Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 532.526

О ЛАМИНАРНОМ ПРЕДОТРЫВНОМ ТЕЧЕНИИ

Богданова Е. В., Рыжов О. С.

Рассматривается пограничный слой несжимаемой жидкости в области, расположенной впереди схода свободной линии тока с поверхности гладкого тела или точки излома его образующей. Потенциал внешнего безвихревого поля скоростей берется из теории струйных течений. Относительно начальной величины поверхностного трения предполагается, что ее порядок может меняться в широких пределах, оставаясь как конечным, так и принимая весьма большие значения. Во всех случаях пограничный слой в предотрывной области допускает единую математическую трактовку, в которой исходная величина поверхностного трения играет роль одного из параметров.

1. Внешний потенциальный поток. Выберем для измерения как независимых, так и искомых величин систему единиц, в которой за основные приняты радиус кривизны образующей тела в точке отрыва, скорость внешнего потенциального потока в этой точке и плотность жидкости. Полагая совершенным переход к безразмерным переменным, направим ось s криволинейной ортогональной системы координат вдоль образующей тела, а ось n — по нормали к ней. Обозначим через u' и v' компоненты вектора возмущающей скорости, через p' — избыточное давление во внешней потенциальной области течения. Согласно линеаризованной форме интеграла Бернулли, $u' = -p'$, а комплексная скорость будет $-(p' + iv')$. Из теории струйных течений идеальной несжимаемой жидкости известно, что в окрестности точки схода с тела свободной линии тока [1]

$$p' + iv' = ib_{1/2}z^{1/2} + ib_{3/2}z^{3/2} + \ldots, \quad z = s + in \tag{1.1}$$

Когда $\arg z \to 0$, давление $p' \to 0$, в то время как

$$v' = b_{1/2}s^{1/2} + b_{3/2}s^{3/2} + \ldots \tag{1.2}$$

Если же $\arg z \to \pi$, то $v' \to 0$, а

$$p' \to -b_{1/2}(-s)^{1/2} + b_{3/2}(-s)^{3/2} + \ldots \tag{1.3}$$

В соответствии с (1.2) уравнение свободной линии тока имеет вид

$$n = \frac{2}{3}b_{1/2}s^{3/2} + \frac{2}{5}b_{3/2}s^{5/2} + \ldots \tag{1.4}$$

Для пограничного слоя на плохо обтекаемом теле В. В. Сычев показал [2], что постоянная $b_{1/2}$ положительна и имеет порядок $R^{-1/16}$, где R — число Рейнольдса. Эта оценка ведет к обоснованию так называемого условия Бриллюэна — Вилля, согласно которому в пределе $R \to \infty$ кривизна свободной линии тока в месте схода с тела равна кривизне его контура. Действительно, как видно из (1.4), кривизна струйки жидкости, огибающей тело и следующей затем вдоль границы застойной зоны, сохраняется непрерывной в точке $s = 0$ при $b_{1/2} \to 0$.

Возможность применить результаты теории струй к локальному описанию поля скоростей при отрыве потока изучалась также Месситером и Инлоу [3], пришедшими к неверному утверждению, что $b_{1/2} = 0$ при любом большом (но отнюдь не бесконечном) значении числа Рейнольдса. В использованном ими разложении комплексной скорости ряд по полуцелым степеням z начинался с члена, пропорционального $z^{3/2}$. Последующий учет [4, 5] этого члена не изменил выводов в анализе В. В. Сычева.

Постоянные $b_{1/2}$ и $b_{3/2}$ из (1.1) определяются глобальной картиной течения жидкости, которое может быть и кавитационным. В последнем случае их величины меняются при переходе от одной модели к другой, хотя эти изменения невелики [6]. В рамках локальной теории, ставящей целью построить поле скоростей вблизи отрыва потока от поверхности тела, обе постоянные должны задаваться таким образом, чтобы учесть характерные ситуации, которые возникают при обтекании препятствий различного вида и в которых условия формирования пограничного слоя в предотрывной области могут оказаться весьма далекими одно от другого.

2. Преобразование уравнений Прандтля. Обозначив нормированные обычным образом поперечную координату и функцию тока для пограничного слоя посредством N и Ψ соответственно, пишем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial N}-\frac{\partial \Psi}{\partial s}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial N^2}=\frac{\partial^3 \Psi}{\partial N^3}-\frac{dp'}{ds} \tag{2.1}$$

где избыточное давление p' задается формулой (1.3). Будем считать, что постоянная $b_{1/2}$ в ней может иметь любой знак, а постоянная $b_{3/2} \sim 1$ положительна. Кроме того, весьма существенным для описания пограничного слоя является еще один параметр — характерная величина поверхностного трения λ. В дальнейшем постоянные $b_{1/2}$ и λ предполагаются подчиняющимися по крайней мере одному из двух неравенств: $|b_{1/2}| \ll 1$, либо $\lambda \gg 1$.

Когда $|b_{1/2}| \ll 1$ и $\lambda \sim 1$, исходным служит уравнение Прандтля в каноническом виде (2.1). Однако при $|b_{1/2}| \sim 1$ и $\lambda \gg 1$ в нем нужно предварительно сделать замену независимых переменных и искомой функции тока, поскольку эффективная толщина пограничного слоя существенно уменьшается. Ключ к поиску такой замены дает инвариантность уравнения (2.1) (с отброшенной производной dp'/ds) по отношению к двухпараметрической группе преобразований подобия

$$s=\alpha x, \quad N=\beta y_2, \quad \Psi=\gamma\psi_2, \quad \gamma=\alpha\beta^{-1} \tag{2.2}$$

Положив $\alpha=\lambda^{-2}$, $\beta=\lambda^{-1}$ с вытекающим отсюда равенством $\gamma=\lambda^{-1}$, получим, что в новых переменных характерная величина поверхностного трения обращается в единицу, а избыточное давление

$$p'=\lambda^{-1}[-b_{1/2}(-x)^{1/2}+\lambda^{-2}b_{3/2}(-x)^{3/2}+\ldots] \tag{2.3}$$

Будем считать замену (2.2) выполненной, что означает переход к системе единиц измерения, в которой все параметры пограничного слоя сохраняют конечные значения, а избыточное давление мало.

3. Вязкое течение в пристеночном слое. Из-за наличия особенности в определяемом посредством (2.3) градиенте давления весь пограничный слой следует разбить на две области: основную его толщу и прилегающий непосредственно к обтекаемой стенке тонкий подслой [2, 3]. В первой из названных областей течение можно полагать локально невязким, во второй без учета вязких тангенциальных напряжений нельзя удовлетворить условию прилипания жидкости к твердой поверхности. Чтобы выделить в выражении для давления главный член при любых значениях $b_{1/2}$ и λ, естественно произвести растяжение $x=|b_{1/2}|\lambda^{-1}x_1$ продольной координаты, после чего ввести поперечную координату y_3 и функцию тока ψ_3 для поля скоростей в вязком подслое следующим образом:

$$y_2=|b_{1/2}|^{1/3}\lambda^{-1/3}y_3, \quad \psi_2=|b_{1/2}|^{2/3}\lambda^{-2/3}\psi_3 \tag{3.1}$$

В этих переменных уравнение (2.1) гласит:

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial y_3}\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1 \partial y_3}-\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y_3^2}=\frac{\partial^3 \psi_3}{\partial y_3^3}-|b_{1/2}|^{5/6}\lambda^{-5/6}\frac{dp_1}{dx_1} \tag{3.2}$$

Поскольку нормированное избыточное давление p_1 определяется как

$$(3.3)\qquad p'_1 = |b_{1/2}|^{2/3}\lambda^{-2/3}p_1,\quad p_1 = -\operatorname{sign} b_{1/2}(-x_1)^{1/2} + \\ + b_{3/2}\lambda^{-3}(-x_1)^{3/2} + \ldots$$

то сразу видно, что член с его градиентом в правой части (3.2) мал не только при $|b_{1/2}| \ll 1$ и $\lambda \sim 1$, но также в случае $|b_{1/2}| \sim 1$ и $\lambda \gg 1$. Это свойство, вновь основывающееся на инвариантности уравнения Прандтля (без производной dp'/dx) по отношению к группе преобразований подобия, позволяет выразить решение (3.2) при помощи асимптотической последовательности

$$(3.4)\qquad \psi_3 = {}^1/_2 y_3^2 + |b_{1/2}|^{2/3}\lambda^{-2/3}[\psi_3^{(1/2)}(x_1, y_3) + \lambda^{-3}\psi_3^{(3/2)}(x_1, y_3)] + \\ + b_{5/3}\psi_3^{(5/3)}(x_1, y_3) + \ldots$$

Здесь постоянная $b_{5/3}$, как будет видно из дальнейшего, выбирается произвольно; слагаемое с функцией $\psi_3^{(3/2)}$ следует сохранить, если $\lambda \sim 1$. Не выделяя специально последний случай, каждый из входящих в (3.4) членов $\psi_3^{(m)}$ с $m = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_3$ представим равенством

$$(3.5)\qquad \psi_3^{(m)} = (-x_1)^m f^{(m)}(\xi),\quad \xi = (-x_1)^{-1/3} y_3$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение для $f^{(m)}$ имеет вид

$$(3.6)\qquad \frac{d^3f^{(m)}}{d\xi^3} - \frac{1}{3}\xi^2\frac{d^2f^{(m)}}{d\xi^2} + m\xi\frac{df^{(m)}}{d\xi} - mf^{(m)} = m\delta_m$$

причем $\delta_m = \operatorname{sign} b_{1/2}$ при $m = {}^1/_2$, $\delta_m = -b_{3/2}$ при $m = {}^3/_2$ и $\delta_m = 0$ при $m = {}^5/_3$. Граничные условия

$$(3.7)\qquad f^{(m)} = df^{(m)}/d\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

для уравнения (3.6) получаются из требования прилипания жидкости к поверхности обтекаемого тела. Кроме того, в искомом решении должны отсутствовать члены, экспоненциально растущие, когда $\xi \to \infty$.

Продифференцировав (3.6) и совершив подстановку $g^{(m)} = d^2f^{(m)}/d\xi^2$, находим вслед за [3], что новая искомая величина, рассматриваемая в качестве функции $\eta = \xi^3/9$, удовлетворяет однородному уравнению

$$(3.8)\qquad \eta\frac{d^2g^{(m)}}{d\eta^2} + \left(\frac{2}{3} - \eta\right)\frac{dg^{(m)}}{d\eta} + \left(m - \frac{2}{3}\right)g^{(m)} = 0$$

Подставив (3.7) в (3.6), выводим граничное условие

$$(3.9)\qquad dg^{(m)}/d\eta = 3^{-1/3}m\delta_m\eta^{-2/3} \quad \text{при} \quad \eta \to 0$$

для уравнения (3.8). Чтобы исключить экспоненциальный рост решения на бесконечности, положим

$$(3.10)\qquad g^{(m)} = A_m\Psi\,({}^2/_3 - m,\ {}^2/_3;\ \eta)$$

с Ψ-функцией Трикоми [7] в правой части. Когда $\eta \to \infty$, имеем

$$(3.11)\qquad g^{(m)} = A_m[\eta^{m-2/3} - (1-m)({}^2/_3 - m)\,\eta^{m-5/3} + \ldots]$$

Обозначив через Γ и Φ гамма-функцию Эйлера и конфлюентную гипергеометрическую функцию соответственно, перепишем формулу (3.10) так [7]:

$$(3.12)\qquad g^{(m)} = A_m\left[\frac{\Gamma({}^1/_3)}{\Gamma(1-m)}\Phi\left(\frac{2}{3} - m, \frac{2}{3}; \eta\right) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(-{}^1/_3)}{\Gamma({}^2/_3 - m)}\eta^{1/3}\Phi\left(1 - m, \frac{4}{3}; \eta\right)\right]$$

Так как $\Phi = 1$ при $\eta = 0$, граничное условие (3.9) дает

$$(3.13)\qquad \frac{\Gamma(-{}^1/_3)}{\Gamma({}^2/_3 - m)}A_m = 3^{2/3}m\delta_m$$

Для $m = {}^1/_2,\ {}^3/_2$ равенство (3.13) определяет постоянные

$$(3.14)\qquad A_{1/2} = -\frac{1}{2\cdot 3^{1/3}}\frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)}\operatorname{sign} b_{1/2},\quad A_{3/2} = -\frac{3^{5/3}}{5}\frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)} b_{3/2}$$

если вспомнить, что $\delta_m = \operatorname{sign} b_{1/2}$ при $m = {}^1/_2$ и $\delta_m = -b_{3/2}$ при $m = {}^3/_2$. Однако при $\delta_m = 0$ получить нетривиальное значение постоянной A_m можно только в случае

$$(3.15)\qquad m = {}^2/_3 + N,\quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Первое собственное число из спектра (3.15) будет $m = {}^2/_3$, оно порождает собственную функцию $g^{(2/3)} = 1$, которая отвечает сдвигу в начальном поверхностном трении λ, а потому не представляет интереса. Второе собственное число $m = {}^5/_3$, чем оправдано введение пропорционального постоянной $b_{5/3}$ члена в разложении (3.4). Так как эта постоянная не содержится во внешнем разложении (1.1)—(1.4) для потенциального потока, положим $A_{5/3} = -{}^3/_2$. Тогда вторая собственная функция $g^{(5/3)} = 1 - {}^3/_2\,\eta$, ей соответствует величина

$$f^{(5/3)} = {}^1/_2\,(\xi^2 - {}^1/_{60}\xi^5)$$

задающая типичное поле скоростей для пограничного слоя с нулевым градиентом давления.

Подставив значения (3.14) постоянных $A_{1/2}$ и $A_{3/2}$ в формулу (3.12), вычислим величину поверхностного трения τ_w, действующего на обтекаемое тело. В используемых безразмерных нормированных переменных

$$(3.16)\qquad \tau_w = \left.\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y_2^2}\right|_{y_2=0} = \left.\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y_3^2}\right|_{y_3=0} = 1 + \frac{\Gamma(1/6)\,\Gamma(1/3)}{2\cdot 3^{1/3}\pi^{1/2}\Gamma(2/3)}\times$$
$$\times |b_{1/2}|^{5/6}\lambda^{-5/6}\left[-\operatorname{sign} b_{1/2}(-x_1)^{-1/6} + \frac{9}{5} b_{3/2}\lambda^{-3}(-x_1)^{5/6}\right] +$$
$$+ b_{5/3}(-x_1) + \ldots$$

Остается установить поведение параметров жидкости на внешнем краю $y_3 \to \infty$ вязкого подслоя, откуда вытекают условия сращивания с функцией тока ψ_2. Обращаясь к соотношениям (3.5) и (3.11), имеем

$$(3.17)\qquad \psi_3 = \frac{1}{2}y_3^2 + |b_{1/2}|^{5/6}\lambda^{-5/6}\Big\{\operatorname{sign} b_{1/2}\times$$
$$\times\left[-\frac{2\Gamma(1/6)}{3\Gamma(2/3)}y_3^{3/2} + B_{1/2}(-x_1)^{1/6}y_3 - (-x_1)^{1/2} + \ldots\right] -$$
$$- b_{3/2}\lambda^{-3}\left[\frac{4\Gamma(1/6)}{315\Gamma(2/3)}y_3^{9/2} - \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)}(-x_1)\,y_3^{3/2} + B_{3/2}(-x_1)^{7/6}y_3 -\right.$$
$$\left.\left. - (-x_1)^{3/2} + \ldots\right]\right\} + \frac{1}{2}b_{5/3}\left[-\frac{1}{60}y_3^5 + (-x_1)\,y_3^2\right] + \ldots$$

где $B_{1/2}$ и $B_{3/2}$ — постоянные, которые возникают при интегрировании $g^{(m)}$ с $m = {}^1/_2,\ {}^3/_2$.

4. Основная толща пограничного слоя. Переходя в уравнении Прандтля к переменным x_1, y_2, ψ_2 и принимая во внимание формулу (3.3) для избыточного давления, перепишем его как

$$(4.1)\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y_2^2} = |b_{1/2}|\lambda^{-1}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial y_2^3} - |b_{1/2}|^{3/2}\lambda^{-3/2}\frac{dp_1}{dx_1}$$

В отличие от (3.2) здесь оба коэффициента при членах в правой части выражаются через отношение $|b_{1/2}|/\lambda$, которое стремится к нулю как при $|b_{1/2}| \ll 1$ и $\lambda \sim 1$, так и тогда, когда $|b_{1/2}| \sim 1$ и $\lambda \gg 1$. При этом условии главным в (4.1) становится оператор из левой части, порожденный учетом инерционных сил в уравнении Прандтля, а обусловленные градиентом давления и вязкими касательными напряжениями вклады малы. Чтобы иметь возможность удовлетворить требованию о сращивании ψ_2 с функцией тока для узкого пристеночного подслоя, при $|b_{1/2}|/\lambda \leqslant 1$ естественно искать решение в виде асимптотической последовательности

$$(4.2)\qquad \psi_2 = \psi_{21}^{(0)}(y_2) + |b_{1/2}|\lambda^{-1}\psi_{22}(x_1, y_2) + |b_{1/2}|^{7/6} \times \\ \times \lambda^{-7/6}\psi_{23}(x_1, y_2) + |b_{1/2}|^{3/2}\lambda^{-3/2}\psi_{24}(x_1, y_2) + \ldots$$

Подставив (4.2) в (4.1), находим

$$(4.3)\qquad \frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\frac{\partial^2\psi_{2l}}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{d^2\psi_{21}^{(0)}}{dy_2^2}\frac{\partial\psi_{2l}}{\partial x_1} = \Psi_l$$

причем функция $\psi_{21}^{(0)}$ остается произвольной. Индекс $l = 2$, для которого $\Psi_l = d^3\psi_{21}^{(0)}/dy_2^3$, выделяет регулярное слагаемое в решении уравнения Прандтля. Заранее очевидно далее, что при $l = 3$ правая часть $\Psi_l = 0$, поэтому величина ψ_{23} является, по существу, собственной функцией определяемого инерционными силами оператора из левой части (4.1). Наконец, особенностям в градиенте давления (3.3) отвечает индекс $l = 4$ с $\Psi_l = -dp_1/dx_1$.

Решение уравнений (4.3) ищем в виде разложений

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} \psi_{22} &= \psi_{22}^{(0)}(y_2) + (-x_1)\psi_{22}^{(1)}(y_2) + \ldots \\ \psi_{23} &= (-x_1)^{1/6}[\psi_{23}^{(1/6)}(y_2) + (-x_1)\psi_{23}^{(7/6)}(y_2) + \ldots] \\ \psi_{24} &= (-x_1)^{1/2}[\psi_{24}^{(1/2)}(y_2) + (-x_1)\psi_{24}^{3/2}(y_2) + \ldots] \end{aligned}$$

по продольной координате. Как и $\psi_{21}^{(0)}$, величина $\psi_{22}^{(0)}$ выбирается произвольно, а остальные функции в правых частях (4.4) удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(4.5)\qquad \frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\frac{d\psi_{2l}^{(m)}}{dy_2} - \frac{d^2\psi_{21}^{(0)}}{dy_2^2}\psi_{2l}^{(m)} = \Psi_l^{(m)}$$

где правые части $\Psi_l^{(m)}$ вычисляются по Ψ_l из (4.3).

Как видно из первого из равенств (3.1), переменная $y_2 \to 0$, если фиксировать $y_3 \sim 1$. Наоборот, пусть $y_2 \sim 1$ считается заданной, тогда $y_3 \to \infty$. Эти соотношения показывают, каким образом надлежит сращивать решения $\psi_2(x_1, y_2)$ и $\psi_3(x_1, y_3)$ для обеих областей, на которые распадается пограничный слой. С учетом второго из равенств (3.1) формула (3.17), устанавливает, прежде всего, пределы

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} \psi_{21}^{(0)} &= \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{4\Gamma(1/6)}{315\Gamma(2/3)}b_{3/2}\lambda^{-3}y_2^{9/2} - \frac{1}{120}|b_{1/2}|^{-1}\lambda b_{5/3}y_2^5 + \ldots \\ \psi_{22}^{(0)} &= -\frac{2\Gamma(1/6)}{3\Gamma(2/3)}\operatorname{sign} b_{1/2}y_2^{3/2} + \ldots \end{aligned}$$

к которым стремятся остававшиеся произвольными функции $\psi_{21}^{(0)}$ и $\psi_{22}^{(0)}$ при $y_2 \to 0$. Первое из соотношений (4.6) показывает, что постоянная $b_{5/3} = |b_{1/2}|\lambda^{-1}B_{5/3}$ с $B_{5/3} \sim 1$. Когда $\lambda \gg 1$, второй член в его правой части становится малым по сравнению с остальными, и его можно опустить.

Регулярное слагаемое в решении уравнения Прандтля фиксируется пределом

$$(4.7)\qquad \psi_{22}^{(1)} = \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)}b_{3/2}\lambda^{-3}y_2^{3/2} + \frac{1}{2}B_{5/3}y_2^2 + \ldots$$

Собственные функции определяемого инерционными силами оператора из левой части (4.1) имеют своими пределами

$$(4.8)\qquad \psi_{23}^{(1/6)} = B_{1/2}\operatorname{sign} b_{1/2}y_2 + \ldots, \quad \psi_{23}^{(7/6)} = -B_{3/2}b_{3/2}\lambda^{-3}y_2 + \ldots$$

Наконец, предельными выражениями функций, обусловленных особенностями в градиенте давления, будут

$$\psi_{24}^{(1/2)} = (-1)\operatorname{sign} b_{1/2} + \ldots, \quad \psi_{24}^{(3/2)} = b_{3/2}\lambda^{-3} + \ldots \tag{4.9}$$

В случае $\lambda \gg 1$ первым членом в правой части (4.7) можно пренебречь и, кроме того, считать нулевыми предельные значения $\psi_{23}^{(7/6)}$ и $\psi_{24}^{(3/2)}$ при $y_2 \to 0$. Это равносильно тому, чтобы с самого начала отбросить член с $(-x_1)^{3/2}$ в формуле (3.3) для избыточного давления. Если же $b_{1/2} \ll 1$, а $\lambda \sim 1$, то все члены в предельных соотношениях (4.6)—(4.9) получаются одного порядка, что, однако, не меняет выводов для рассматриваемой области течения, которые базируются на анализе В. В. Сычева [2].

Удовлетворяющее условию (4.7) решение уравнения (4.5) гласит:

$$\psi_{22}^{(1)} = -\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\int_0^{y_2}\left(\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy}\right)^{-2}\frac{d^3\psi_{21}^{(0)}}{dy^3}\,dy \tag{4.10}$$

Интегралы уравнения (4.5), обращающиеся при $y_2 \to 0$ в линейные функции (4.8), имеют вид

$$\psi_{23}^{(1/6)} = B_{1/2}\operatorname{sign} b_{1/2}\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}, \quad \psi_{23}^{(7/6)} = -B_{3/2}b_{3/2}\lambda^{-3}\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2} \tag{4.11}$$

Решая уравнение (4.5) с предельными значениями (4.9), находим

$$\psi_{24}^{(1/2)} = \operatorname{sign} b_{1/2}\left\{\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\int_0^{y_2}\left[\left(\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy}\right)^{-2} - \frac{1}{y^2}\right]dy - \frac{1}{y_2}\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\right\} \tag{4.12}$$

$$\psi_{24}^{(3/2)} = -b_{3/2}\lambda^{-3}\left\{\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\int_0^{y_2}\left[\left(\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy}\right)^{-2} - \frac{1}{y^2}\right]dy - \frac{1}{y_2}\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}\right\}$$

Формулы (4.10)—(4.12) завершают построение поля скоростей в основной толще пограничного слоя. Следует отметить, что вводимые равенствами (4.11) величины $\psi_{23}^{(1/6)}$ и $\psi_{23}^{(7/6)}$, хотя и обусловлены наличием особенностей в распределении внешнего давления, формально являются собственными функциями оператора инерционных сил из левой части (4.1).

5. **Нелинейная область.** Обратимся к равенству (3.16) для поверхностного трения, которое показывает, что при $(-x_1) \sim |b_{1/2}|^5\lambda^{-5}$ первый поправочный член в его правой части становится порядка единицы. Этот характерный размер присущ нелинейной области, где изложенный выше анализ теряет силу. Пометим все величины в нелинейной области чертой сверху и в соответствии со сделанным замечанием нормируем продольную координату следующим образом:

$$x_1 = |b_{1/2}|^5\lambda^{-5}\bar{x} \tag{5.1}$$

В расположенном здесь вязком пристеночном слое, как вытекает из второй формулы (3.5) для автомодельной переменной ξ, поперечная координата $\bar{y} \sim (-\bar{x})^{1/3}$. В результате имеем

$$y_3 = |b_{1/2}|^{5/3}\lambda^{-5/3}\bar{y} \tag{5.2}$$

Поскольку $\bar{\psi} \sim \bar{y}^2$, то

$$\psi_3 = |b_{1/2}|^{10/3}\lambda^{-10/3}\bar{\psi} \tag{5.3}$$

К этой же оценке можно прийти, заметив, что член в правой части (3.5) с функцией $\psi_3^{(1/2)}$, игравший роль малого возмущения, становится порядка основного решения (члены $\psi_3^{(3/2)}$ и $\psi_3^{(5/2)}$ дают начало высшим приближениям). Сравнение членов с функциями $\psi_{21}^{(0)}$ и $\psi_{22}^{(0)}$ из разложения

(4.2) для основной толщи пограничного слоя подтверждает сделанное заключение.

Подставив (5.1) во вторую из формул (3.3), выводим определение

$$(5.4)\qquad p_1 = |b_{1/2}|^{5/2}\lambda^{-5/2}\bar{p}$$

избыточного давления. Теперь все переменные как независимые, так и искомые выражены в терминах параметров $|b_{1/2}|$ и λ.

Будучи отнесенным к новым переменным, уравнение Прандтля (3.2) приобретает вид

$$(5.5)\qquad \frac{\partial\bar\psi}{\partial\bar y}\frac{\partial^2\bar\psi}{\partial\bar x\,\partial\bar y}-\frac{\partial\bar\psi}{\partial\bar x}\frac{\partial^2\bar\psi}{\partial\bar y^2}=\frac{\partial^3\bar\psi}{\partial\bar y^3}-\frac{d\bar p}{d\bar x}$$

где отсутствуют члены с малыми коэффициентами. Начальные условия для него выводятся путем сращивания функции тока $\bar\psi(\bar x, \bar y)$ с $\psi_3(x_1, y_3)$ и давления $\bar p(\bar x)$ с $p_1(x_1)$. Поскольку автомодельная переменная $\xi = (-\bar x)^{-1/3}\bar y$ сохраняется инвариантной по отношению к аффинному преобразованию (5.1), (5.2), то требования

$$(5.6)\qquad \bar\psi\to {}^1/_2\bar y^2+(-\bar x)^{1/2}f_3^{(1/2)}(\xi)+\ldots,\quad \bar p\to-\operatorname{sign} b_{1/2}(-\bar x)^{1/2}+\ldots$$

выставляемые при $\bar x\to-\infty$, $\xi=\text{const}$, совпадают с теми, которые получаются на входе пограничного слоя, свободно взаимодействующего с внешним потенциальным потоком [2, 8, 9].

Чтобы сформулировать краевые условия для уравнения (5.5) при $\bar y\to\infty$, необходимо построить решение для основной толщи пограничного слоя в нелинейной области. В переменных $\bar x$, y_2, ψ_2 уравнение (4.1) гласит:

$$(5.7)\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\bar x\,\partial y_2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial\bar x}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y_2^2}=|b_{1/2}|^6\lambda^{-6}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial y_2^3}-|b_{1/2}|^4\lambda^{-4}\frac{d\bar p}{d\bar x}$$

а потому для его интегрирования можно использовать асимптотическое разложение по степеням $|b_{1/2}|/\lambda$. Сращивание с функцией тока (4.2) показывает, что в искомом разложении должны содержаться линейные и квадратичные члены. Повторяя с учетом этого замечания рассуждения п. 4, находим

$$(5.8)\qquad \psi_2=\psi_{21}^{(0)}(y_2)+|b_{1/2}|\lambda^{-1}\psi_{22}^{(0)}(y_2)+|b_{1/2}|^2\lambda^{-2}A(\bar x)\frac{d\psi_{21}^{(0)}}{dy_2}+\ldots$$

Член с толщиной вытеснения A представляет собственную функцию определяемого инерционными силами оператора из левой части (5.7). В выборе A остается произвол, за тем исключением, что $A\to B_{1/2}\operatorname{sign} b_{1/2}\times(-\bar x)^{1/6}$ при $\bar x\to-\infty$.

Сращивание нормированной соотношением (5.3) функции тока $\bar\psi(\bar x, \bar y)$ с решением (5.8) для $\psi_2(\bar x, y_2)$ ведет к условию

$$(5.9)\qquad \bar\psi\to\frac{1}{2}\bar y^2-\frac{2\Gamma(^1/_6)}{3\Gamma(^2/_3)}\operatorname{sign} b_{1/2}\,\bar y^{3/2}+A(\bar x)\bar y+\ldots\quad\text{при } \bar y\to\infty$$

которое повторяет возникающее на краю вязкого пристеночного слоя в области свободного взаимодействия [2, 8, 9].

Остается рассмотреть внешнее потенциальное движение жидкости, где поперечная координата y_e имеет одинаковый по порядку величины размер с продольной. Так как $s=|b_{1/2}|^6\lambda^{-8}\bar x$ в силу (5.1), то и $n=|b_{1/2}|^6\lambda^{-8}y_e$. Вместо функции тока здесь удобно оперировать непосредственно с составляющими $u'=|b_{1/2}|^4\lambda^{-4}u_e$ и $v'=|b_{1/2}|^4\lambda^{-4}v_e$ вектора возмущенной скорости. Полный анализ потенциального движения выходит за рамки настоящей работы; для поставленных в ней целей достаточно привести условие

$$(5.10)\quad v_e = -K dA/d\bar{x} \text{ при } y_e = 0, \quad K = R^{-1/2} \mid b_{1/2} \mid^{-8} \lambda^9$$

вытекающее из сращивания с полем скоростей в основной толще пограничного слоя.

Постоянная K является параметром подобия, определяющим режим течения. При $K \ll 1$ для комплексной скорости получается задача обтекания исходного тела, поскольку $v_e(\bar{x}, 0) = 0$ в первом приближении согласно (5.10). Избыточное давление находится тогда по своему предельному значению на бесконечности. Таким образом, $\bar{p} = -\operatorname{sign} b_{1/2}(-\bar{x})^{1/2} + + \ldots$, в то время как толщина вытеснения $A(\bar{x})$ в граничном условии (5.9) остается неизвестной. Она определяется в ходе интегрирования уравнения (5.5), которое начинается при $\bar{x} \to -\infty$ с начального распределения для функции тока, предписываемого первой из формул (5.6).

Пусть теперь $K \sim 1$. Это режим свободного взаимодействия пограничного слоя [2, 8, 9]. Так как функция A в (5.10) не известна заранее, то вводимое посредством (5.4) самоиндуцированное давление $\bar{p}$ принадлежит к числу искомых функций с сингулярным поведением при $\bar{x} \to -\infty$. Соотношение $K \sim 1$ фиксирует связь основных параметров $\mid b_{1/2} \mid$ и λ, задающих градиент давления и характерное поверхностное трение в пограничном слое соответственно, с числом Рейнольдса R. При $\lambda \sim 1$ коэффициент $\mid b_{1/2} \mid \sim R^{-1/16} \ll 1$, что повторяет результат из [2] для потока у гладкого тела. Если же $\mid b_{1/2} \mid \sim 1$, то $\lambda \sim R^{1/18} \gg 1$ с последующими оценками размеров $-s = \mid b_{1/2} \mid^6 \lambda^{-8}(-\bar{x}) \sim R^{-4/9}$, $n = R^{-1/2} \mid b_{1/2} \mid^2 \times \times \lambda^{-3} \bar{y} \sim R^{-2/3}$ пристеночного слоя в области свободного взаимодействия, которые были получены в [10] согласно предложенному ранее описанию поля предотрывного течения [11]. Простой анализ решения из [11] показывает, что поверхностное трение τ_w в нем подчиняется зависимости $K \sim 1$, если заменить λ на τ_w.

Отметим в заключение, что смена знака у коэффициента $b_{1/2}$ с положительного на отрицательный при $|b_{1/2}| \sim R^{-1/16}$ и $\lambda \sim 1$ характеризует переход от рассмотренных в [2] течений с отрывом от плохо обтекаемых тел к струйным течениям, в которых свободные линии тока исходят из концов дужек или угловых точек тела с изломами образующей. Когда $b_{1/2} > 0$, точки Бриллюэна — Вилля все еще располагаются на поверхности дужек с концевыми участками, погруженными в застойную зону. Укорачивание дужек ведет к уменьшению $b_{1/2}$, однако случай $b_{1/2} \ll R^{-1/16}$ нуждается в специальном анализе. Если же $b_{1/2} < 0$, точек Бриллюэна — Вилля на обтекаемых дужках не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Incompressible aerodynamics. Ed. B. Thwaites. Oxford: Clarendon Press, 1960. 636 p.
2. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47—59.
3. *Messiter A. F.*, *Enlow R. L.* A model for laminar boundary layer flow near a separation point.— SIAM J. Appl. Math., 1973, v. 25, No. 4, p. 655—670.
4. *Messiter A. F.* Laminar separation — a local asymptotic flow description for constant pressure downstream.— In: Flow separation, AGARD CP-168, 1975, p. 4—1—4—10.
5. *Messiter A. F.* Boundary-layer separation.— In: Proc. 8th U. S. Nath. Congr. Appl. Mech. Los Angeles, Univ. of Calif., 1978. North Hollywood: West. Period., 1979, p. 157—179.

6. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
7. Higher transcendental functions. V. 1. Ed. by Erdélyi. N. Y.: McGraw-Hill, 1953. 302 p.
8. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53—57.
9. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. A, 1969, v. 312, No. 1509, p. 181—206.
10. *Рубан А. И.* О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 44—54.
11. *Ackerberg R. C.* Boundary-layer seperation at a free streamline. Pt 1. Two-dimensional flow.— J. Fluid Mech., 1970, v. 44, pt 2, p. 211—225.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1985