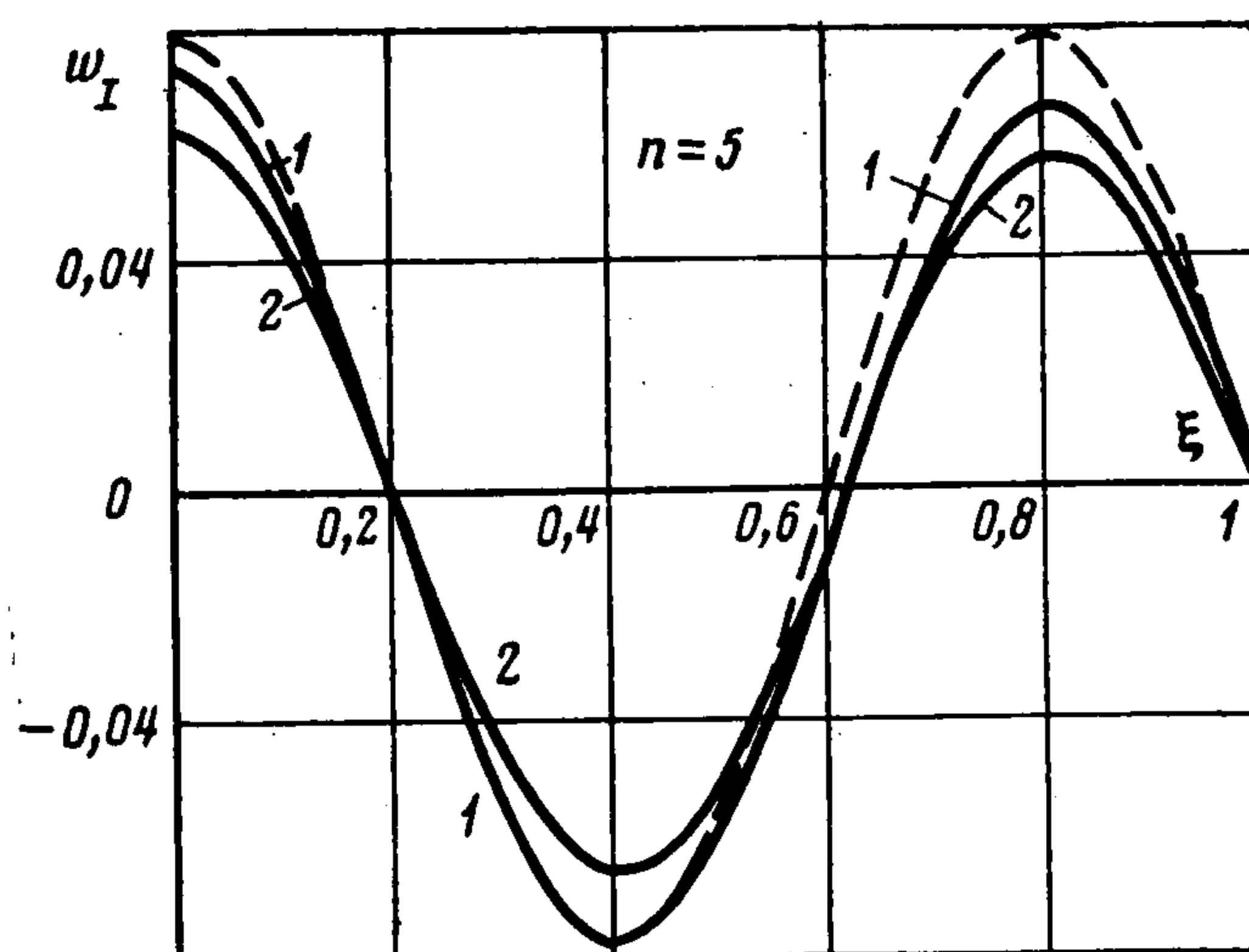
1)	0,0062	0,0584	0,151	0,301	0,504
2)	0,0068	0,0618	0,154	0,299	0,509
3)	0,0126	0,0653	0,167	0,320	0,528

Решение типа стоячих волн может быть получено из (1.2) если в качестве граничных условий для функции давления взять  $P_1(\pm 1, 0) = 0$ . В этом случае резонансные формы колебаний совпадают по виду с формами собственных колебаний ограниченной пластины в вакууме. Таким образом, значения резонансных частот в первом приближении можно определить при помощи указанного дисперсионного уравнения, однако для низших частот такая оценка является довольно грубой. Заметим, что оценка первой резонансной частоты по методу Лэмба [3] имеет погрешность такого же порядка.

При резонансных колебаниях модуль комплексной амплитуды прогиба  $w = w_R + iw_I$  достигает максимального значения, причем  $\max_{\xi} |w_I(\xi)| \gg \max_{\xi} |w_R(\xi)|$ . Как показывают расчеты, графики функции  $w_j(\xi)$  при резонансных колебаниях по первым симметричной и антисимметричной формам практически не отличаются от графиков собственных форм прогиба ограниченной пластины в вакууме. Однако для вторых и последующих симметричной и антисимметричной форм наблюдаются заметные отличия. На фиг. 2, 3 сплошными линиями изображены графики функции  $w_I(\xi)$  для резонансных колебаний по второй и третьей симметричным формам (кривая 1 — численное решение, кривая 2 — приближенное аналитическое решение), а штриховыми линиями нанесены соответствующие собственные формы колебаний шарнирно опертой пластины в вакууме, нормированные к максимальному значению  $w_I$ . Видно, что приближенное аналитическое решение (1.2)–(1.5) позволяет не только с достаточной



Фиг. 2



Фиг. 3

точностью определять резонансные частоты колебаний, но и правильно описывает особенности резонансных форм колебаний пластины в жидкости, отличающие их от соответствующих форм колебаний в вакууме. Несмотря на то, что эти отличия не очень велики (для второй симметричной формы расхождение в амплитудах полуволн составляет 27%, а для третьей — 16,5%), они обуславливают большое влияние на значения амплитуд прогиба и генерируемое пластиной резонансное акустическое поле.

Для шарнирно опертой пластины в вакууме  $n$ -я собственная форма симметричных колебаний описывается функцией  $w_n = A_n \cos(\pi n \xi / 2)$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ). Считая, что она описывает и резонансные колебания пластины в жидкости, как это предполагается в ряде работ, определим амплитудный множитель  $A_n$  на соответствующей резонансной частоте. Для этого подставим  $w_n$  в интегродифференциальное уравнение (2.1), домножим его левую и правую части на  $\cos(\pi n \xi_0 / 2)$  и проинтегрируем по ширине пластины. В результате придем к выражению

$$A_n = \frac{q}{lW} \left[ D \left( \frac{\pi n}{2} \right)^4 - 2\omega^2 \rho_0 h - \omega^2 \rho l \frac{i}{2} I_n \right]^{-1}$$

$$I_n = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi n \xi}{2} \cos \frac{\pi n \xi_0}{2} H_0^{(1)}(\gamma |\xi - \xi_0|) d\xi_0 d\xi$$

Действительная часть выражения в квадратных скобках обращается в нуль на резонансной частоте, а мнимая часть определяет резонансную амплитуду. Расчеты, проведенные по этой формуле, дают следующие значения безразмерной амплитуды резонансных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью, на первой, второй и третьей симметричных формах:  $|A_1| = 3,3$ ;  $|A_3| = 0,065$ ;  $|A_5| = 0,0012$ . Соответствующие максимальные амплитуды, полученные численным методом, равны 3,9; 0,52; 0,078. Приближенное аналитическое решение (1.2)—(1.5) дает значения 4,4; 0,40; 0,065.

Сравнение этих результатов показывает, что за исключением первой резонансной формы, использование собственных форм колебаний пластины в вакууме для описания резонансных гидроупругих колебаний пластины, симметричных относительно центральной плоскости  $x = 0$ , приводит к существенному занижению резонансных амплитуд колебаний. Это объясняется компенсирующим влиянием жидкости, вследствие которого интеграл от функции резонансного прогиба, взятый по ширине пластины, много меньше интеграла от функции, описывающей собственную форму симметричных колебаний пластины с тем же числом волн в вакууме. Ошибка в определении амплитуд прогиба при резонансных колебаниях влечет за собой ошибку при вычислении давления в дальнем поле. Так, например, отождествление второй симметричной резонансной формы гидроупругих колебаний пластины (с тремя полуволнами по ширине) с ее собственной формой приводит к занижению максимальной амплитуды прогиба в 8 раз, а давления в дальнем поле — в  $\sqrt{8}$  раз.

Для антисимметричных форм колебаний пластины компенсирующее влияние жидкости сказывается, напротив, в снижении резонансных амплитуд колебаний по сравнению с их ожидаемыми значениями при использовании соответствующих собственных форм колебаний в вакууме. Тем не менее, вследствие общей уравновешенности относительно недеформированного состояния, их уровень в целом значительно выше, чем

у соседних симметричных форм. Наиболее ярко это проявляется при сравнении максимальных амплитуд прогиба для первых симметричной и антисимметричной форм: 3,9 при  $\lambda_1 = 0,0062$  против 33 при  $\lambda_2 = 0,0584$  ( $\xi_q = 0,4$ ). Видно, что, несмотря на общую тенденцию снижения амплитуд резонансных колебаний с ростом частоты, амплитуда первой антисимметричной формы почти на порядок выше, чем у первой симметричной формы колебаний.

Таким образом, влияние жидкости на колебания ограниченной пластины проявляется не только в снижении резонансных частот, но и в искажении резонансных форм колебаний пластины, оказывающем существенное влияние на амплитуды прогиба и акустическое давление в среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Попов А. Л. Приближенный метод построения решения задач о колебаниях сосредоточенными нагрузками оболочек и пластин в жидкости.— В кн.: Тр. XIII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин. Изд-е Таллин. политехн. ин-та, 1983, т. 4, с. 89—94.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VII.1985