Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЯХ СМЕШЕНИЯ

Диесперов В. Н.

Проводится полное исследование автомодельных решений уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления. Они хорошо описывают картину течения в слоях смешения, так как вдали от точки отрыва последняя формируется в основном под воздействием краевых условий и слабо зависит от начальных. Автомодельная функция $\Phi(\zeta; m)$ (ζ — автомодельная переменная, m — параметр автомодельности) удовлетворяет известному нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка. Его удается свести к уравнению первого порядка [1], что позволяет исследовать поведение всех интегральных кривых $\Phi(\zeta; m)$ и, в частности, рассмотреть вопрос о существовании и единственности решения двух- и трехточечных задач, возникающих в теории слоев смещения. При $m = 1$ это классические задачи [2—4] и задача Блазиуса о пограничном слое, при $m = 2$ — задача Гольдштейна для следа [5]. К случаю $m \in (1, 2]$ относятся слои смешения, встречающиеся в теории локального отрыва [6—11]. Случай $m = \infty$ возникает в теории нестационарного отрыва [12].

С точки зрения поведения интегральных кривых случаи $m > 1$ и $0 < m \leqslant 1$ существенно различаются. При $0 < m \leqslant 1$ их картина переформировывается таким образом, что не возникает решений, описывающих течения в слоях смешения с обратными скоростями. Примеры последних даны в [13, 14].

Течение в слое смешения в первом приближении описывается уравнением для функции тока

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \lambda\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{1}$$

Для несжимаемой жидкости $\lambda = 1$. Для газа в теории локального отрыва $\lambda = \theta/R^2(0)$, где $R(0)$ — значение плотности в точке отрыва, а θ — постоянная Чепмена в линейной зависимости между коэффициентом вязкости и температурой. Система координат (x, y) ортогональна. Ее выбор зависит от рассматриваемой задачи.

В классе автомодельных функций решения уравнения (1) представляются в виде

$$\psi = \omega^{-1/2}x^{\omega\lambda}\Phi(\zeta), \quad \zeta = \omega^{1/2}y/x^{1/(m+1)}, \quad m > 0, \quad \lambda\omega = m/(m+1)$$

Для определения $\Phi(\zeta)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{m-1}{m}\Phi'^2 - \Phi\Phi'' = \Phi''' \tag{2}$$

Течение в слое смешения, возникающем при взаимодействии двух потоков, один из которых (верхний) движется, а другой покоится, описывается уравнением (2) и тремя краевыми условиями

$$\Phi = b\zeta^m + \ldots, \ \zeta \to +\infty, \ b > 0, \ m > 0 \tag{3}$$

$$\Phi = 0, \quad \zeta = 0 \tag{4}$$

$$d\Phi/d\zeta \to 0, \ \zeta \to -\infty \tag{5}$$

Задача (2)—(5) при $m = 2$ возникает как в теории локального отрыва от гладкой поверхности несжимаемой жидкости ($\lambda = 1$) [7], так и сверх-

звукового потока [6, 9]. Отрыв от угловой точки несжимаемой жидкости ($\lambda = 1$) соответствует $m = {}^5/_3$ [8], газа со звуковой скоростью $m = {}^7/_5$ [11]. При $m = 1$ получается классическая задача Чепмена [4].

Если вместо условия (5) потребовать

$$d^2\Phi/d\zeta^2 = 0, \quad \zeta = 0 \tag{6}$$

то двухточечная задача (2)—(4), (6) будет обобщением задач [13] ($m = 3$), [5] ($m = 2$) о течении в следах.

Если наложить' вместо условия (5) требование

$$\Phi = b_1 (-\zeta)^m + \ldots, \quad \zeta \to -\infty, \quad b_1 < 0 \tag{7}$$

то (2)—(4), (7) будет обобщением задач [2] при $m = 1$ и [10] при $m = 2$. Они описывают течения в слоях смешения, разделяющих два параллельных потока, движущихся в одну сторону с разными скоростями.

Порядок уравнения (2) понижается, если положить

$$f = d\Phi/d\zeta \ (d^2\Phi/d\zeta^2 = f df/d\xi, \ d^3\Phi/d\zeta^3 = f\,[(df/d\xi)^2 + f d^2f/d\xi^2], \ \xi \equiv \Phi)$$

Для определения $f(\xi)$ получается дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями

$$ff'' + f'^2 + \xi f' - \frac{m-1}{m} f = 0 \tag{8}$$

$$f = -c(\xi - c) - \frac{1}{4m}(\xi - c)^2 + O[(\xi - c)^3], \quad \xi \to c < 0 \tag{9}$$

$$\begin{gathered} f = mb^{1/m}\xi^{(m-1)/m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m+1} b^{2/m}\xi^{-2/m} + \\ + O(\xi^{-1-3/m}) + D_1\xi^{\varkappa_1}\exp\left[-\frac{b^{-1/m}}{m+1}\xi^{(m+1)/m}\right] + \ldots, \\ \xi \to +\infty, \quad \varkappa_1 = -\frac{2m^2+4m-4}{m(m+1)}, \quad D_1 = \text{const} \end{gathered} \tag{10}$$

Условие (10) соответствует (3), а (9) соответствует (5). Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение $f(\xi)$, $\xi \in (c, \infty)$ уравнения (8), удовлетворяющее условиям (9), (10). Из групповых свойств задачи (8)—(10) следует, что если ее решение существует и единственно, то величины c и b связаны соотношением $k = m(-c)^{-(m+1)/m}b^{1/m}$, где k — некоторая постоянная, зависящая от m.

Порядок уравнения (8), в свою очередь, понижается, если произвести подстановку

$$f = \xi^2 F(\xi), \ \xi dF/d\xi = \Psi \tag{11}$$

В результате получим

$$F\Psi\frac{d\Psi}{dF} = -\left(\Psi^2 + 7F\Psi + 6F^2 + \Psi + \frac{m+1}{m}F\right) \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \frac{df}{d\xi} = \xi(\Psi + 2F), \quad \frac{d^2f}{d\xi^2} = -\left[(\Psi + 2F)^2 + \Psi + \frac{m+1}{m}F\right]\Big/F \\ \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} = \xi^3 F(\Psi + 2F), \quad \frac{d^3\Phi}{d\zeta^3} = -\xi^4 F\left(\Psi + \frac{m+1}{m}F\right) \end{gathered} \tag{13}$$

Правая часть уравнения (12) и числитель во второй формуле (13) — многочлены второго порядка. Обозначим их соответственно $P(F, \Psi)$ и $R(F, \Psi)$.

Чтобы построить картину поведения трижды непрерывно дифференцируемых интегральных кривых $\Phi(\zeta)$, а также соответствующих им интегральных кривых $f(\xi)$, необходимо изучить характер особых точек уравнения (12) и найти, каким требованиям должны удовлетворять интегральные кривые $\Psi(F)$, чтобы выполнялись поставленные граничные

условия. Уравнение (12) имеет три особые точки

$$A(0, 0), \quad B(0, -1), \quad C\left(-\frac{m+1}{6m}, 0\right)$$

в конечной части плоскости (F, Ψ) и три бесконечно удаленные точки.

Каждую точку плоскости (F, Ψ) соединим с центром единичной полусферы (расположенную симметрично относительно плоскости и касающуюся ее в начале координат) и поставим ей, таким образом, в соответствие точку на полусфере. В результате каждая бесконечно удаленная особая точка уравнения (12) расслаивается на две тождественные, лежащие на экваторе симметрично относительно центра. Те из них, в которые кривые входят или выходят при $\Psi < 0$, обозначим через Q, E, G, а при $\Psi > 0$ — через Q_*, E_*, G_*. Полусфера затем проектируется на круг (см. фиг. 1—3). Ось $F = 0$ интегральные кривые могут проходить только через особые точки.

Кривая $P(F, \Psi) = 0$ при $m \neq {}^1/_5$ — гипербола, в точках которой $d\Psi/dF = 0$. При $m > {}^1/_5$ ее ветвь P_1 проходит через точки C и B, P_2 — через A. В точках кривой $R(F, \Psi) = 0$, являющейся параболой и распадающейся на ветви R_1 и R_2, обращается в нуль $d^2f/d\xi^2$ (при $m = 1$ парабола вырождается в две параллельные прямые $\Psi = -2F$, $\Psi = -2F - 1$). Ветвь R_1 всегда проходит через точку B. Точки на кривой P_i (или R_i будут обозначаться через (F, Ψ_{P_i}). При $F \to 0$ и $|F| \to \infty$ для $\Psi_{P_i}(F)$ будем иметь

$$d\Psi_{P_{1,2}}/dF = -1, -6, \quad |F| \to \infty$$

$$\Psi_{P_1} = -1 - \frac{6m-1}{m} F - \frac{5m-1}{m^2} F^2 + \ldots, \quad F \to 0$$

$$\Psi_{P_2} = -\frac{m+1}{m} F + \frac{5m-1}{m^2} F^2 + \ldots, \quad F \to 0$$

Обозначим области, в которых $d\Psi/dF < 0$, через $\Omega = \{F > 0, \ P(F, \Psi) < 0\}$ и $\Omega_* = \{F < 0, \ \Psi > 0, \ P(F, \Psi) < 0\}$.

Перейдем к изучению каждой особой точки в отдельности.

Интегральные кривые, попадающие в точку A, в некоторой ее окрестности принадлежат либо Ω, либо Ω_*. Если $(F, \Psi) \in \Omega$, то в точку A вдоль критического направления $\Psi = -(m+1)/mF$ входит бесчисленное множество интегральных кривых. Пусть $\mu(F)$ одна из них. Тогда при $F \to 0$ будут справедливы следующие асимптотические соотношения [15], [16]:

$$\Psi = \mu(F) + D_0 F^{\varkappa_0} \exp\left[-\frac{m}{m+1} F^{-1}\right] + \ldots \tag{14}$$

$$\mu(F) = -\frac{m+1}{m} F - \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} F^2 + O(F^3)$$

$$\varkappa_0 = \frac{3m^2 + 4m - 5}{(m+1)^2}, \quad D_0 = \text{const}$$

Если $m = 1, 2$, то $\Psi = -2F$, $\Psi = -{}^3/_2 F$ — точные решения уравнения (12). Поэтому их удобнее всего брать в качестве $\mu(F)$.

При $F \to 0$ для решений (14) имеют место неравенства

$$\Psi_{R_2}(F) < \Psi(F) < \Psi_{P_2}(F) < 0, \quad m > 1$$

$$\Psi(F) < \Psi_{R_2}(F) < \Psi_{P_2}(F) < 0, \quad 0 < m < 1$$

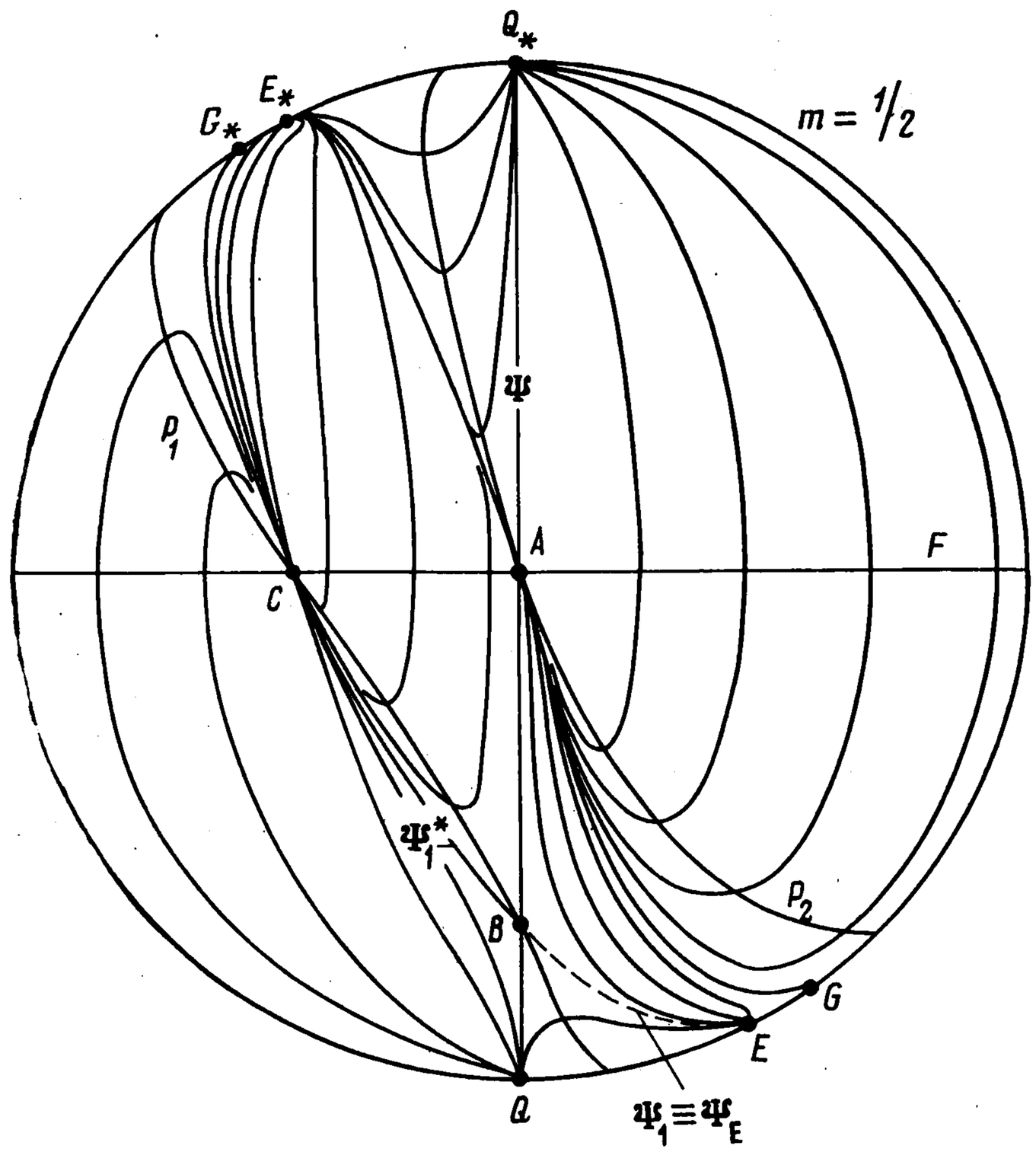
Если $(F, \Psi) \in \Omega_*$, то в A входит единственная интегральная кривая, которую назовем исключительной и обозначим $\Psi_A{}^*$.

Асимптотическое поведение решений (14) при $\xi > 0$ соответствует (10) в плоскости (ξ, f). В плоскости (ζ, Φ) при $\zeta \to +\infty$ будем иметь

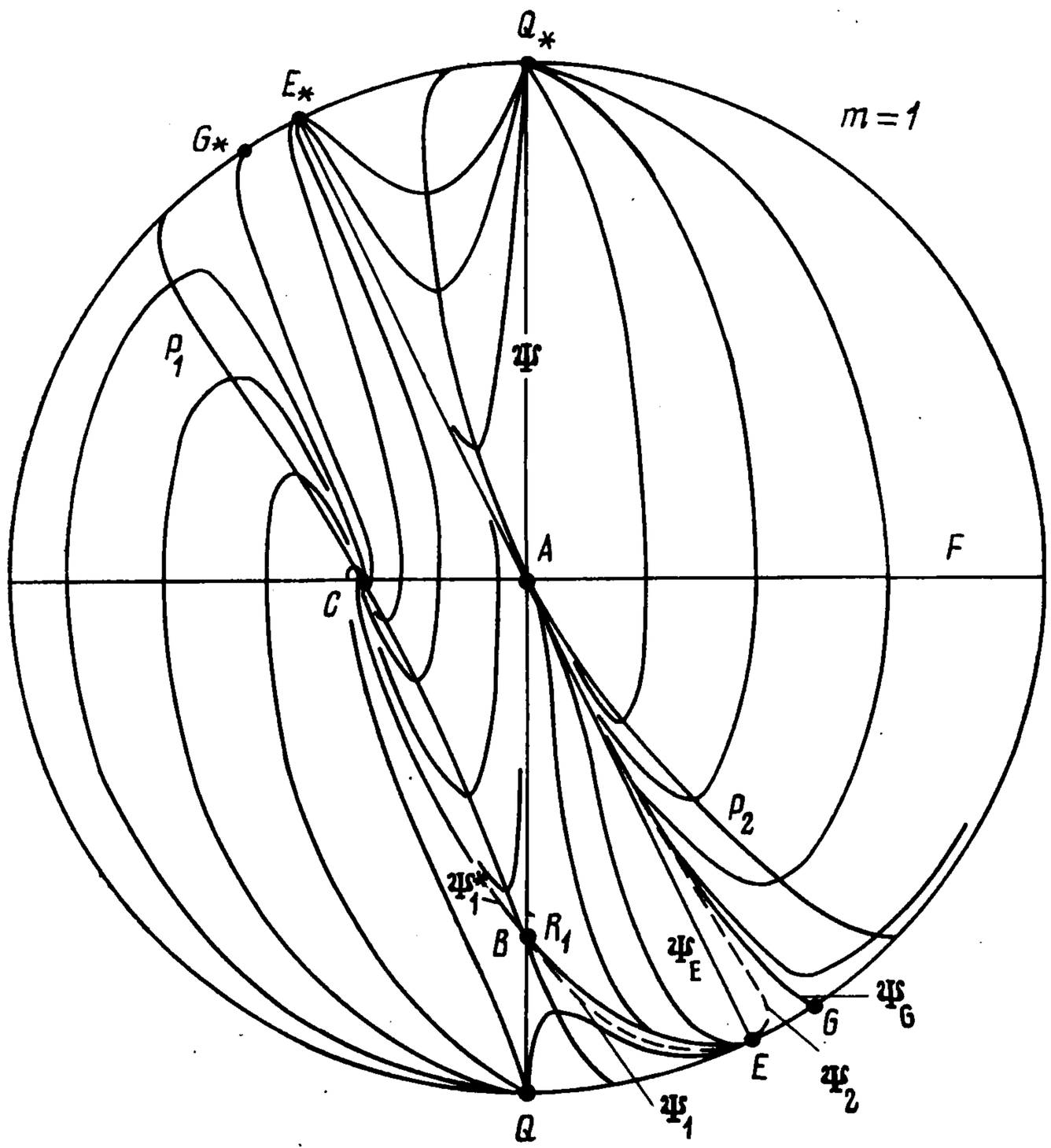
$$\Phi = b(\zeta + l_A)^m - \frac{(m-1)(m-2)}{m+1}(\zeta + l_A)^{-1} + O[(\zeta + l_A)^{-(m+2)}] + \tag{15}$$

$$+ D_2(\zeta + l_A)^{\varkappa_2} \exp\left[-\frac{b}{m+1}(\zeta + l_A)^{m+1}\right] + \ldots$$

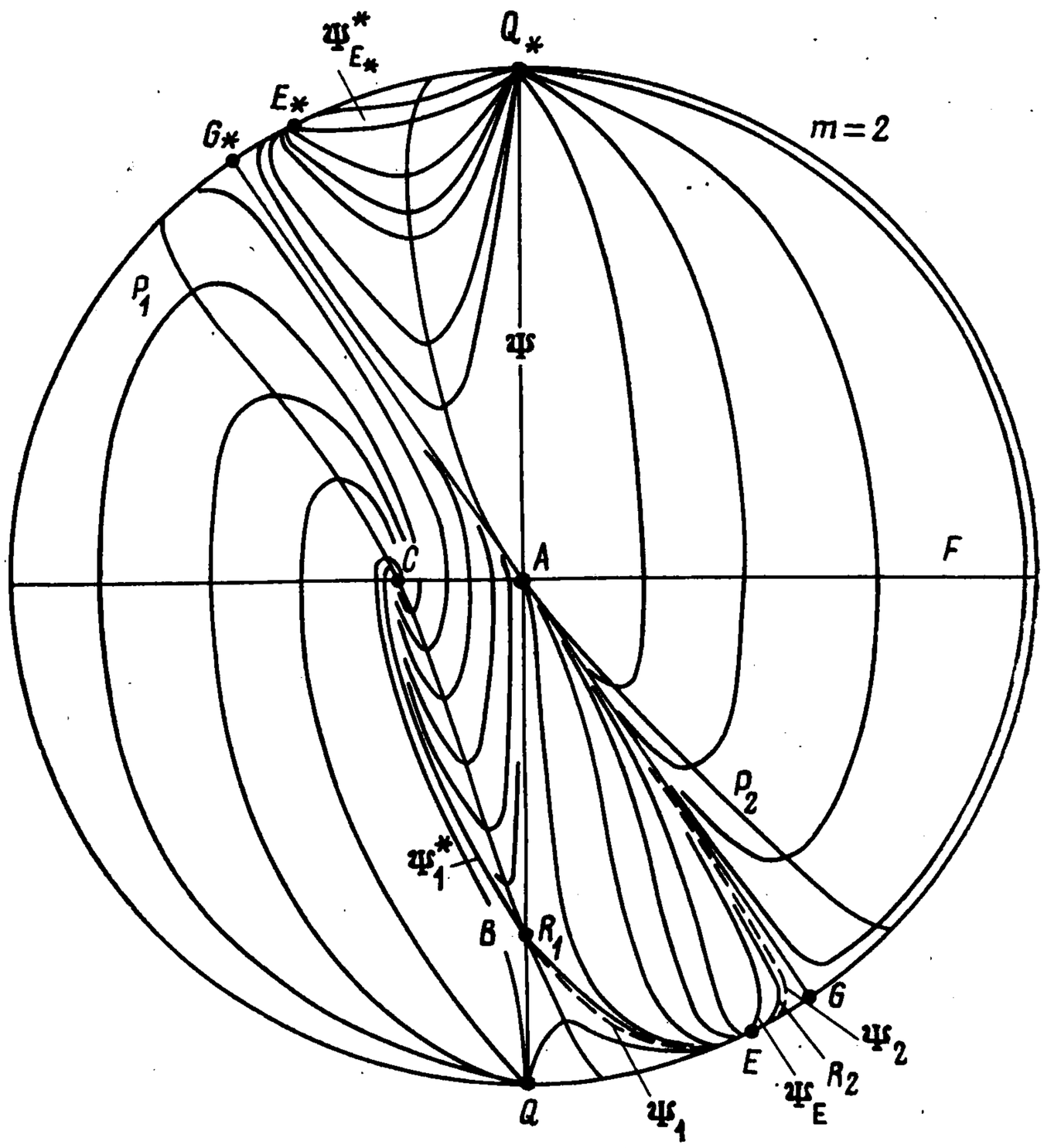
$$\varkappa_2 = -\frac{3m^2 + 5m - 4}{m+1}; \quad D_2, \ l_A - \text{const}$$


Q_*
E_*
G_*
$m = 1/2$
Ψ
P_1
A
F
C
Ψ_1^*
B
P_2
G
E
Q
$\Psi_1 \equiv \Psi_E$

Фиг. 1


Q_*
E_*
G_*
$m = 1$
Ψ
P_1
A
F
C
P_2
Ψ_1^*
B
R_1
Ψ_E
Ψ_G
G
E
Ψ_2
Q
Ψ_1

Фиг. 2



Фиг. 3

Точка B — седло. Через нее при любом $m > 0$ проходит единственная голоморфная кривая, представимая при $F \to 0$ разложением [17]

$$\Psi = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k F^k; \quad b_1 = -\frac{6m-1}{2m} \tag{16}$$

$$b_2 = \frac{1}{3}[2b_1^2 + 7b_1 + 6], \quad b_k = \frac{1}{k+1}\left[\frac{k+2}{2}\sum_{n=2}^{k} b_{n-1}b_{k-n+1} + \right.$$

$$\left. + 7b_{k-1}\right], \quad k \geqslant 3; \quad \Psi \equiv \Psi_1 (F \geqslant 0), \quad \Psi \equiv \Psi_1^* \quad (F \leqslant 0)$$

В плоскости (ξ, f) ей отвечают интегральные кривые (9) при $c \neq 0$, а в плоскости (ζ, Φ) — при $c\zeta \to +\infty$

$$\Phi = c - (\operatorname{sign} c) \exp[-c(\zeta + l_B)] + \ldots, \; f > 0 \tag{17}$$

$$\Phi = c + (\operatorname{sign} c) \exp[-c(\zeta + l_B)] + \ldots, \; f < 0; \quad l_B = \text{const}$$

Особая точка C при $m > m_*$ — фокус. В ее окрестности интегральные кривые ведут себя в первом приближении так:

$$\sqrt{u^2 + w^2} = h \exp\left[\frac{m+7}{\sqrt{\varkappa}}\varphi\right], \quad h = \text{const}$$

$$u = 2(m+1)\Psi + (m+7)\rho; \quad w = \varkappa\rho, \quad \varkappa = 23m^2 + 34m - 25$$

$$\rho = F + \frac{m+1}{6m}, \quad m_* = \frac{-17 + 12\sqrt{6}}{23} > \frac{1}{2}$$

Здесь φ — полярный угол в системе координат (u, w). В плоскости (ξ, f) при $|\xi| \to \infty$ будем иметь

$$f = -\frac{m+1}{6m}\xi^2 + [C_1 \sin(\gamma \ln|\xi|) + C_2 \cos(\gamma \ln|\xi|)]|\xi|^{\omega} + \ldots$$

$$\omega = \frac{3(m-1)}{2(m+1)}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\varkappa}}{2(m+1)}$$

а в плоскости (ζ, Φ) при $\zeta \to \zeta_c$

$$\Phi = \frac{6m}{m+1}(\zeta - \zeta_c)^{-1} + [C_3 \sin(\gamma \ln|\zeta - \zeta_c|) + \\ + C_4 \cos(\gamma \ln|\zeta - \zeta_c|)] \cdot |\zeta - \zeta_c|^{1-\omega} + \ldots$$

Здесь и в дальнейшем ζ с индексом — некоторое конечное значение ζ, а C с индексом — постоянная.

При $0 < m \leqslant m_*$ точка C становится узлом. Поведение интегральных кривых в ее окрестности имеет вид

$$\Psi = -\frac{6}{\lambda_1}\left(F + \frac{m+1}{6m}\right) + \\ + h_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{\lambda_1/\lambda_2}\left(F + \frac{m+1}{6m}\right)^{\lambda_1/\lambda_2} + \ldots, \quad h_1 = \text{const}$$

$$\Psi = -\frac{6}{\lambda_2}\left(F + \frac{m+1}{6m}\right) + \ldots, \quad \lambda_{1,2} = \frac{m+7 \pm \sqrt{-\varkappa}}{2(m+1)}$$

В плоскости (ζ, Φ) при $\zeta \to \zeta_c$ это дает

$$\Phi = \frac{6m}{m+1}(\zeta - \zeta_c)^{-1} + C_5|\zeta - \zeta_c|^{\lambda_2} + C_6|\zeta - \zeta_c|^{\lambda_1} + \ldots, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Phi = \frac{6m}{m+1}(\zeta - \zeta_c)^{-1} + C_7|\zeta - \zeta_c|^{\lambda_1}\ln|\zeta - \zeta_c| + \\ + C_8|\zeta - \zeta_c|^{\lambda_1} + \ldots, \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Таким образом, попадание интегральной кривой в точку C означает, что решение ведет себя в окрестности некоторого ζ_c как $\Phi(\zeta) = O[(\zeta - \zeta_c)^{-1}]$.

Для исследования бесконечно удаленной особой точки E (и E_*) произведем в (12) замену переменных

$$2F - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{t}, \quad \Psi = \frac{\sigma - 1}{t} \tag{18}$$

В результате получим уравнение

$$t(\sigma - 1)\left(\frac{m-1}{m}t + 1\right)\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{2} + 2\sigma^2 + \frac{5m-3}{2m}\sigma t + \\ + \frac{(2m-1)(m-1)}{m^2}t^2 + \frac{m-1}{m}t\sigma^2$$

Его решение при $0 \leqslant t < r(C_E)$ можно представить в виде сходящегося ряда ($r(C_E)$ — радиус сходимости) [17]

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{k/2}; \quad d_1 = C_E \text{ — произвольная величина} \tag{19}$$

$$d_2 = -3C_E^2, \quad d_3 = -\frac{5}{4}e_3 - \frac{3m-2}{m}d_1$$

$$d_k = \frac{2}{k-1}\left[\frac{k-8}{4}e_k + \frac{m-1}{4m}(k-6)e_{k-2} - \\ - \frac{m(k+3)-(k+1)}{2m}d_{k-2} - \frac{(2m-1)(m-1)}{m^2}\delta_{k,4}\right], \quad k \geqslant 4;$$

$$e_k = \sum_{i=2}^{k} d_{i-1}d_{k-i+1}$$

Аналогично строится решение при $t \to 0$, $t \leqslant 0$. Таким образом, точка E — узел. Если решение (19) разбить на две части

$$\sigma = C_E t^{1/2} J_1(C_E, t) + J_2(C_E, t)$$

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{2k+1}}{d_1}t^k, \quad J_2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k}t^k, \quad 0 \leqslant t < r$$

то можно показать, что

$$J_1(C_E, t) = J_1(-C_E, t), \quad J_2(C_E, t) = J_2(-C_E, t)$$
$$d_{2k}(C_E) = d_{2k}(-C_E), \quad d_{2k+1}(C_E) = -d_{2k+1}(-C_E)$$

Теперь необходимо найти связь между F и ξ. Введем новую функцию τ, положив $t = \tau^2$. Для определения $\tau = \tau(\xi)$ из (11) получим уравнение

$$\xi \frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \tau\sigma(\tau), \quad \sigma(\tau) = C_E \tau J_1(C_E, \tau^2) + J_2(C_E, \tau^2) \tag{20}$$

По теореме Брио и Буке [17] оно допускает бесчисленное множество голоморфных решений, обладающих свойством $\tau(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$

$$\tau = \xi \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k = \xi \varkappa(a_0, C_E, \xi), \quad 0 \leqslant |\xi| < R(a_0, C_E)$$

где $a_0 \neq 0$ произвольно, а $R(a_0, C_E)$ — радиус сходимости ряда.

Из уравнения (20) следует, что если $\tau_1(\xi, C_E)$ — решение, то существует решение $\tau_2(\xi, C_E)$, такое, что $\tau_2(\xi, C_E) = -\tau_1(\xi, -C_E)$. Для интегральной кривой (19) при фиксированном $C_E = \alpha > 0$ и $\xi > 0$ возьмем $\tau_2 = \xi\varkappa(a_0, \alpha, \xi)$, $a_0 > 0$. Если $C_E = \beta < 0$ и $\xi < 0$, то интегральной кривой (19) поставим в соответствие решение $\tau_1 = -\xi\varkappa(\bar{a}_0, -\beta, \xi)$. Если теперь положить $a_0 = \bar{a}_0$, $\beta = -\alpha$, то $\tau_1 = -\tau_2$, $0 \leqslant |\xi| < R$. Отсюда получаем, используя (11), (18), что

$$f_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{m-1}{m}\xi^2 + \varkappa^{-2}(a_0, \alpha, \xi)\right], \quad f_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m-1}{m}\xi^2 + \right.$$
$$\left. + \varkappa^{-2}(a_0, \alpha, \xi)\right]; \quad f_1 \equiv f_2, \quad 0 \leqslant |\xi| < R$$

Таким образом, переход с интегральной кривой (19), имеющей значение $C_E = \beta < 0$, на интегральную кривую (19) со значением $C_E = \alpha = -\beta > 0$ через точку E в плоскость (ξ, f) означает, что при условии непрерывности в точке $(\xi = 0, f = f(0) \neq 0)$ соответствующие интегральные кривые $f(\xi)$ уравнения (8) аналитически проходят ось $\xi = 0$ при $f(0) \neq 0$. Разрывные при $\xi = 0$ решения (8) не рассматриваются. В плоскости (ζ, Φ) решение при $\zeta \to \zeta_e$ будет вести себя следующим образом:

$$\Phi = \frac{a_0^{-2}}{2}(\zeta - \zeta_e) + \frac{a_0^{-3}}{4}\alpha(\zeta - \zeta_e)^2 + \frac{m-1}{24m}a_0^{-4}(\zeta - \zeta_e)^3 + \ldots \tag{21}$$

Обратно, каждое трижды непрерывно дифференцируемое решение $\Phi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_e$, $\Phi = 0$ с $d\Phi/d\zeta_e > 0$ изображается в соответствующей окрестности точки E двумя ветвями интегральной кривой (19) с $C_E = \alpha > 0$ и $C_E = \beta = -\alpha < 0$.

Если $\beta \neq -\alpha$ и первая производная $\Phi'(\zeta)$ непрерывна, то при прохождении точки E вторая производная $\Phi''(\zeta)$ будет терпеть разрыв. Если теперь интегральной кривой (19) при $C_E > 0$ и $\xi < 0$ поставить в соответствие функцию τ_1, то вторая производная $\Phi''(\zeta)$ будет отрицательной при $\zeta = \zeta_e$.

При прохождении точки E_* решение уравнения (2) в окрестности ζ_{e_*} будет вести себя следующим образом:

$$\Phi = -\frac{a_0^{-2}}{2}(\zeta - \zeta_{e_*}) + \frac{a_0^{-3}}{4}C_{E_*}(\zeta - \zeta_{e_*})^2 + \frac{m-1}{24m}a_0^{-4}(\zeta - \zeta_{e_*})^3 + \ldots \tag{22}$$

Знак второй производной $\Phi''(\zeta)$ зависит от знаков произвольных постоянных $a_0 \neq 0$ и C_{E_*}.

Интегральную кривую, выходящую из E при $F > 0$ и описываемую (19) с $C_E = 0$, обозначим Ψ_E. Ее поведение в окрестности ζ_e описывается разложением (21) с $\alpha = 0$. Аналогично вводится кривая $\Psi^*_{E_*}$. Ей в окрестности $\zeta = \zeta_{e_*}$ соответствует (22) с $C_{E_*} = 0$.

Особая точка G (а также G_*) является седлом. Из нее выходит при $F > 0$, единственная голоморфная кривая

$$\Psi_G = -\frac{3}{2}F + \frac{m-2}{5m} + O(F^{-1}), \quad F \to +\infty, \quad m > 0$$

В плоскостях (ξ, f) и (ζ, Φ) соответственно будем иметь

$$f = C_g|\xi|^{1/2} + \frac{2(m-2)}{15m}\xi^2 + \ldots, \quad \xi \to 0, \quad C_g > 0 \tag{23}$$

$$\Phi = C_g^2(\zeta - \zeta_g)^2 + \frac{m-2}{30m}C_g^4(\zeta - \zeta_g)^5 + \ldots, \quad \zeta \to \zeta_g + 0$$

$$\Phi = -C_g^2(\zeta - \zeta_g)^2 + \frac{m-2}{30m}C_g^4(\zeta - \zeta_g)^5 + \ldots, \quad \zeta \to \zeta_g - 0$$

Особая точка Q (а также Q_*) является узлом. В ее окрестности интегральные кривые представимы в виде

$$\Psi = \frac{C_q}{F} - 1 + \ldots, \quad F \to 0 \tag{24}$$

В плоскости (ξ, f) при $\xi \to c \neq 0$ функция $f(\xi)$ будет вести себя следующим образом:

$$f = \pm c^2\left[\frac{2C_q}{c}(\xi - c)\right]^{1/2} - \frac{2c}{3}(\xi - c) + \ldots$$

Если $\xi > c$, то $C_q c > 0$. В противном случае $C_q c < 0$. В плоскости (ζ, Φ) это означает, что точка Q соответствует точке локального экстремума аналитического решения

$$\Phi = c + \frac{C_q c^3}{2}(\zeta - \zeta_q)^2 - \frac{C_q c^4}{6}(\zeta - \zeta_q)^3 + \ldots \tag{25}$$

Из найденных соотношений следует, что постоянная C_q в (24) должна сохраняться при переходе через ось $F = 0$. Пусть, например, интегральная кривая (24) попадает в точку Q с $C_q < 0$ при $F \to +0$. Чтобы получить аналитическое решение (25) в точке $\zeta = \zeta_q$, необходимо выйти из Q_* вдоль кривой (24) с $C_{q_*} = C_q$ при $F \to -0$. Ниже будут рассматриваться только такие продолжения интегральных кривых, попадающих в Q или в Q_*, а сам «внутренний» переход из Q (Q_*) в Q_* (Q) будет обозначаться так: $Q\ (Q_*) \to Q_*\ (Q)$.

Таким образом, если интегральная кривая $\Psi(F)$ при $F \geqslant 0$ попадает в особую точку A при $\xi > 0$, то выполняются условия (3) и (10), если в B при $\xi < 0$, то — (5) и (9). Прохождение точки E или E_* интегральной кривой $\Psi(F)$ означает, что соответствующая ей интегральная кривая $\Phi(\xi)$ пересекает ось ζ. Если точки E и E_* достигаются вдоль Ψ_E и $\Psi^*_{E_*}$, то в нуль обращаются одновременно $\Phi(\zeta)$ и $d^2\Phi/d\zeta^2$.

Исследуем краевую задачу (2)—(5). Интегральная кривая $\Psi_1{}^*$, выходящая из точки B с $f < 0$, при $0 < m < \infty$ всегда попадает в точку C (фиг. 1—3). Поэтому рассмотрим поведение кривой Ψ_1, описываемое в некоторой окрестности точки B разложением (16). При $F \to 0$ в плоскостях (ζ, Φ) и (ξ, f) интегральные кривые соответствующие Ψ_1, ведут себя согласно (17) и (9) при $c \neq 0$, обеспечивая выполнение условия (5). Предположим сначала, что $m > 1$. В точке B справедливы неравенства

$$\frac{d\Psi_{P_1}}{dF} < \frac{d\Psi_1}{dF} < \frac{d\Psi_{R_1}}{dF} \quad \left(\frac{1}{2} < m < \infty\right)$$

Из них вытекает, что Ψ_1 выходит из B, располагаясь выше P_1 и ниже R_1. Из теоремы существования и единственности Коши [17] следует, что $\Psi_1(F) > \Psi_{P_1}(F)$, когда $F \in (0, +\infty)$. Обе ветви параболы R_1 и R_2

при $F \to \infty$ попадают в E. В точках $(F, \Psi_R) \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\frac{d\Psi}{dF} < \frac{d\Psi_{R_1}}{dF} < 0, \quad \frac{d\Psi}{dF} < \frac{d\Psi_{R_2}}{dF} < 0$$

Их выполнение означает, что $\Psi_1 < \Psi_{R_1}$ при всех $F > 0$. Кривая Ψ_1 не совпадает с Ψ_E, так как последняя в окрестности E расположена между R_1 и R_2. В силу теоремы Коши Ψ_E не может выйти из области Ω. Она при $F \to 0$ попадает в точку A. Поэтому все интегральные кривые, выходящие из A ниже Ψ_E, попадут в точку E. Кривая Ψ_G в окрестности точки G располагается ниже P_2. Из теоремы Коши следует, что $\Psi_{P_2} > \Psi_G$ для всех $F \in (0, \infty)$ и Ψ_G войдет в A при $F \to 0$.

В окрестности точки E кривая Ψ_1 описывается разложением (19) с некоторым фиксированным $C_E = \beta_* < 0$. Все интегральные кривые, выходящие из A и расположенные между Ψ_G и Ψ_E, попадут в точку E. Среди них выделим кривую Ψ_2 с $C_E = \alpha_* = -\beta_*$. Кривую, составленную из ветвей Ψ_1 и Ψ_2, обозначим K. В плоскости (ξ, f) ей соответствуют в классе дважды непрерывно дифференцируемых решений задачи (8—10) интегральные кривые, выходящие из точек $(c, 0)$, $c < 0$ с асимптотикой (9), проходящие ось $\xi = 0$ и имеющие при $\xi \to +\infty$ асимптотику (10). Если задать величину постоянной $b > 0$, то из этого множества интегральных кривых $f(\xi)$ выделится единственная, которой в плоскости (ζ, Φ) соответствуют решения

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \zeta + L, \quad f > 0, \quad c < \Phi < \infty, \ c < 0 \tag{26}$$

Они автоматически удовлетворяют условиям (3), (5). При $\zeta \to -\infty$ будет справедлива первая формула (17) с

$$l_B = -\int_0^c \left[\frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{c(\xi - c)}\right] d\xi - \frac{\ln|c|}{c} + L$$

а при $\zeta \to +\infty$ — соотношение (15) с

$$l_A = -\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{mb^{1/m}\xi^{(m-1)/m}}\right] d\xi + L$$

Толщина вытеснения слоя смешения связана со значением постоянной l_A. Из всех решений (26) только единственное, с $L = 0$, удовлетворяет условию (4). Так как кривая K полностью лежит вне параболы R, а прямая $\Psi = -2F$ — внутри нее, то из соотношений (11), (13) следует

$$\frac{df}{d\xi} > 0, \quad \frac{d^2f}{d\xi^2} < 0, \quad \xi \in (c, \infty); \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} > 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} > 0$$
$$\zeta \in (-\infty, +\infty)$$

Предположим теперь, что $1/2 < m \leqslant 1$ (фиг. 2). При $F \to -\infty$ ветви параболы R попадают в точку E_*. Когда $m = 1$, она распадается на две прямые: $\Psi_{R_2} = -2F$ и $\Psi_{R_1} = -2F - 1$. Из неравенства $d\Psi/dF < -2$, справедливого в точках прямой $\Psi = -2F - 1$, следует, что Ψ_1 попадает в E, располагаясь ниже $\Psi = -2F - 1$, соединяющей B и E. Кривая Ψ_2 из точки E попадает в точку A, пересекая прямую $\Psi = -2F$, что означает смену знака $d^2\Phi \mid d\zeta^2$ с положительного на отрицательный при таком значении $\zeta = \zeta_0$, что $\Phi(\zeta_0) > 0$. Первая производная решения $\Phi'(\zeta) > 0$. Поведение третьей производной дается (13).

Значение постоянной k определяется из формулы:

$$k = 2^{(m+1)/2m} \exp\left\{\frac{m+1}{m}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{2(F+1)}\right] dF\right\} \chi(\Psi_2)$$

$$\chi(\Psi) = 2^{-(m+1)/2m} \exp\left\{-\frac{m+1}{m}\int_1^\infty \left[\frac{1}{\Psi} + \frac{1}{2F}\right] dF - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \left[\frac{m+1}{m\Psi} + \frac{1}{F}\right] dF\right\}$$

При $m = 1/2$ (фиг. 1) решение $\Psi = -2F - 1$ проходит одновременно точки E, B, C, E_*. Его часть Ψ_1 описывает истечение плоской струи из отверстия [18]. Когда $1/3 < m < 1/2$, кривая Ψ_1 попадает в E, затем в Q. Ее продолжение выходит из Q_* и попадает в C. При $m = 1/3$ имеем $\Psi_1 = \Psi_G = -3F/2 - 1$ и Ψ_1 попадает в G. При $0 < m < 1/3$ кривая Ψ_1 попадает в Q_*. Ее продолжение из точки Q попадает в C.

Таким образом, при $m > 1/2$ и заданной величине $b > 0$ решение задачи (2)—(5) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций существует и единственно. При $0 < m \leqslant 1/2$ решений нет.

Обратимся к задаче (2)—(4), (6). При $m = 1/2$ кривые Ψ_E и $\Psi^*_{E_*}$ совпадают с прямой $\Psi = -2F - 1$ (фиг. 1). Если $0 < m < 1/2$, то они попадают в точку C. При $1/2 < m < 1$ кривая Ψ_E выходит из точки E, располагаясь выше $\Psi = -2F - 1$. Из неравенства $d\Psi/dF < -2$, имеющего место в точках $\Psi = -2F - 1$, следует, что $\Psi_E > -2F - 1$ для всех $F \in (0, \infty)$. Так как в точках прямой $\Psi = -2F$ справедливо неравенство $d\Psi/dF > -2$, то $\Psi_E < -2F$, когда $F \in (0, \infty)$. При $F \to 0$ интегральная кривая Ψ_E попадает в A. Окончательное решение дается формулой (26) с $L = 0$. При этом

$$\Phi(\zeta) > 0, \quad \Phi'(\zeta) > 0, \quad \Phi''(\zeta) < 0, \quad 0 < \zeta < \infty$$

В окрестности $\zeta = 0$ решение описывается разложением (21) ($\zeta_e = 0$, $\alpha = 0$) и удовлетворяет условиям (4), (6). При $\zeta \to \infty$ выполняется (3). Кривая $\Psi^*_{E_*}$ попадает при $0 < m < 1$ в точку C, так как она лежит ниже исключительной кривой $\Psi_A{}^*$. Последняя выходит из точки A, достигает точки E_* и лежит выше прямой $\Psi = -2F$. Это вытекает из неравенства $d\Psi/dF < -2$, справедливого в точках прямой $\Psi = -2F$.

При $m = 1$ кривые Ψ_E и $\Psi^*_{E_*}$ совпадают с прямой $\Psi = -2F$ (фиг. 2). В физической плоскости решение становится тривиальным $\Phi = (a_0^{-2}\zeta)/2$. При $m > 1$ (фиг. 3) кривая Ψ_E всегда попадает в точку A и формула (26) при $\xi > 0$ дает решение задачи. Связь между постоянными a_0 и b дается формулой $a_0^{-1} = (m/k_1)^{m/(m+1)} b^{1/(m+1)}$, где $k_1 = \chi(\Psi_E)$ — фиксированные постоянные, получаемые из решения (2)—(4), (6) при $a_0 = 1$ в (21). Кривая $\Psi^*_{E_*}$ лежит выше $\Psi_A{}^*$ и при $F \to -0$ попадает в Q_*. Ее продолжение Ψ_{QEA} выходит из Q, проходит E и попадает в A. Обозначим объединение интегральных кривых $\Psi^*_{E_*}$ и Ψ_{QEA} через Ψ_{E_*} и для удобства также назовем кривой, так как точки Q_* и Q тождественны.

Кривые $\Phi(\zeta)$, соответствующие Ψ_{E_*} и удовлетворяющие условиям краевой задачи (2)—(4), (6), ведут себя следующим образом. При $\zeta \to +0$ они описываются разложением (22) с $\zeta_{e_*} = 0$, $C_{E_*} = 0$. При достижении ζ значения $\zeta_q > 0$ производная $d\Phi/d\zeta$ меняет знак с отрицательного на положительный. В окрестности ζ_q решение описывается разложением (25) с $C_q < 0$, $c < 0$. Затем в точке ζ_e оно обращается в нуль и при $\zeta \to +\infty$ удовлетворяет (15). Из групповых свойств уравнений (2), (8)

следуют соотношения

$$a_0^{-1} = \left(\frac{m}{k_2}\right)^{1-\varkappa_3} b^{\varkappa_3}, \quad \zeta_{q,e} = a_0 \bar{\zeta}_{q,e}, \quad \varkappa_3 = (m+1)^{-1}$$

Здесь k_2, $\bar{\zeta}_q$, $\bar{\zeta}_e$ — фиксированные постоянные, получаемые из решения задачи (2), (4)—(6), когда $a_0 = 1$ в (22). Если обозначить $f_1(\xi)$ решение (8), соответствующее Ψ_{E_*} при $F \leqslant 0$, а $f_2(\xi)$ — при $F \geqslant 0$, то интегральная кривая в плоскости (ζ, Φ) будет описываться формулами

$$\zeta = \int_0^{\Phi} \frac{d\xi}{f_1(\xi)}, \quad c \leqslant \Phi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_q, \quad \zeta(c) = \zeta_q \tag{27}$$

$$\zeta = \zeta_q + \int_c^{\Phi} \frac{d\xi}{f_2(\xi)}, \quad c \leqslant \Phi < \infty, \quad \zeta_q \leqslant \zeta < \infty$$

Из (27) видно, что ζ является монотонной функцией, если двигаться вдоль кривой Ψ_{E_*} от E_* к A, и каждому значению ζ отвечает одно значение Φ. Вторая производная $\Phi''(\zeta)$ всюду положительна. Функция $\Phi(\zeta)$, обратная (27), дает решение задачи (2), (4)—(6).

Таким образом, существуют интегральные кривые $\Phi(\zeta)$, соответствующие как Ψ_E, так и Ψ_{E_*}, которые дают решение краевой задачи (2)—(4), (6). На неединственность его впервые было указано при $m = 3$ в работе [13]. Численному исследованию этого вопроса посвящена работа [14].

Единственность можно обеспечить, если наложить на решение дополнительное требование $\Phi'(0) > 0$ [1], так как для кривой Ψ_{E_*} имеем из (22) $\Phi'(0) < 0$.

Из сказанного следует, что при заданном $b > 0$ решение задачи (2)—(4), (6) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций при $^1/_2 < m \leqslant 1$ существует и единственно. При $m > 1$ существуют два решения. Одно из них характеризуется положительностью первой производной $d\Phi/d\zeta > 0$, $0 \leqslant \zeta < \infty$. Другое — наличием области $[0, \zeta_q)$, $\zeta_q > 0$, в которой $d\Phi/d\zeta < 0$. Единственное решение поэтому можно выделить с помощью дополнительного требования, а именно: задания знака производной в нуле [1]. При $0 < m \leqslant {}^1/_2$ решений нет.

Рассмотрим теперь кратко задачу (2) — (4), (7). При $0 < m \leqslant {}^1/_2$ она не имеет решения. При $^1/_2 < m \leqslant 1$ кривые, выходящие из A ниже Ψ_2, попадают в E и затем возвращаются обратно в A (фиг. 2). Они дают решение (2) — (4), (7) с $d\Phi/d\zeta > 0$. С помощью выбора постоянных C_E можно также построить решение задачи Локка, сформулированной в [3]. При $1 < m \leqslant 2$ кроме указанных существуют еще решения, удовлетворяющие условиям (3), (4), (7). Это часть кривых (а при $m = 2$ все), которые выходят из A, располагаясь ниже Ψ_G, но выше Ψ_2 (фиг. 3). Они проходят E, затем попадают в $Q \to Q_*$, E_* и возвращаются обратно в A через $Q_* \to Q$, E. При $m > 2$ имеются также такие кривые, которые, выйдя из точки A, попадают в E, затем в $Q \to Q_*$, $Q \to Q_*$ и возвращаются обратно в A. При $1 < m < 2$ кривая Ψ_A^*, продолженная Ψ_{QEA}, также дает решение задачи, если $b_1 > 0$ и ее величина согласована с b. Оно описывает слой смешения, который разделяет два параллельных потока, движущихся в разные стороны с разными скоростями. Разрешимость (2) — (4), (7) при произвольных $b > 0$ и $b_1 < 0$ здесь не исследуется.

Отметим еще, что кривая Ψ_G при $m = 1$ дает решение Блазиуса для пограничного слоя (фиг. 2). В окрестности $\zeta = 0$ оно ведет себя, как (23) с $\zeta_g = 0$, $\zeta \geqslant 0$, а при $\zeta \to \infty$ как (15).

В заключение рассмотрим решение уравнения (2) при условии, что $m = \infty$ и вместо (3) требуется

$$\Phi(\zeta) = e^{\zeta} + \ldots, \quad \zeta \to \infty \tag{28}$$

Задача (2), (4), (5), (28) возникает в теории нестационарного отрыва [12]. Покажем, что ее решение существует и единственно. Характер особых точек уравнения (12) при $m = \infty$ не меняется. При $C_E = -1/\sqrt{2}$, $\xi < 0$ и $C_E = 1/\sqrt{2}$, $\xi > 0$ получим

$$\sigma_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[3t \pm \sqrt{t(3t+2)}\right], \quad \Psi_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[1 + 4F \pm \sqrt{1+4F}\right]$$

$$\tau_{1,2} = \mp \frac{d_0\xi}{\sqrt{2 + 2d\xi - d^2\xi^2}}, \quad t_{1,2} = \tau_{1,2}^2, f_{1,2} = \frac{1}{d^2} + \frac{\xi}{d}, \quad d > 0$$

Отсюда следует, что $f_1 \equiv f_2$ при всех ξ. Из граничного условия для $f(\xi)$ при $\xi \to +\infty$ находим, что $d = 1$. Из формулы (26) с $L = 0$ получаем решение $\Phi = e^{\zeta} - 1$ [12]. Оно единственно, так как кривая Ψ_1^*, выходящая из B с $f < 0$, сразу попадает в A. Ей соответствуют решения

$$\Phi = -d^{-1}\left(\exp\frac{\zeta - \zeta_0}{d} + 1\right), \quad d \neq 0$$

не удовлетворяющие краевым условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диесперов В. Н.* О существовании и единственности автомодельных решений, описывающих течение в слоях смешения.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 6, с. 1341—1346.
2. *Lessen M.* On the stability of the free laminar boundary layer between parallel streams.— NACA Tech. Note, 1929.
3. *Lock R. C.* The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, v. 4, pt 1, p. 42—57.
4. *Chapman D. R.* Laminar mixing of compressible fluid.— NACA Report, 1950, No. 958. 7 p.
5. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1930, v. 26, pt 1, p. 1—30.
6. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
7. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47—59.
8. *Рубан А. И.* К теории ламинарного отрыва жидкости от точки излома твердой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, вып. 4, с. 18—28.
9. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separtion.— Proc. Roy. Soc. A, 1969, v. 312, No. 1509, p. 181—206.
10. *Daniels P. G.* Viscous mixing at a trailing edge.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1977, v. 30, pt 3, p. 319—342.
11. *Диесперов В. Н.* О трансзвуковом обтекании выпуклого угла со свободной линией тока.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5, с. 130—137.
12. *Сычев Вик. В.* Теория нестационарного отрыва пограничного слоя и разрушения следа.— Успехи механики, 1983, т. 6, вып. 1/2, с. 13—51.
13. *Stewartson K.* On the flow downstream of separation in an incompressible fluid.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1953, v. 49, pt 3, p. 561—569.
14. *Smith F. T.* Non-uniqueness in wakes and boundary layrs.— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1984, v. 391, No. 1800, p. 1—26.
15. *Хаимов Х. Н.* Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены.— Уч. зап. физ.-матем. ф-та. Душанбинского гос. пед. ин-та, 1956, т. 2.
16. *Bendixson J.* Sur les courbes définies par des équations différentielles.— Acta Math., 1901, v. 24, p. 1—88.
17. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970. 571 с.
18. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1984