Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ КООРДИНАТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ТОРОИДАЛЬНОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Проценко В. С., Соловьев А. И., Цымбалюк В. В.

На основании соотношений между частными решениями уравнения кручения в тороидальных и сферических координатах метод Фурье применяется к решению контактных задач кручения упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат.

1. Пусть α, β, φ; α, σ, φ; r, θ, φ; ρ, z, φ — тороидальные, сферические и цилиндрические координаты, определяемые формулами [1—3]

$$x = ah_\beta^{-2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi,\quad y = ah_\beta^{-2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi,\quad z = ah_\beta^{-2}\sin\beta$$

$$x = ah_\sigma^{-2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\varphi,\quad y = ah_\sigma^{-2}\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi,\quad z = ah_\sigma^{-2}\sin\sigma$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta$$

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z\ (a > 0,\ 0 \leqslant \alpha,\ \rho,\ r < \infty,$$
$$-\infty < z < \infty, -\pi < \beta,\ \sigma \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$h_\beta = \sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha + \cos\beta},\qquad h_\sigma = \sqrt{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\sigma})$$

В задачах о чистом кручении упругих тел вращения единственная отличная от нуля компонента перемещений $u = u_\varphi$ удовлетворяет уравнению [1, 2, 4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

Соотношения между частными решениями уравнения (1.1) в сферических и тороидальных координатах непосредственно вытекают из следующих равенств, связывающих частные решения уравнения Лапласа в этих координатах (множитель $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ в обеих частях каждого равенства опущен):

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+1} P_{2k+m}^m(\cos\theta) = h_\sigma\int_0^\infty C_{2k+m}^{(m)}(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{ch}\,\tau\sigma\,d\tau \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+2} P_{2k+m+1}^m(\cos\theta) = h_\sigma\int_0^\infty C_{2k+m+1}^{(m)}(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{sh}\,\tau\sigma\,d\tau$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m} P_{2k+m}^m(\cos\theta) = h_\beta\int_0^\infty C_{2k+m}^{(m)}(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{ch}\,\tau\beta\,d\tau$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m+1} P_{2k+m+1}^m(\cos\theta) = h_\beta\int_0^\infty C_{2k+m+1}^{(m)}(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{sh}\,\tau\beta\,d\tau$$

$$(|\beta| < \pi,\ |\sigma| < \pi)$$

$$h_\beta P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{ch}\,\tau\beta = \sum_{n=0}^\infty D_{2n+m}^{(m)}(\tau)\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+m} P_{2n+m}^m(\cos\theta)$$

$$h_\beta P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\tau\beta=\sum_{n=0}^{\infty} D^{(m)}_{2n+m+1}(\tau)\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+m+1} P^m_{2n+m+1}(\cos\theta)$$

$$(0\leqslant r<a)$$

$$h_\sigma P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\tau\sigma=\sum_{n=0}^{\infty} D^{(m)}_{2n+m}(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+m+1} P^m_{2n+m}(\cos\theta)$$

$$h_\sigma P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\tau\sigma=\sum_{n=0}^{\infty} D^{(m)}_{2n+m+1}(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+m+2} P^m_{2n+m+1}(\cos\theta)$$

$$(r>a)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+1} P^m_{2k+m}(\cos\theta)=h_\sigma\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(m)}_{2k+m,\,n} Q^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+2} P^m_{2k+m+1}(\cos\theta)=h_\sigma\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{(m)}_{2k+m+1,\,n} Q^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, i\sin n\sigma$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m} P^m_{2k+m}(\cos\theta)=h_\sigma\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a^{(m)}_{2k+m,\,n} Q^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m+1} P^m_{2k+m+1}(\cos\theta)=h_\sigma\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} a^{(m)}_{2k+m+1,\,n} Q^m_{n-1/2}\times$$
$$\times(\operatorname{ch}\alpha)\, i\sin n\sigma$$

$$(\alpha>0)$$

$$h_\sigma P^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma=\sum_{k=0}^{\infty} b^{(m)}_{2k+m,\,n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+1} P^m_{2k+m}(\cos\theta)$$

$$h_\sigma P^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, i\sin n\sigma=\sum_{k=0}^{\infty} b^{(m)}_{2k+m+1,\,n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+m+2} P^m_{2k+m+1}(\cos\theta)$$

$$(r>a)$$

$$h_\sigma P^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty} b^{(m)}_{2k+m,\,n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m} P^m_{2k+m}(\cos\theta)$$

$$h_\sigma P^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, i\sin n\sigma=$$
$$=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} b^{(m)}_{2k+m+1,\,n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+m+1} P^m_{2k+m+1}(\cos\theta)$$

$$(0\leqslant r<a)$$

цесь

$$C^{(m)}_n(\tau)=i^{n-m}\frac{2^{m+1/2}(n+m)!}{(2m)!\,(n-m)!}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau}\,F({}^1/_2+i\tau+m,\ m-$$
$$-n;\ 2m+1;\ 2)$$

$$D^{(m)}_k(\tau)=\frac{(-1)^m i^{k-m}2^{m+1/2}}{(2m)!}\,\frac{\Gamma({}^1/_2+i\tau+m)}{\Gamma({}^1/_2+i\tau-m)}\,F({}^1/_2+i\tau+m,\ m-k;$$
$$2m+1;\ 2)$$

$$a^{(m)}_{s,\,n}=\frac{1}{\pi}\, i^{s-m}(-1)^n\,\frac{2^{m+1/2}(s+m)!}{(2m)!\,(s-m)!}\,F({}^1/_2-n+m,\ m-s;$$
$$2m+1;\ 2)$$

$$b^{(m)}_{s,\,n}=\frac{(-1)^m i^{s-m}2^{m+1/2}}{(2m)!}\,\frac{\Gamma({}^1/_2-n+m)}{\Gamma({}^1/_2-n-m)}\,F({}^1/_2-n+m,\ m-s;$$
$$2m+1;\ 2)$$

$$F(a,-n;c;z)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(a)_m(-n)_m}{(c)_m\, m!}\,z^m$$

$$(\alpha)_m = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$$

$P_n^m(x)$ — присоединенные многочлены Лежандра, $P_\nu^m(z)$, $Q_\nu^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, $m - n \leqslant 0$, $m - k \leqslant 0$; $k, m, s = 0, 1, 2, \ldots$; $F(a, -n; c; z)$ — гипергеометрический многочлен относительно z, $(\alpha)_m$ — символ Похгаммера [3, 5].

Функции $\Gamma(^1/_2 + i\tau + m)/\Gamma(^1/_2 + i\tau - m)$, $C_n^m(\tau)$, $D_n^{(m)}(\tau)$ вещественны при вещественных значениях τ, причем

$$\frac{\Gamma(^1/_2+i\tau+m)}{\Gamma(^1/_2+i\tau-m)} = \frac{\Gamma(^1/_2-i\tau+m)}{\Gamma(^1/_2-i\tau-m)}, \quad C_n^{(m)}(-\tau) =$$
$$= (-1)^{n-m}C_n^{(m)}(\tau), \quad D_n^{(m)}(-\tau) = (-1)^{n-m}D_n^{(m)}(\tau)$$

Равенства (1.2) получены в результате решения специальных краевых задач для уравнения Лапласа методом, изложенным в работе [6]. При $m = 1$ они позволяют исследовать ряд задач о кручении а) шара $0 \leqslant r \leqslant R$ с полостью $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$ $(\beta_1 < 0,\ \beta_2 > 0)$; б) тела $\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$ $(\beta_1 < 0,\ \beta_2 > 0)$ с шаровой полостью $0 \leqslant r \leqslant R$; в) шара $0 \leqslant r \leqslant R$ с тороидальной полостью $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$; г) пространства с двумя полостями, одна из которых ограничена сферой $r = R$, а другая — поверхностью тора $\alpha = \alpha_0$, и некоторых других тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат.

2. Рассмотрим задачи о равновесии 1) усеченного шара $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ $(0 < \beta_0 \leqslant \pi)$ с полусферическим углублением $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, который закреплен по поверхности $\beta = \beta_0$ и скручивается жестким штампом, сцепленным с поверхностью $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$; 2) полушара $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ с сегментным углублением $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ $(0 < \beta_0 < \pi)$, который закреплен по поверхности $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ и скручивается жестким штампом, сцепленным с поверхностью $\beta = \beta_0$; 3) полушара $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ с тороидальным углублением $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$, который закреплен по поверхности $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ и скручивается жестким штампом, сцепленным с поверхностью тора по участку $\alpha = \alpha_0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$.

Этим задачам соответствуют следующие граничные условия:

$$1)\ u|_{\beta=\beta_0} = 0, \quad u|_{r=R} = \varepsilon\rho, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad (R < \rho < a)$$

$$2)\ u|_{\sigma=\sigma_0} = \varepsilon\rho, \quad u|_{r=R} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad (a < \rho < R)$$

$$3)\ u|_{\alpha=\alpha_0} = \varepsilon\rho, \quad u|_{r=R} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$
$$\left(0 \leqslant \rho < a\,\mathrm{th}\frac{\alpha_0}{2},\ \ a\,\mathrm{cth}\frac{\alpha_0}{2} < \rho < R\right)$$

(ε — угол поворота штампа).

Общее решение задачи 1) представим в виде суммы двух слагаемых

$$u = h_\beta \int_0^\infty A(\tau)\,\mathrm{ch}\,\tau\beta P^1_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha)\,d\tau + \sum_{n=0}^\infty B_n\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+2} P^1_{2n+1}(\cos\theta)$$

каждое из которых тождественно удовлетворяет условию

$$(\partial u / \partial z)|_{z=0} = 0 \ (R < \rho < a)$$

Используя равенства

$$\sigma = \pi - \beta \ (0 \leqslant \beta \leqslant \pi), \quad \rho = -rP_1^1(\cos\theta)$$

$$h_\beta P^1_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha)\,\mathrm{ch}\,\tau\beta = \sum_{n=0}^\infty D^{(1)}_{2n+1}(\tau)\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P^1_{2n+1}(\cos\theta) \quad (0 \leqslant r < a)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2} P^1_{2k+1}(\cos\theta) = h_\sigma \int_0^\infty C^{(1)}_{2k+1}(\tau)\, P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\tau\sigma\, d\tau \quad (|\sigma| < \pi)$$

и удовлетворяя остальным условиям 1), приходим к соотношениям

$$B_n = -\lambda^{2n+1}\int_0^\infty A(\tau)\, D^{(1)}_{2n+1}(\tau)\, d\tau + F_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A(\tau) = -\frac{\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0}\sum_{k=0}^\infty B_k \lambda^{2k+2} C^{(1)}_{2k+1}(\tau)$$

$$F_0 = -\varepsilon R, \quad F_n = 0\ (n = 1, 2, \ldots) \quad (\lambda = R/a < 1,\ 0 < \beta_0 \leqslant \pi)$$

Исключая функцию $A(\tau)$ и полагая

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon R}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}\, b_n$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов b_n

$$b_n = \sum_{k=0}^\infty c_{nk}(\lambda, \beta_0)\, b_k + f_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

$$c_{nk}(\lambda, \beta_0) = c_{kn}(\lambda, \beta_0) = 2\lambda^{2n+2k+3}[(2n+1)(2n+2)(2k+1)(2k+2)]^{1/2}\,\gamma_{nk}(\beta_0)$$

$$\gamma_{nk}(\beta_0) = \int_0^\infty \frac{(\tau^2+1/4)\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}\, F(-2n, 3/2 + i\tau; 3; 2) \times F(-2k, 3/2 \pm i\tau; 3; 2)\, d\tau$$

$$f_0 = \sqrt{2}, \quad f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \lambda = R/a, \quad 0 < \beta_0 \leqslant \pi$$

При $0 < \lambda < \delta = \min(1, \operatorname{tg}\beta_0/2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n,\,k=0}^\infty c^2_{nk}(\lambda, \beta_0) < \infty \tag{2.2}$$

Полагая

$$\psi_m(\tau) = \sqrt{(\tau^2 + 1/4)\,\frac{\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}}\, F(-2m, 3/2 + i\tau; 3; 2)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

и принимая во внимание неравенства

$$\left(\int_0^\infty \psi_n(\tau)\,\psi_k(\tau)\, d\tau\right)^2 \leqslant \int_0^\infty \psi_n^2(\tau)\, d\tau \int_0^\infty \psi_k^2(\tau)\, d\tau \quad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

имеем следующие оценки ($\gamma_{mm}(\beta_0) > 0$, $c_{mm}(\lambda, \beta_0) > 0$):

$$\gamma^2_{nk}(\beta_0) \leqslant \gamma_{nn}(\beta_0)\,\gamma_{kk}(\beta_0), \quad c^2_{nk}(\lambda, \beta_0) \leqslant c_{nn}(\lambda, \beta_0)\, c_{kk}(\lambda, \beta_0)$$

Таким образом, для доказательства неравенства (2.2) достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{k=0}^\infty c_{kk}(\lambda, \beta_0) < \infty \quad (0 < \lambda < \delta) \tag{2.3}$$

При помощи формулы [5]

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,\Gamma(n-p)}{n!\,\Gamma(-p)}\, s^n F(-n, b; -p; z)\, F(-n, \beta; -p; \zeta) = (1+s)^{p+b+\beta}(1+s-sz)^{-b}(1+s-s\zeta)^{-\beta} F\left[b, \beta; -p; -\frac{z\zeta s}{(1+s-sz)(1+s-s\zeta)}\right] \tag{2.4}$$

(при $p=-3$, $z=\zeta=2$, $b={}^3/_2+i\tau$, $\beta={}^3/_2-i\tau$, $s=\pm\lambda^2$, $0<\lambda<1$) левую часть неравенства (2.3) представим в виде суммы двух слагаемых

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{kk}(\lambda,\beta_0)=g_1(\lambda,\beta_0)+g_2(\lambda,\beta_0)$$

$$g_1(\lambda,\beta_0)=\frac{2\lambda^3}{(1+\lambda^2)^3}\int_0^\infty\frac{(\tau^2+{}^1/_4)\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}\times$$

$$\times F\left[{}^3/_2+i\tau,{}^3/_2-i\tau;3;\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right]d\tau$$

$$g_2(\lambda,\beta_0)=\frac{2\lambda^3}{(1-\lambda^2)^3}\int_0^\infty\frac{(\tau^2+{}^1/_4)\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}\times$$

$$\times F\left[{}^3/_2+i\tau,{}^3/_2-i\tau;3;-\frac{4\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\right]d\tau$$

Используя равенство [5]

(2.5) $$\Gamma(\nu-m+1)\,m!\,P_\nu^m(x)=$$

$$=(-2)^{-m}\Gamma(\nu+m+1)(1-x^2)^{m/2}F\left(\nu+m+1,m-\nu;1+m;{}^1/_2-\frac{x}{2}\right)$$

$\left(\text{при } \nu=-{}^1/_2+i\tau,\ m=1,\ x=1-\frac{8\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2},\ -1<x<1\right)$ и очевидную оценку

$$0<F\left[{}^3/_2+i\tau,{}^3/_2-i\tau;3;\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right]<F\left[{}^3/_2+i\tau,{}^3/_2-i\tau;2;\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right]$$

будем иметь ($\theta_0=4\operatorname{arctg}\lambda$, $0<\lambda<\delta$, $0<\beta_0\leqslant\pi$)

$$0<g_1(\lambda,\beta_0)<\frac{\lambda^2}{1-\lambda^4}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\theta_0)\,d\tau<\infty$$

Полагая $\gamma=1$, $\alpha={}^1/_2+i\tau$, $\beta={}^1/_2-i\tau$, $\zeta=-4\lambda^2(1-\lambda^2)^{-2}$ в рекуррентной формуле Гаусса [5, 7]

(2.6) $$\gamma(\gamma+1)[F(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)-F(\alpha,\beta;\gamma+1;\zeta)]-\alpha\beta\zeta F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;\zeta)=0$$

и $\nu=-{}^1/_2+i\tau$, $z=1-2\zeta$, $m=0,1$ в равенстве [3]

$$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}\frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^m m!}F\left(m-\nu,m+\nu+1;m+1;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$(|\arg(z\pm1)|<\pi;\ m=0,1,2,\ldots)$$

а также учитывая функциональное соотношение [3]

(2.7) $$F(\alpha,\beta;\gamma;\zeta)=(1-\zeta)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\zeta)\quad(|\arg(1-\zeta)|<\pi)$$

величину $g_2(\lambda,\beta_0)$ представим в виде ($0<\beta_0\leqslant\pi$)

$$g_2(\lambda,\beta_0)=-\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha_0}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\tau(\pi-\beta_0)}{\operatorname{ch}\tau\beta_0\operatorname{ch}\tau\pi}\left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{cth}(\alpha_0/2)}{\tau^2+{}^1/_4}P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha_0)\right]d\tau\quad(\alpha_0=4\operatorname{ar\,th}\lambda,\ 0<\lambda<1)$$

Из этого равенства и асимптотического поведения функции $P^m_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha_0)$ при $\tau\to\infty$ следует, что $|g_2(\lambda,\beta_0)|<\infty$ $(0<\lambda<1)$.

В результате при $0<\lambda<\delta$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_{kk}(\lambda,\beta_0)\leqslant g_1(\lambda,\beta_0)+|g_2(\lambda,\beta_0)|<\infty$$

Из неравенства (2.2) и принадлежности $\{f_n\}_0^\infty$ гильбертову пространству числовых последовательностей l_2 следует, что почти при всех значениях $\lambda\in(0,\delta)$ решение бесконечной системы (2.1) в l_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции [8, 9]. Ограничение $0<\lambda<\delta$ на возможные значения параметра λ естественным образом связано с формулировкой рассматриваемой задачи и означает, что полусфера $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ целиком лежит в области $0 \leqslant \beta < \beta_0$.

Контактные напряжения $\tau_{r\varphi} = G\,(\partial u \,/\, \partial r - u \,/\, r)$ $(r = R,\ 0 < \beta_0 \leqslant \leqslant \pi)$, а также связь между крутящим моментом M, приложенным к штампу, и углом ε определяются непосредственно через решение бесконечной системы (2.1)

$$\tau_{r\varphi}\,|_{r=R} = G\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(4n+3)}{\sqrt{(2n+1)\,(2n+2)}}\, b_n P_{2n+1}^1(\cos\theta),\ \varepsilon = -\frac{M\sqrt{2}}{4\pi R^3 G b_0}$$

Дальнейший анализ задачи 1) проведем для предельного случая $\beta_0 = \pi$, который соответствует кручению полупространства $z \geqslant 0$ с полусферическим углублением $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ при граничных условиях

$$u\,|_{r=R} = \varepsilon R \sin\theta \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$$
$$(R < \rho < a), \quad u\,|_{z=0} = 0 \quad (\rho > a)$$

Используя оценку

$$|\,F\,(^3/_2 + i\tau,\ -2k;\ 3;\ 2)\,| \leqslant \frac{\operatorname{ch}\pi\tau}{(2k+1)\,(4\tau^2+1)}$$

вытекающую из интегрального представления

$$F\,(^3/_2 + i\tau,\ -2k;\ 3;\ 2) =$$
$$= \frac{2\operatorname{ch}\pi\tau}{\pi\,(\tau^2 + {}^1/_4)} \int_0^1 t^{1/2 - i\tau}\,(1-t)^{1/2 + i\tau}\,(1-2t)^{2k}\,dt$$

и неравенства

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,\sqrt{1-t}\,(1-2t)^{2k}\,dt \leqslant \frac{\pi}{8\,(2k+1)} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

можно убедиться, что при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,c_{nk}\,(\lambda,\ \pi)\,| \leqslant 1 - \omega \quad \left(\omega = 1 - \lambda,\ 0 < \lambda \leqslant \lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}}\right)$$

Это неравенство и принадлежность последовательности $\{f_n\}_0^\infty$ пространству l_1 обеспечивает при $\beta_0 = \pi$, $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ однозначную разрешимость бесконечной системы (2.1) в l_1 и применимость к ней метода последовательных приближений [8, 9].

Ограничиваясь при решении бесконечной системы (2.1) членами до порядка λ^9 включительно, будем иметь

(2.8)
$$b_0 = f_0\,[1 + d_{00}\lambda^3 + d_{00}^2\lambda^6 + d_{00}^3\lambda^9 + O\,(\lambda^{10})]$$
$$b_1 = f_0 d_{10}\lambda^5\,[1 + d_{00}\lambda^3 + O\,(\lambda^6)], \quad b_2 = f_0 d_{20}\lambda^7\,[1 + O\,(\lambda^3)]$$
$$b_3 = f_0 d_{30}\lambda^9\,[1 + O\,(\lambda^3)], \ b_n = O\,(\lambda^{2n+3}) \ (n = 4,\ 5,\ \ldots)$$
$$d_{00} = \frac{4}{3\pi}, \quad d_{10} = \frac{4\sqrt{6}}{15\pi}, \quad d_{20} = \frac{4\sqrt{15}}{35\pi}, \quad d_{30} = \frac{8\sqrt{7}}{63\pi}, \quad f_0 = \sqrt{2}$$

Выразим касательные напряжения $\tau_{z\varphi} = G\,(\partial u / \partial z)\,(z = 0,\ \rho > a)$ непосредственно через решение бесконечной системы (2.1) и исследуем их поведение при $\rho \to a$.

Принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial P_{2k+1}^1(\cos\theta)}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{a} \quad (z = 0,\ \rho > a)$$

находим

$$\tau_{z\varphi}\big|_{z=0,\ \rho>a} = -\frac{G}{a}(\operatorname{ch}\alpha - 1)^{3/2}\int_0^\infty \tau A(\tau)\operatorname{sh}\tau\pi\, P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau$$

Используя теперь соотношения

$$A(\tau) = -\frac{1}{\operatorname{ch}\tau\pi}\sum_{k=0}^\infty B_k\lambda^{2k+2}C^{(1)}_{2k+1}(\tau), \quad B_k = \frac{(-1)^{k+1}\varepsilon R}{\sqrt{(2k+1)(2k+2)}}\,b_k$$

$$\frac{\operatorname{sh}\tau\pi}{\operatorname{ch}\tau\pi}P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = -\frac{i}{\pi}\left[Q^1_{-1/2-i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) - Q^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\right]$$

и применяя теорему о вычетах для вычисления интеграла

$$R_k(\alpha) = -i\int_{-\infty}^\infty \frac{\tau F(3/2 + i\tau,\ -2k;\ 3;\ 2)}{\operatorname{ch}\tau\pi}\,Q^1_{-1/2-i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau$$

получаем следующую формулу для определения касательных напряжений на закрепленной части $z = 0$, $\rho > a$ границы рассматриваемого тела

(2.9) $$\tau_{z\varphi}\big|_{z=0,\ \rho>a} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi}G\varepsilon(\operatorname{ch}\alpha - 1)^{3/2}\sum_{k=0}^\infty \sqrt{(2k+1)(2k+2)}\,\lambda^{2k+3}b_kR_k(\alpha)$$

$$R_k(\alpha) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m(2m+1)F(1-m,\ -2k;\ 3;\ 2)\,Q_m^1(\operatorname{ch}\alpha)\times$$

$$\left(\operatorname{ch}\alpha = \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 - a^2}\right)$$

При $\rho \to a$ $(\alpha \to \infty)$ эти напряжения имеют интегрируемую особенность вида $(\rho^2 - a^2)^{-1/2}$:

$$\tau_{z\varphi}\big|_{z=0,\ \rho>a} \sim \frac{2Ga\varepsilon}{\pi\sqrt{\rho^2 - a^2}}\sum_{k=0}^\infty \sqrt{\frac{2k+2}{2k+1}}\,\lambda^{2k+3}b_k \quad (\rho\to a)$$

Ограничиваясь в (2.9) членами до порядка λ^9 включительно и привлекая асимптотическое решение (2.8) бесконечной системы (2.1) при $\beta_0 = \pi$, находим

$$\tau_{z\varphi}\big|_{z=0,\ \rho>a} = \frac{4}{\pi}G\varepsilon\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}\left[\lambda^3 + \frac{4}{3\pi}\lambda^6 + \frac{16}{9\pi^2}\lambda^9 + O(\lambda^{12})\right]$$

При получении этого результата использовано равенство

$$\sum_{m=0}^\infty (-1)^m(2m+1)\,Q_m^1(\operatorname{ch}\alpha) = -\frac{\operatorname{sh}\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha + 1)^2} \quad (\alpha > 0)$$

вытекающее из формулы Гейне [5]

$$(\zeta - z)^{-1} = \sum_{m=0}^\infty (2m+1)\,P_m(z)\,Q_m(\zeta) \quad \left(|z + \sqrt{z^2-1}| < \right.$$

$$\left. < |\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}|\right)$$

Отметим еще случай $\beta_0 = \pi/2$, соответствующий задаче о кручении полого полушара $R \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ круговым штампом с полусферическим основанием $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Можно убедиться, что в этом случае

$$c_{nk} = 0\ (n \neq k), \quad c_{nn} = \lambda^{4n+3} \quad (n,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, задача 1) при $\beta_0 = \pi/2$ имеет замкнутое решение

$$b_0 = \frac{a^3\sqrt{2}}{a^3 - R^3}, \quad b_n = 0 \ (n = 1, 2, \ldots), \quad A(\tau) = 2\sqrt{2}\frac{aR^3\varepsilon}{a^3 - R^3}\frac{1}{\operatorname{ch}\tau\pi}$$
$$u = \frac{R^3\varepsilon(a^3 - r^3)}{r^2(a^3 - R^3)}\sin\theta \quad (R \leqslant r \leqslant a, \ R < a, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$$

Общее решение задачи 2) представим в виде суммы двух слагаемых

$$u = h_\sigma \int_0^\infty A(\tau) P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\tau\sigma\, d\tau + \sum_{n=0}^\infty B_n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P^1_{2n+1}(\cos\theta)$$

каждое из которых тождественно удовлетворяет условию $(\partial u / \partial z)|_{z=0} = 0$ $(a < \rho < R)$.

Используя равенства

$$\beta = \pi - \sigma \ (0 \leqslant \sigma \leqslant \pi), \quad \varepsilon\rho|_{\sigma=\sigma_0} =$$
$$= -2^{3/2}a\varepsilon h_\sigma \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{ch}\tau\sigma_0} P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau$$

$$h_\sigma P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\tau\sigma = \sum_{n=0}^\infty D^{(1)}_{2n+1}(\tau)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+2} P^1_{2n+1}(\cos\theta) \quad (r > a)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P^1_{2k+1}(\cos\theta) = h_\beta \int_0^\infty C^{(1)}_{2k+1}(\tau) P^1_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}\tau\beta\, d\tau \quad (|\beta| < \pi)$$

удовлетворяя остальным условиям 2) и полагая

$$B_n = \frac{(-1)^n a\varepsilon}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} b_n$$

после некоторых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений $(\lambda = R/a < 1, \ 0 < \sigma_0 \leqslant \pi)$

$$b_n = \sum_{k=0}^\infty c_{nk}(\lambda, \sigma_0) b_k + f_n(\lambda, \sigma_0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$
$$c_{nk}(\lambda, \sigma_0) = c_{kn}(\lambda, \sigma_0) = 2\lambda^{2n+2k+3}[(2n+1)(2n+2) \times$$
$$\times (2k+1)(2k+2)]^{1/2}\gamma_{nk}(\sigma_0)$$
$$\gamma_{nk}(\sigma_0) = \int_0^\infty \frac{(\tau^2 + 1/4)\operatorname{ch}\tau(\pi - \sigma_0)}{\operatorname{ch}\tau\sigma_0 \operatorname{ch}\tau\pi} F(-2n, 3/2 + i\tau; 3; 2) \times$$
$$\times F(-2k, 3/2 \pm i\tau; 3; 2)\, d\tau$$
$$f_n(\lambda, \sigma_0) = 4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}\lambda^{2n+2}\gamma_{n0}(\sigma_0)$$

Ввиду того что матрицы $\| c_{nk}(\lambda, \sigma_0) \|$ и $\| c_{nk}(\lambda, \beta_0) \|$ совпадают с точностью до обозначений входящих в них параметров и последовательность $\{f_n(\lambda, \sigma_0)\}$ является элементом пространства l_1 и l_2, бесконечная система (2.10) обладает теми же свойствами, что и бесконечная система (2.1). В формулировке свойств последней надо лишь заменить параметры R, a, β_0 на a, R, σ_0 соответственно. Заметим, что в рассмотренных задачах имеется полная аналогия и при исследовании касательных напряжений.

Общее решение задачи 3) представим в виде суммы двух слагаемых

$$u = h_\sigma \sum_{n=0}^\infty H_n P^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma + \sum_{k=0}^\infty G_k\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P^1_{2k+1}(\cos\theta).$$

каждое из которых тождественно удовлетворяет условию $(\partial u / \partial z)_{z=0} = 0$ $(0 \leqslant \rho < a \operatorname{th}(\alpha_0/2), \ a \operatorname{cth}(\alpha_0/2) < \rho < R)$.

Используя равенства

$$\rho = -\frac{2a\sqrt{2}}{\pi} h_\sigma \left[Q^1_{-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) + 2\sum_{n=1}^{\infty} Q^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma \right]$$

$$h_\sigma P^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} b^{(1)}_{2k+1,\,n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2} P^1_{2k+1}(\cos\theta)\ (r > a)$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P^1_{2k+1}(\cos\theta) = h_\sigma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a^{(1)}_{2k+1,\,n} Q^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\cos n\sigma$$

$$(\alpha > 0)$$

$$Q^1_{-n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = Q^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha), \quad a^{(1)}_{2k+1,\,-n} = a^{(1)}_{2k+1,\,n}$$

удовлетворяя остальным условиям 3) и полагая

$$H_n = \frac{2a\varepsilon\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{sgn}\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left[-\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1}\frac{Q^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P^1_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right]^{1/2} h_n$$

приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

(2.11) $$h_n = \sum_{m=0}^{n} p_{nm}(\lambda, \alpha_0) h_m + q_n(\alpha_0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$p_{0m}(\lambda, \alpha_0) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\psi_0(\alpha_0)\psi_m(\alpha_0)}\,\omega_{0m}(\lambda) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$p_{nm}(\lambda, \alpha_0) = \frac{4}{\pi}\sqrt{\psi_n(\alpha_0)\psi_m(\alpha_0)}\,\omega_{nm}(\lambda)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots)$$

$$\omega_{nm}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{4k+3}(2k+1)(2k+2) F(3/2 - n, -2k; 3; 2) \times$$

$$\times F(3/2 - m, -2k; 3; 2)$$

$$q_0(\alpha_0) = \sqrt{\psi_0(\alpha_0)}, \quad q_n(\alpha_0) = 2\sqrt{\psi_n(\alpha_0)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\psi_k(\alpha_0) = -\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{Q^1_{k-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P^1_{k-1/2}(\operatorname{ch}\alpha_0)} > 0, \quad \lambda = \frac{a}{R} < 1$$

Применяя формулу (2.4), а затем функциональные соотношения [3]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; z)$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

$$(|\arg(1 - z)| < \pi)$$

для величин $\omega_{nm}(\lambda)$ будем иметь явное выражение через гипергеометрическую функцию:

$$\omega_{nm}(\lambda) = \frac{\lambda^3}{(1+\lambda^2)^3}\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{n+m} F\left[3/2 + n, 3/2 + m; 3; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right] +$$

$$+ \frac{\lambda^3}{(1+\lambda^2)^3}\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^{n-m} F\left[3/2 - n, 3/2 + m; 3; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right]$$

Следовательно, в явном виде выражаются и матричные элементы бесконечной системы (2.11).

При $0 < \lambda < \operatorname{th}(\alpha_0/2)(\alpha_0 > 0)$ матрица $\| p_{nm}(\lambda, \alpha_0) \|$ удовлетворяет условию

(2.12) $$\sum_{n,\, m=0}^{\infty} p^2_{nm}(\lambda, \alpha_0) < \infty$$

В самом деле, полагая

$$\xi_k(x) = \lambda^{2k+3/2}\sqrt{(2k+1)(2k+2)}\, F(3/2 - x, -2k; 3; 2)$$

в неравенстве Коши — Буняковского

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(n)\,\xi_k(m)\Big)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^2(n) \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^2(m)$$

получаем следующие оценки ($p_{kk}(\lambda, \alpha_0) > 0$):

$$p_{nm}^2(\lambda, \alpha_0) \leqslant p_{nn}(\lambda, \alpha_0)\, p_{mm}(\lambda, \alpha_0) \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, для доказательства неравенства (2.12) достаточно убедиться, что при $0 < \lambda < \operatorname{th}(\alpha_0/2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{nn}(\lambda, \alpha_0) < \infty \tag{2.13}$$

При помощи формул (2.5)—(2.7) имеем ($\theta_0 = 4 \operatorname{arctg} \lambda$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{nn}(\lambda, \alpha_0) = \frac{4}{\pi}\frac{\lambda^3}{(1+\lambda^2)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\alpha_0) \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{2n} \times$$
$$\times F\left[{}^3/_2 + n, {}^3/_2 + n; 3; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right] + \frac{4}{\pi} \sin\frac{\theta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\alpha_0)}{1-4n^2} \times$$
$$\times \left[P_{n-1/2}(\cos\theta_0) + 4 \operatorname{ctg}\frac{\theta_0}{2} \frac{P^1_{n-1/2}(\cos\theta_0)}{4n^2-1}\right]$$

Отсюда следует, что последний ряд сходится для всех $\lambda \in (0, 1)$. Используя теперь неравенство ($n \geqslant 1$, $0 < \lambda < 1$)

$$F\left[{}^3/_2 + n, {}^3/_2 + n; 3; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right] < 2F\left[{}^1/_2 + n, {}^1/_2 + n; 1; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right]$$

вытекающее из определения гипергеометрического ряда [3, 5], представление функции Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ через гипергеометрическую функцию [3, 5]

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1-\mu)} (z+1)^{1/2\mu+\nu} (z-1)^{-1/2\mu} F\left(-\nu, -\nu-\mu; 1-\mu; \frac{z-1}{z+1}\right),$$

и соотношение $P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z)$, получаем следующую оценку:

$$\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{2n} F\left[{}^3/_2 + n, {}^3/_2 + n; 3; \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\right] <$$
$$< 2 \operatorname{ch}\alpha_1 P_{n-1/2}(\operatorname{ch} 2\alpha_1) \quad (\alpha_1 = 2 \operatorname{arth} \lambda)$$

Эта оценка с учетом асимптотического поведения тороидальных функций $P^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$, $Q^m_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$ и доказывает условие (2.13) при $0 < \lambda < \operatorname{th}(\alpha_0/2)$ $(0 < \alpha_1 < \alpha_0)$.

Из неравенства (2.12) и принадлежности $\{q_n(\alpha_0)\}_0^\infty$ пространству l_2 следует, что почти при всех значениях $\lambda \in (0, \operatorname{th}(\alpha_0/2))$ решение бесконечной системы (2.11) в l_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции.

Отметим, что к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с матрицей $\| p_{nm}(\lambda, \alpha_0) \|$ ($\lambda = R/a$) сводится и задача о кручении полупространства $z \geqslant 0$ с полусферическим ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$) и тороидальным ($0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$) углублениями штампами, сцепленными с поверхностями этих углублений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.— Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
4. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. 294 с.
6. *Проценко В. С., Соловьев А. И.* О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 973—982.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.VII.1985