Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 539.3

О ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОЩЕЛКИВАНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Срубщик Л. С., Юдович В. И.

Исследуется динамическая неустойчивость «в большом» нелинейной упругой непрерывной консервативной системы с релеевским трением под действием нагрузки, мгновенно приложенной в момент времени $t = 0$ и сохраняющей постоянное значение для всех $t \geqslant 0$ [1—6]. При помощи анализа потенциальной энергии, понятий ямы и запаса устойчивости равновесия, введенных А. Д. Мышкисом [7, 8], даются определения динамической устойчивости системы, критической нагрузки ее динамического прощелкивания и астатической критической нагрузки. Последняя дает оценку снизу тем значениям нагрузки, для которых имеет место динамическое прощелкивание. Для класса систем с потенциальной энергией вида квадрат нормы плюс слабонепрерывный функционал [9], к которому относятся, например, пологие упругие оболочки [10—12], доказывается, что из неединственности устойчивого равновесия следует существование седел с отрицательным индексом. При этом на границе ямы каждого устойчивого равновесия находится, по крайней мере, одна седловая точка. Таким образом, запас устойчивости приобретает наглядный смысл как наименьшая среди энергетических высот перевалов, ведущих из ямы данного равновесия в ямы других равновесий (или на бесконечность, что, правда, невозможно, для растущих на бесконечности функционалов). Применение этого свойства для систем с потенциальной энергией, зависящей от параметра нагрузки p, является основой эффективного вычисления запаса устойчивости и астатической критической нагрузки p_a.

Проводится обоснование применимости энергетического подхода для нелинейных уравнений колебаний упругих пологих оболочек. В частности, рассматривается классическая задача о динамическом прощелкивании пологой упругой сферической оболочки под действием мгновенно приложенной гидростатической нагрузки и приводится пример определения астатической критической нагрузки p_a в случае неединственности семейств неустойчивых равновесий. Отметим, что нагрузки p_a для пологих сферических оболочек при разных геометрических параметрах и краевых условиях найдены ранее в работах [13—17]. Хорошая согласованность значений p_a и критической нагрузки динамического прощелкивания, полученной прямым численным интегрированием нестационарной задачи [2—6, 13—18], указывает на эффективность применения развиваемого здесь энергетического подхода в теории оболочек.

Соображения, связанные с оценкой высоты энергетического барьера, применялись ранее к конечномерным моделям метода Галеркина для уравнений колебаний арок [1, 19—21]. Разумеется, приведенные далее рассмотрения охватывают и случай систем с конечным числом степеней свободы.

1. Уравнение колебаний нелинейной упругой системы. Область возможных движений. В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим уравнение колебаний консервативной механической системы при наличии сил вязкого трения

$$\omega_{tt} + \beta B\omega_t + I'(\omega) = 0, \quad I'(\omega) = \operatorname{grad}_H I(\omega) \tag{1.1}$$

$$I(\omega) = {}^1\!/_2 (A\omega, \ \omega)_H - \varphi(\omega)$$

Уравнение (1.1) было введено в [11] как абстрактная модель системы нелинейных уравнений движения пологих упругих оболочек. Здесь $\omega(t)$ — неизвестная вектор-функция времени t со значениями в H, $I(\omega)$ — потенциальная энергия системы, $\beta B\omega_t$ — релеевское трение, β — коэффициент трения.

Будем считать выполненными следующие условия.

1) Операторы A, B линейные. Их области определения D_A, D_B плотны в H. Оператор A — самосопряженный, положительно-определенный, с вполне непрерывным обратным оператором A^{-1}. На множестве D_A введем скалярное произведение

(1.2) $$(\omega_1, \omega_2)_{H_A} = (A\omega_1, \omega_2)_H$$

Замыкание D_A в норме (1.2) дает полное гильбертово пространство H_A — энергетическое пространство оператора A [22]. Вложение H_A в H вполне непрерывно.

Оператор B — самосопряженный положительно-определенный оператор, действующий ограниченно из H в H.

2) Функционал $I(\omega)$ задан на всем пространстве H_A и возрастающий по ω: $I(\omega) \to \infty$ при $\|\omega\|_{H_A} \to \infty$. При помощи (1.2) перепишем $I(\omega)$ в виде

(1.3) $$I(\omega) = {}^1/_2 \|\omega\|^2_{H_A} - \varphi(\omega)$$

Здесь $\varphi(\omega)$ — слабонепрерывный, дважды непрерывно дифференцируемый функционал в H_A. Тогда $\varphi'(\omega)$ — вполне непрерывный оператор, действующий из H_A в H (теорема Э. С. Цитланадзе [9], с. 85).

Зададим начальные условия

(1.4) $$\omega|_{t=0} = g_0, \quad \omega_t|_{t=0} = g_1; \quad g_0 \in H_A, \quad g_1 \in H$$

Из (1.1), (1.4) получим уравнение диссипации энергии

(1.5) $$E_t = -\beta(B\omega_t, \omega_t)_H \leqslant 0$$
$$E(t) = {}^1/_2 \|\omega_t\|_H{}^2 + I(\omega)$$

Интегрируя по времени от s до t и полагая $s = 0$ и $s = \infty$, приходим к неравенству

$$E(\infty) \leqslant E(t) \leqslant E(0)$$
$$E(0) = {}^1/_2 \|g_1\|_H{}^2 + I(g_0)$$

Пусть $\beta = 0$. Тогда система (1.1) консервативна и для нее выполняется закон сохранения энергии: $E(t) = E(0)$. Отсюда следует, что при $\beta = 0$ возможные движения системы (1.1) находятся в области V, определяемой неравенством

(1.6) $$I(\omega) \leqslant E(0)$$

2. Яма устойчивого равновесия и седловые точки энергии. Установим некоторые свойства функционала $I(\omega)$. Для любого $j \in R$ введем множества меньших значений уровня энергии j:

$$M_j = \{\omega \in H_A : I(\omega) \leqslant j\}$$

Лемма 2.1. Множество M_j ограничено и слабо замкнуто. Граница ∂M_j — замкнутое, но, вообще говоря, не слабо — замкнутое множество.

Доказательство. Если предположить, что M_j не ограничено, то существует последовательность $\omega_n \in M_j$, такая, что $\|\omega_n\|_{H_A} \to \infty$. Так как $I(\omega)$ — растущий по ω функционал, получаем $I(\omega_n) \to \infty$, но это противоречит неравенству $I(\omega_n) \leqslant j$. Следовательно, M_j — ограниченное множество. Пусть $\omega_n \xrightarrow{\text{сл}} \omega_0$, причем $\|\omega_n\|_{H_A} \to$ $\to d$. Тогда $\varphi(\omega_n) \to \varphi(\omega_0)$ и $\|\omega_0\|_{H_A} \leqslant d$. Переходя в неравенстве $I(\omega_n) \leqslant j$ к пределу при $n \to \infty$, ввиду полунепрерывности нормы относительно слабой сходимости, выводим ${}^1/_2\, d^2 - \varphi(\omega_0) \leqslant j$. Применяя оба неравенства, получаем

$$I(\omega_0) = {}^1/_2 \|\omega_0\|^2_{H_A} - \varphi(\omega_0) \leqslant {}^1/_2\, d^2 - \varphi(\omega_0) \leqslant j$$

т. е. M_j — слабозамкнутое множество. Очевидно, что граница $\partial M_j = \{\omega \in H_A : I(\omega) = j\}$ — замкнутое множество. Вместе с тем ∂M_j не обязательно слабозамкнутое множество ([9], с. 303).

Критические точки (КТ) функционала I определяются из уравнения

(2.1) $$I'(\omega) \equiv \omega - \varphi'(\omega) = 0, \quad I'(\omega) = \mathrm{grad}_H\, I(\omega)$$

Обозначим C_I множество КТ функционала I: $C_I = \{\omega \in H_A : I'(\omega) = 0\}$.

Лемма 2.2. Пусть $u \in C_I$. Тогда дифференциал Фреше $I''(u) = 1 - \varphi''(u)$ имеет не более конечного числа отрицательных собственных значений.

Доказательство. Линейный оператор $\varphi''(u)$ вполне непрерывен ([9], с. 140). Его спектр может иметь только одну предельную точку $\lambda = 0$, поэтому вне окрестности точки $\mu = 1$ ($\mu = 1 - \lambda$) спектр оператора $1 - \varphi''(u)$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

Из леммы 2.2 вытекают два следствия.

Следствие 2. 1. КТ функционала I не может быть точкой его относительного максимума в H_A.

Разумеется, этот результат справедлив лишь в бесконечномерном случае. Для систем с конечным числом степеней свободы, аппроксимирующих упругие системы, иногда появляются максимумы [1], что явно указывает на недостаточность аппроксимации.

Следствие 2.2. Если спектр оператора $1 - \varphi''(u)$ положительный, то $u \in C_I$ есть точка относительного минимума функционала I в H_A.

Определение. КТ s функционала $I(\omega)$ называется седловой точкой, если дифференциал Фреше $1 - \varphi''(s)$ имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Сумма кратностей отрицательных собственных значений оператора называется типом седловой точки.

Тогда, как известно ([9], с. 303), функционал $I(\omega)$ имеет, по крайней мере, одну точку минимума. Пусть $K_j(m)$ — компонента связности множества M_j, содержащая точку минимума m. Очевидно, что существуют такие значения j ($\geqslant I(m)$), при которых $K_j(m)$ не содержит других КТ.

Лемма 2.3. Если граница $\partial K_j(m)$ не содержит КТ, то для $\omega \in \partial K_j(m)$, существует число $\alpha > 0$, такое, что $\| I'(\omega) \|_H \geqslant \alpha$.

Доказательство повторяет известные рассуждения ([9], с. 112).

Пусть $j^* = \sup j$, где верхняя грань берется по тем значениям энергии j, для которых $K_j(m)$ не содержит других КТ, кроме m. Далее используется обозначение $K_{j^*}(m) = K^*$.

Теорема 2.1 (*о седловой точке*). Пусть m и n — изолированные точки относительного минимума функционала I. Тогда в невырожденном случае граница ∂K^* содержит хотя бы одну седловую точку функционала I: $\partial K^* \cap C_I = \varnothing$, ∂K^* не содержит максимумов и минимумов.

Доказательство. Для относительного минимума $I(m)$ существует окрестность $G(m) \in H_A$, такая, что $I(\omega) > I(m)$ $\forall \omega \in G(m) \setminus m$. Рассмотрим последовательность точек $\omega^l \in K^*$, такую, что $I(m) < j_1 < j_2 < \ldots \to j^* = \sup I(\omega)$, $\omega \in K_1^*$, $j_l = K(\omega^l)$, где j_l — монотонно возрастающая последовательность чисел, для которых множества $K_l = K_l(m) = \{\omega \in H_A : I(\omega) < j_l\}$ не содержит КТ, кроме m. Каждое из множеств K_l содержится в последующем вместе с некоторой своей окрестностью и $\bigcup K_l = K^*$. При этом на $K_{l+1} \setminus K_l$ выполняется неравенство $I(\omega^l) < I(\omega) \leqslant I(\omega^{l+1})$, так как в противном случае в $K_{l+1} \setminus K_l$ нашлась бы компонента минимума или максимума, вопреки определению K_{l+1}. В силу непрерывной дифференцируемости функционала $\varphi(\omega)$ и существования другой КТ n верхняя грань j^* конечна.

Покажем, что ∂K^* содержит КТ. Предположим противное, т. е. $\partial K^* \cap \cap C_l = \varnothing$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ построим множество $K_\delta^* \equiv \equiv K^*_{j^*+\delta}$, не содержащее КТ. Действительно, для точки $y \in K_\delta^* \setminus K^*$, такой, что $\| y - \omega \|_{H_A} < \delta$, $\omega \in \partial K^*$, имеем

$$\| I'(y) - I'(\omega) \| \leqslant M \| y - \omega \|_{H_A} \leqslant M\delta, \ M = 1 + \\ + \max \| \varphi''(\omega_0) \|.$$

где максимум берется по значениям $\omega_0 \in \partial K^* \cup (K_\delta^* \setminus K^*)$. Отсюда при помощи леммы 2.3 выводим

$$\| I'(y) \| \geqslant \| I'(\omega) \| - M\delta \geqslant \alpha - M\delta > \alpha/2$$

если $\delta < \alpha/(2M)$. В результате построено множество K_δ^*, не содержащее КТ, отличных от m, что противоречит определению j^*. Таким образом, доказано существование на ∂K^* КТ функционала I. Обозначая эту точку γ, имеем $I'(\gamma) = 0$, $I(\gamma) = j^*$, $\gamma \in \partial K^*$. Из следствия 2.1 заключаем, что КТ γ не может быть точкой относительного максимума функционала I. Она будет седловой точкой на ∂K^*, так как не может быть и точкой относительного минимума I.

Предположим противное, т. е. существование малого числа $\varepsilon > 0$, такого, что при $\omega \in S_\varepsilon \equiv \{\omega \in H_A \colon \| \omega - \gamma \|_{H_A} < \varepsilon\}$ имеет место неравенство $I(\omega) > I(\gamma)$, если $\omega \neq \gamma$. Тогда для точек $\omega \in S_\varepsilon \cap K^*$ согласно построению получаем противоречивое неравенство $I(\omega) < I(\gamma) = j^*$.

Теорема 2.2. Пусть m и n — изолированные точки относительного минимума функционала $I(\omega)$. Других точек минимума нет. Тогда в невырожденном случае функционал $I(\omega)$ имеет седловую точку с индексом -1.

Доказательство. В силу следствия 2.1 КТ функционала $I(\omega)$ не может быть максимумом. Индекс минимального равновесия в случае, когда равновесие невырождено, равен $+1$. Действительно, если m — точка минимума, то спектр дифференциала Фреше $1 - \varphi''(m)$ положительный и собственные числа λ_k линейного вполне непрерывного с оператора $\varphi''(m)$ удовлетворяют неравенству $\lambda_k < 1$. Тогда из теоремы Лерэ — Шаудера ([9], с. 141) получаем, что индекс невырожденного мининимума равен $+1$.

Далее, вращение вполне непрерывного векторного поля $\omega - \varphi'(\omega)$ на больших сферах $S_\rho = \{\omega \colon \| \omega \|_{H_A} = \rho\}$ равно $+1$, так как это поле гомотопно полю ω ([23], с. 152). Теперь теорема следует из принципа Лерэ — Шаудера.

Определение ямы [7, 8]. Ямой $J(m)$ устойчивого равновесия m называется связное множество в H_A, содержащее m и состоящее из тех точек ω, для которых $I(\omega) < j^*$, где j^* — верхняя грань тех значений энергии j, для которых множества $\{\omega \in H_A \colon I(\omega) < j\}$ не содержат отличных от m устойчивых равновесий (фиг. 1, a).

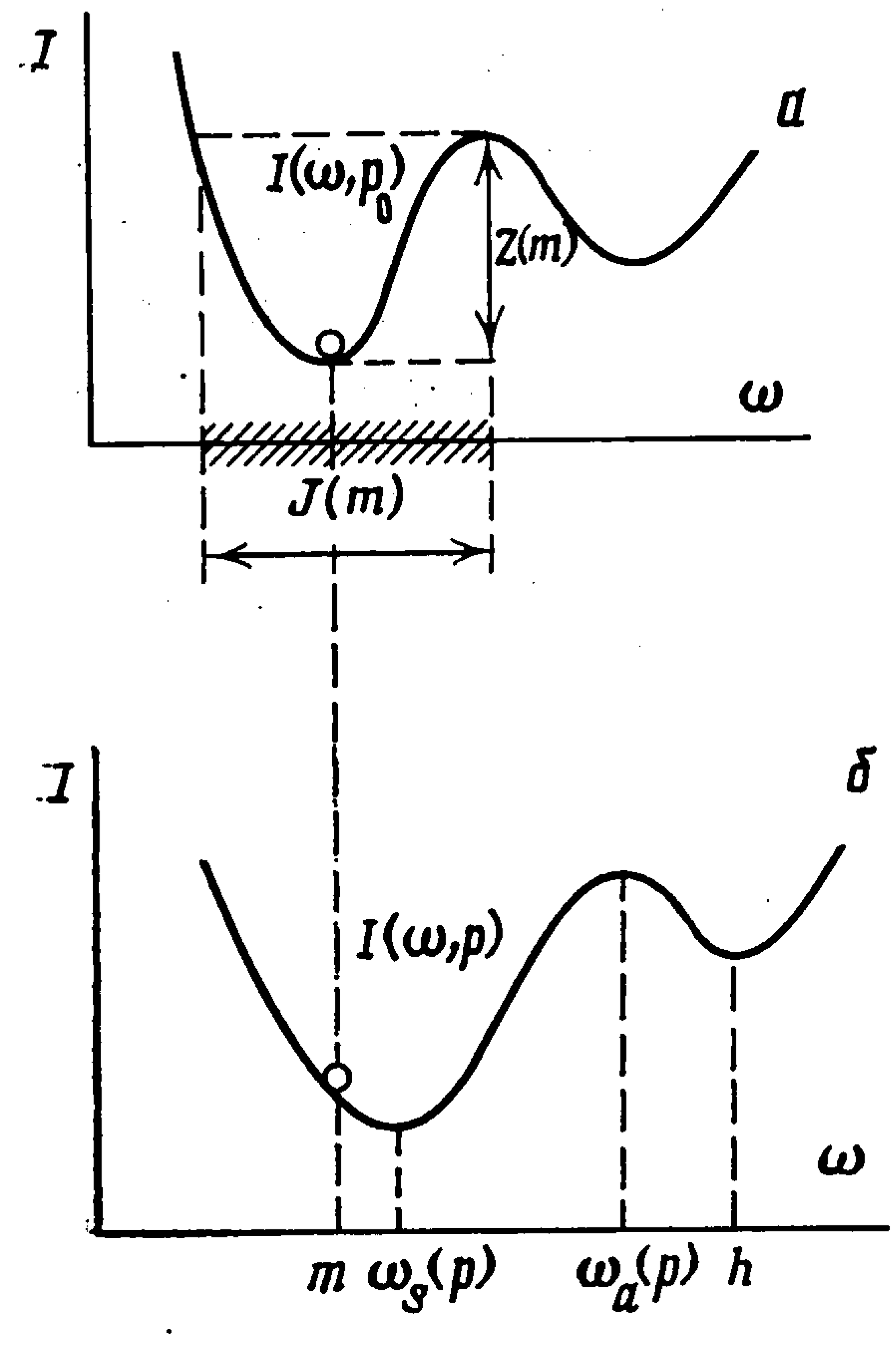
Очевидно, что $J(m) = K_{j^*}(m)$. Таким образом, для систем (1.1) с потенциальной энергией вида квадрат нормы плюс слабонепрерывный функционал [9] при помощи теорем 2.1 и 2.2 получаем, что из неединственности устойчивого равновесия следует существование седел с отрицательным индексом. При этом на границе ямы каждого устойчивого равновесия находится, по крайней мере, одна седловая точка. Указанный факт позволяет оценить глубину ямы устойчивого равновесия. Следуя А. Д. Мышкису [7], под глубиной ямы $J(m)$ или запасом устойчивости равновесия будем понимать величину

$$Z(m) = I(\gamma) - I(m)$$

где γ — любое неустойчивое равновесие на $\partial J(m)$.

3. Динамическое прощелкивание (ДП). Астатическая критическая нагрузка (КН). Многие задачи о ДП нелинейных упругих систем вида (1.1) укладываются в следующую общую схему.

Пусть $I = I(\omega, p)$ зависит от параметра нагрузки p и $\omega_s(p)$ — непрерывное однопараметрическое семейство устойчивых равновесий системы (1.1), отвечающее значениям параметра нагрузки из $[p_0, p_k)$. Пусть для значения p_0 система находится в равновесии $\omega_0 = \omega_s(p_0)$, а затем параметр нагрузки скачкообразно изменяется и принимает значение $p^0 \in [p_0, p_k)$ (для определенности рассматривается случай $p^0 > p_0$, аналогично можно рассматривать и случай $p^0 < p_0$).



Фиг. 1

Ставится вопрос, остается ли система в яме равновесия $\omega_s(p^0)$ или с течением времени из нее уходит. Дело, таким образом, сводится к исследованию поведения решения задачи Коши для системы (1.1) с начальными данными $\omega(0) = \omega_0$, $\omega_t(0) = 0$. Если $\omega(t) \in J(\omega_s(p^0))$ для всех $t > 0$, то будем говорить что ДП отсутствует. Если же $\omega(t)$ при некотором t_* оказывается вне ямы $J(\omega_s(p^0))$, то имеет место ДП.

Для основного равновесия $\omega_0 = \omega_s(p_0)$ определим КН ДП $p_d{}^*$, полагая ее равной верхней грани значений p, для которых движение системы (1.1) с начальными условиями $\omega(0) = \omega_0$, $\omega_t(0) = 0$ при всех $t > 0$ остается в яме $J(\omega_s(p))$ (фиг. 1, *б*). Таким образом, когда p слегка превосходит $p_d{}^*$, указанное движение в некоторой момент времени выйдет из ямы равновесия $\omega_s(p)$ — это и есть, согласно определению, ДП.

Пусть при $p = p^0$ область возможных движений $V(p^0)$ (см. (1.6)) удовлетворяет условию $V(p^0) \subseteq J(\omega(p^0))$. Тогда ДП нет. Будем увеличивать p, начиная от p^0. В силу теоремы 2.1 ДП становится возможным при наименьшем значении p, для которого седловая точка на $\partial J(\omega_s(p))$ попадает в область $V(p)$, определяемой неравенством (1.6). Очевидно, что ДП нет, если $\omega_s(p)$ — единственное равновесие системы (1.1).

Вычисление $p_d{}^*$ связано с интегрированием нестационарной системы (1.1) при различных p на неопределенном заранее (и, возможно, даже стремящемся к ∞ при $p \to p_d{}^*$) отрезке времени, что создает значительные трудности. Существенный ее недостаток — ограничительное условие $\omega_t(0) = 0$.

Далее введем астатическую КН p_a равновесия ω_0 как наименьшее решение уравнения

$$I(\omega_a(p_a),\ p_a) = I(\omega_0,\ p_a),\quad \omega_0 = \omega_s(p_0) \tag{3.1}$$

где $\omega_a(p_a)$ — неустойчивое равновесие на $\partial J(\omega_s(p_a))$, так что $I'(\omega_a(p_a), p_a) = 0$.

Таким образом, при $p = p_a$ (и p, слегка превосходящих p_a) сколь угодно малый, но надлежащим образом направленный толчок геодезической, соединяющей ω_0 с $\omega_a(p_a)$, выводит систему из $J(\omega_u(p_a))$.

Рассмотрим стационарную задачу.

$$I'(\omega, p) = 0 \tag{3.2}$$

Обозначим p_u верхнюю КН потери устойчивости основного семейства докритических равновесий $\omega_s(p)$, а p_l — нижнюю КН системы, т. е. наименьшую нагрузку, до которой решение системы (3.2) единственно. Предположим, что $p \in [0, p_u]$, $p_0 = 0$, $\omega_s(0) = 0$, $p_l > 0$, $I(\omega_0, p_a) = 0$. Тогда если одновременно выполняются неравенства

$$I(\omega_u, p_u) < 0,\quad I(\omega_l, p_l) > 0$$

где $\omega_u = \lim \omega_s(p)$ при $p \to p_u$, ω_l — решение системы (3.2) при $p = p_l$, причем $\omega_l \neq \omega_s(p_l)$, то значение p_a удовлетворяет неравенству $p_l < p_a < p_u$.

Ясно, что $p_a \leqslant p_d{}^*$, так что астатическая нагрузка дает оценку снизу для динамической. Можно полагать, что с практической точки зрения она более информативна, поскольку относится к более общим начальным условиям (вместо условия $\omega_t(0) = 0$ требуется лишь энергетическая малость величины $\omega_t(0)$). К тому же величину p_a во многих случаях значительно легче вычислить, поскольку, согласно теореме, для этого надо рассматривать лишь стационарные задачи. В ряде случае $p_a \approx p_d{}^*$. Совпадение имеет место, если ω_0 лежит на неустойчивом усе седла ω_a.

Рассмотрим множество значений p: $B_p = (p\colon I(y, p) = I(\omega_0, p))$, где y — любое решение уравнения $I'(y, p) = 0$, отвечающее неустойчивому равновесию. Обычно можно расположить значения $p \in B_p$ в виде неубывающей последовательности чисел p_i $(i = 1, \ldots, k)$. Каждому p_i соответствует седловая точка y_i. Очевидно, что $p_a \in B_p$ и $p_1 \leqslant p_a$. Если множество B_p состоит из одной точки, то $p_a = p_1$. Если множество B_p состоит более чем из одной точки, то возникает трудность в выделении тех седел y_i, которые принадлежат границе ямы $\partial J(\omega_s(p))$. При этом достаточно рассматривать лишь $p_i \in [p_0, p_u)$. Гарантию того, что седло принадлежит $\partial J(\omega_s(p))$, дает только решение нестационарной задачи (1.1).

Рассмотрим частный случай, когда уравнение (1.1) описывает колебания механической системы с N степенями свободы. Тогда $H_A = R^N$ — эвклидово пространство; $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_N(t)) \in R^N$ — координаты положения системы в момент времени t. Потенциальная энергия $I(\omega, p)$ — достаточно гладкая функция в некоторой области $L = \Omega \times [p_0, p_k]$ и возрастающая по ω : $\forall R > 0 \exists$, такое $r > 0$, что из условия $\|\omega\| > r$ следует $I(\omega, p) > R$ для всех $p \in [p_0, p_k]$.

Область Ω называется конфигурационным пространством системы. Ее фазовое пространство $M = \Omega \times R^N$ есть пространство всевозможных пар $(\omega, \omega_t) : \omega \in \Omega$, $\omega_t \in R^N$. При сделанных предположениях задача Коши с начальными условиями $\omega|_{t=0} = g_0$, $\omega_t|_{t=0} = g_1$ для уравнения (1.1) при $(g_0, g_1) \in M$ имеет (единственное ввиду гладкости) решение, определенное для всех $t > 0$. Действительно, из уравнения диссипации энергии (1.5), ввиду возрастания функции I по ω, следует априорная оценка решения для всех $t > 0$.

Критические точки функционала I, точки равновесия системы (1.1), удовлетворяют уравнению (2.1). При $\beta = 0$ каждая изолированная точка минимума m есть устойчивое равновесие системы (теорема Лагранжа), а при $\beta > 0$ оно становится асимптотически устойчивым. Определение ямы и доказательство теоремы о существовании на ее границе седловой точки в случае конечномерного пространства содержатся в [7]. Тип седловой точки s определяется числом инерции квадратичной формы, соответствующей дифференциалу Фреше $1 - \varphi''(s)$.

4. Динамическое прощелкивание упругих оболочек. Пусть D — односвязная область в плоскости (x, y), ограниченная достаточно гладким контуром $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; ρ, $\varkappa$, s_0 — внутрення нормаль, кривизна, длина дуги кривой Γ.

Следуя [10—12], введем гильбертовы пространства функций:

1) пространство $H = L_2(D)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_H = \int\limits_D uv\,dx\,dy \quad \forall u, \; v \in H$$

2) Пространство H_1 — замыкание множества бесконечно дифференцируемых в D функций, удовлетворяющих краевым условиям

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad w_\rho|_{\Gamma_1} = 0 \tag{4.1}$$
$$[w_{\rho\rho} - \nu\varkappa w_\rho]_{\Gamma_2} = 0, \quad 0 < \nu < {}^1/_2$$

с конечной нормой, порождаемой скалярным произведением

$$(w_1, w_2)_{H_1} = (\Delta^2 w_1, w_2)_H = \tag{4.2}$$
$$= \int\limits_D \{\Delta w_1 \cdot \Delta w_2 - (1 - \nu)[w_1, w_2]\}\,dx\,dy$$
$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy}, \quad \Delta^2 = \Delta\Delta$$
$$[u, v] = u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy}$$

H_1 — энергетическое пространство бигармонического оператора с краевыми условиями (4.1) на Γ.

3). В частном случае, когда $\Gamma \equiv \Gamma_1$, пространство H_1 будем обозначать H_2.

Рассмотрим упругую пологую оболочку со срединной поверхностью $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Для простоты будем считать, что край оболочки совпадает с кривой Γ и свободен от напряжений. В момент времени $t = 0$ к оболочке мгновенно прилагается нагрузка $q(x, y, p)$, которая сохраняет постоянное значение для всех $t \geqslant 0$ (p — параметр нагрузки и $q(x, y, 0) = 0$).

Уравнение нелинейных колебаний такой оболочки можно записать в виде

$$mhw_{tt} + I'(w, p) = 0, \; I'(w) = \mathrm{grad}_H I(w) \tag{4.3}$$
$$I(w, p) = \frac{D}{2} I_1(w) + \frac{1}{2Eh} I_2(F) - \int\limits_D qw\,dx\,dy$$
$$I_i(u) = \int\limits_D \{(\Delta u)^2 - (1 - \nu_i)[u, u]\}\,dx\,dy \quad (i = 1, 2)$$
$$D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)], \; \nu_1 = \nu, \; \nu_2 = -\nu$$

Здесь $w(x, y, t)$ — функция прогиба, удовлетворяющая на Γ краевым условиям (4.1), I — потенциальная энергия оболочки, F — функция напряжений Эри, m — масса единицы объема оболочки, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, E — модуль Юнга. При этом $F \in H_2$ и при заданной функции $w \in H_1$ однозначно определяется требованием, чтобы для всех $\chi_1 \in H_2$ выполнялось интегральное тождество

$$(4.4)\qquad 1/Eh(F,\ \chi_1)_{H_2} = \int\limits_D \{[z,\ w] - {}^1/_2 [w,\ w]\} \chi_1 \,dx\,dy$$

Покажем, что потенциальная энергия I удовлетворяет условиям п. 1. Согласно (4.4), имеем

$$(4.5)\qquad 1/EhF = F_1 + F_2$$

$$(F_1,\ \chi_1)_{H_2} = \int\limits_D [z,\ w] \chi_1 \,dx\,dy$$

$$(F_2,\ \chi_1)_{H_2} = -\frac{1}{2} \int\limits_D [w,\ w] \chi_1 \,dx\,dy, \quad \forall \chi_1 \in H_2$$

Применяя (4.5), из (4.3) выводим [12]

$$(4.6)\qquad 1/EhI_2(F) = \Phi_2^* + \Phi_3^* + \Phi_4^*$$

$$\Phi_2^* = {}^1/_2 \| F \|_{H_2}^2$$

$$\Phi_3^* = (F_1,\ F_2)_{H_2}, \quad \Phi_4^* = {}^1/_2 \| F_2 \|_{H_2}^2$$

где Φ_i^* — однородные функционалы порядка i относительно w.

Лемма 3.1 [10—12] [1]. Функционалы Φ_i^* ($i = 2,\ 3,\ 4$) и $\int\limits_D qwdxdy$ слабо непрерывны в H_1. При помощи леммы получаем, что функционал I можно представить в виде суммы $\| w \|_{H_1}{}^2$ и слабонепрерывного функционала, т. е. в виде (1.3). Из (4.3) следует, что $I\ (w)$ — возрастающий по w функционал (свойство коэрцитивности). Отметим, что аналогичные выводы получаются из результатов И. И. Воровича в случае краевых условий, отвечающих неподвижному закреплению края.

Таким образом, для системы (4.3) можно применить исследования п. 3, ввести астатическую КН и при помощи анализа нелинейных уравнений равновесия оценить снизу критическую нагрузку ДП оболочки.

Рассмотрим для примера задачу об осесимметричном ДП упругой свободно защемленной по краю сферической оболочки, находящуюся в равновесии $w_0 = w_s\ (p_0)$ под действием равномерно распределенного внешнего давления $q = p_0 q_0$ (здесь $q_0 = 32\ Eh_0{}^3 h \Lambda^{-2} a^{-4}$, $\Lambda^2 = 4\ [3(1 - \nu^2)]^{1/2} h_0 h^{-1}$, h_0 — высота подъема оболочки, h — ее толщина, a — радиус опоры, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона). В момент времени $t = 0$ к оболочке мгновенно прикладывается дополнительное давление $q = (p - p_0)\ q_0$ так, что при $t > 0$ на оболочку постоянно действует равномерно распределенное внешнее давление $q = pq_0$ ($p > p_0$).

В случае осесимметричной деформации потенциальная энергия оболочки записывается в безразмерных переменных в виде [16]

$$(4.7)\qquad I_0(w,\ p) = \frac{1}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{2} \| \Phi \|^2 + 2p \int\limits_0^\Lambda x^2 u\, dx$$

$$\Phi = \Phi(u) = \int\limits_x^\Lambda t^{-3}\, dt \int\limits_0^t \eta \left(\frac{1}{2} u^2 + \eta u \right) d\eta$$

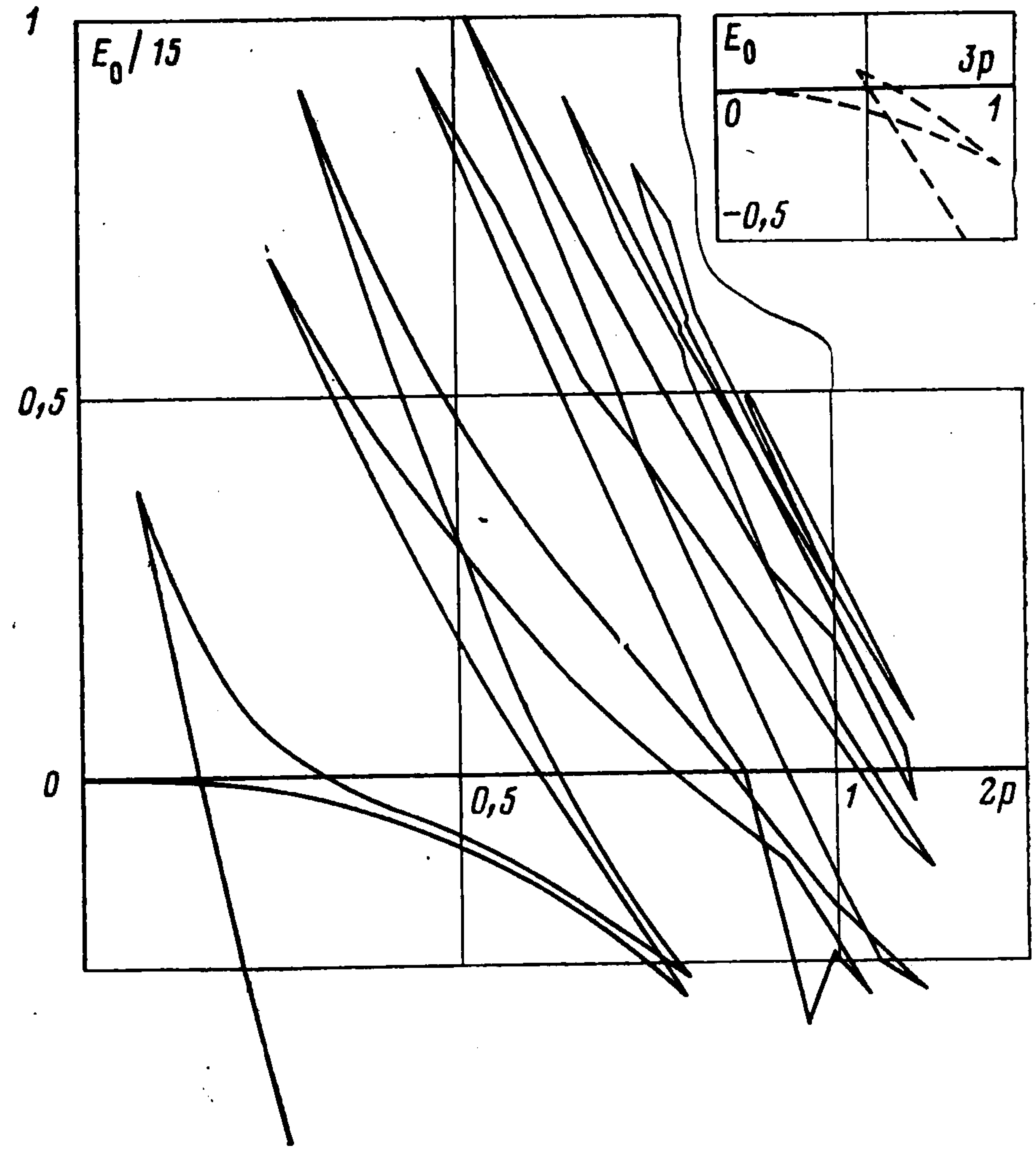
$$\| w \|_{H_A}^2 = \| u \|^2 = \int\limits_0^\Lambda \left(x u_x{}^2 + \frac{u^2}{x} \right) dx, \quad u = w_x$$

$$u(0) = u(\Lambda) = w(\Lambda) = 0, \quad I = \frac{h_0{}^2 h^3 E}{3(1 - \nu^2)\Lambda^2 a^2} I_0$$

Связь безразмерных величин с размерными определяется формулами (8) в [3], $\nu = {}^1/_3$.

---

[1] См. также: *И. И. Ворович*. Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1958. 367 с.



Фиг. 2

Для определения астатической КН равновесия w_0 надо найти значения $p \in [p_0, p_u)$, соответствующие точкам пересечения графиков $I_0(w^*, p)$ и $I_0(w_0, p)$, где $w^*(x, p)$ — решение стационарной задачи $I_0'(w^*, p) = 0$. При этом отбираются лишь те значения p, которые отвечают неустойчивым равновесиям. Указанные графики строятся методом пристрелки [24, 25].

Пусть $p_0 = 0$. Тогда $w_0 = w_s(0) = 0$ и $I_0(w_0, p_a) = 0$. Для определения точек множества B_p имеем уравнение $I_0(y, p) = 0$, где y — любое решение уравнения $I_0'(y, p) = 0$, отвечающее неустойчивому равновесию. На фиг. 2 в правом верхнем углу представлен график $E_0 = 10^{-2} I_0(w^*, p)$ при $\Lambda = 6$. Астатическая КН p_a равновесия $w_0 = w_s(0) = 0$ есть точка пересечения оси p с ветвью неустойчивых равновесий графика E_0, т. е. $p_a = 0{,}190$. Отметим, что в результате прямого численного интегрирования задачи (4.3), (4.7) по неявной схеме метода конечных разностей с применением критерия Будянского — Рота [2, 3] для критического значения ДП равновесия $w_0 = 0$ получаем $p_d = 0{,}195$. Здесь для начальных условий имеем $[w = w_t]_{t=0} = 0$. Аналогично при $\Lambda = 5{,}5$ находим $p_a = 0{,}190$, $p_d = 0{,}192$.

При $\Lambda = 12$ график E_0 представлен на фиг. 2 сплошной линией. В этом случае $p_d = 0{,}29$. Для определения нагрузки p_a равновесия $w_0 = 0$ рассмотрим введенное в п. 3 множество B_p, которое состоит из точек $p_1 = 0{,}159$, $p_2 = 0{,}303$, $p_3 = 0{,}427$, $p_4 = 0{,}438$, $p_5 = 0{,}519$, $p_6 = 0{,}546$. Далее имеем $p_u = 0{,}396$, и только точки p_1 и p_2 принадлежат интервалу $[0, p_u)$. На графике $E_0(p)$ точка p_2 находится на неустойчивой ветви решений, имеющих общую точку p_u с ветвью устойчивых докритических равновесий, а точка p_1 — на неустойчивой ветви, имеющей общую точку $p_l = 0{,}039$ с ветвью семейства устойчивых равновесий в глубокой закритической стадии. Отсюда заключаем, что $p_a = 0{,}303$; p_d получено интегрированием по t от 0 до 750. Отметим, что значения p_a и КН p_d для сферических и конических оболочек при основных типах краевых условий и различных значениях Λ приведены в [15, 16] [2].

Из теоремы единственности решения и рассуждений п. 3 вытекает, что для круглых пластин и сферических оболочек с достаточно малым отношением h_0/h осесимметричное ДП невозможно.

Решение задачи об определении астатической КН с учетом несимметричных деформаций для пологой сферической оболочки пока неизвестно и станет возможным,

[2] См. также: *Срубщик Л. С.* О критическом давлении динамического прощелкивания упругих сферических и конических оболочек.— Ростов-н/Д, 1983.— 15 с. Деп. в ВИНИТИ 24.03.83; 1506-83 и поправку к статье [15], напечатанную в Докл. АН СССР, 1985, т. 282, № 2, с. 264.

когда будут вычислены значения потенциальной энергии оболочки на всех равновесных путях в интервале (p_l, p_u).

В заключение отметим, что для объяснения механизма прощелкивания сферических оболочек Фридрихс [26] ввел промежуточную критическую нагрузку $p_M \in \in (p_l, p_u)$, для которой основная и выпученная формы равновесия имеют равные потенциальные энергии. Значения p_M вычислялись, например, в [24]. Очевидно, что значения p_M существенно меньше значений p_a.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hoff N. J.*, *Bruce V. G.* Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches.— J. Math. and Phys. 1954, v. 32, No. 4, p. 276—288.
2. *Budiansky B.*, *Roth R. S.* Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells.— TND-1510, NASA, 1962, p. 597—606.
3. *Huang N. C.* Axisymmetric dynamic snap-through of elastic clamped shallow spherical shells.— AIAA Journal, 1969, v. 7, No. 2, p. 215—220.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 2, с. 30—36.
4. *Stephens W. B.*, *Fulton R. E.* Axisymmetric static and dynamic buckling of spherical caps due to centrally distributed pressures.— AIAA Journal, 1969, v. 7, No. 11, p. 2120—2126.— Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 11, с. 91—101.
5. *Svalbonas V.*, *Kalnins A.* Dynamic buckling of shells: evaluation of various methods.— Nucl. Engng and Disign, 1977, v. 44, No. 3, p. 331—356.
6. *Бермус И. М.*, *Срубщик Л. С.* Об осесимметричном динамическом прощелкивании упругих сферических оболочек.— Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности.: Сб. статей. Горький: Горьк. ун-т, 1981, № 19, с. 67—72.
7. *Мышкис А. Д.* О ямах.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 3, с. 537—542.
8. *Мышкис А. Д.* Ямы в топологических пространствах.— Мат. заметки, 1983, т. 33, вып. 2, с. 261—271.
9. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
10. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек.— Докл. АН СССР (ДАН), 1957, т. 117, № 2, с. 203—206.
11. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 6, с. 747—784.
12. *Ворович И. И.* Некоторые оценки числа решений для уравнений Кармана в связи с проблемой устойчивости пластин и оболочек.— В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, с. 111—118.
13. *Zagustin A. I.*, *Zagustin E. A.* Lower critical pressure for dynamic stability of a spherical shell.— Appl. Sci. Res., 1971, v. 23, No. 5, p. 337—367.
14. *Akkas N.* Note on the dynamic buckling loads of shallow spherical sheels from static analysis.— J. Struct. Mech., 1981, v. 9, No. 4, p. 483—488.
15. *Срубщик Л. С.* Энергетический критерий динамического прощелкивания упругих сферических оболочек.— Докл. АН СССР, 1985, т. 280, № 1, с. 60—64.
16. *Срубщик Л. С.*, *Юдович В. И.* Динамическое прощелкивание и запас устойчивости нелинейной упругой системы.— В кн.: Тр. 1-го Всес. симп. «Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика». Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985, с. 413—416.
17. *Срубщик Л. С.* Нелинейный анализ осесимметричного динамического прощелкивания упругих сферических оболочек.— В кн.: Тр. 1-го Всес. симп. «Нелинейная теория тонкостенных конструкций и биомеханика». Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985, с. 409—412.
18. *Болотин В. В.*, *Бойченко Г. А.* Исследование «прощелкивания» тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок.— Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1960, вып. 5, с. 259—272.
19. *Thompson J. M. T.* Dynamic buckling under step loading.— In: Dynamic stability of structures. L.: Pergamon Press, 1967, p. 215—236.
20. *Hsu C. S.* On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions.— Intern. J. Eng. Sci., 1966, v. 4, No. 1, p. 1—21.
21. *Шу С. С.* Параметрическое возбуждение и задачи прощелкивания для оболочек.— В кн.: Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980, с. 125—155.
22. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
23. *Красносельский М. А.*, *Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 511 с.
24. *Keller H. B.*, *Wolfe A. W.* On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells.— SIAM J. Appl. Math., 1965, v. 13, No. 3, p. 674—705.
25. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
26. *Friedrichs K. O.* On the minimum buckling load for spherical shells.— In: Theodor von Karman Anniversary Volume. Pasadema: Calif. Inst. Tech., 1941, p. 258—272.

Ростов-н/Д

Поступила в редакцию
19.VIII.1985