

УДК 532.5 : 534.1

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВЗРЫВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Лихачев В. Н.

Методом асимптотических разложений решается задача о распространении взрывной ударной волны в слабосжимаемой вязкой среде при малых числах Рейнольдса. Исследуется влияние нелинейных членов в главном приближении, определяется закон затухания амплитуды волны и ее профиль.

1. Постановка задачи. Система уравнений, описывающая сферически-симметричное движение сжимаемой вязкой жидкости, имеет вид [1]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \\ &+ \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\zeta + \frac{4}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{2}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{2\bar{u}}{\bar{x}^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{2\bar{u}}{\bar{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{\bar{\rho} \bar{T}} \left\{ \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{2\bar{u}}{\bar{x}} \right)^2 + \right. \\ &+ 2\mu \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{2\bar{u}^2}{\bar{x}^2} \right] + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{x}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

где черта относится к размерным величинам, \bar{s} , \bar{T} — энтропия, приходящаяся на единицу массы, и температура, ζ , μ , $\bar{\kappa}$ — коэффициенты сдвиговой, объемной вязкости и теплопроводности. Задание внутренней энергии как функции $\bar{\rho}$ и \bar{s} позволяет найти зависимости \bar{p} ($\bar{\rho}$, \bar{s}) и \bar{T} ($\bar{\rho}$, \bar{s}). Этими соотношениями замыкается система (1.1).

Воздействие продуктов взрыва на жидкость моделируется поршнем, движущимся по закону $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$, причем $\bar{\varphi}(0) = \bar{x}_0$, $\bar{\varphi}'(0) = \bar{U}_0$ (\bar{U}_0 — начальная скорость удара).

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\bar{p}}{\rho_0 \bar{U}_0^2}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0}, \quad t = \frac{\bar{t} \bar{U}_0}{\bar{x}_0}, \quad T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}, \\ s &= \frac{\bar{s} \bar{T}_0}{\bar{U}_0^2} \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}_0$, \bar{T}_0 — плотность и температура невозмущенной среды.

Среда считается слабосжимаемой. Введем малый параметр $\varepsilon = (\partial \sigma / \partial \rho)_s^{-1}$ в невозмущенной среде и будем решать задачу в диапазоне параметров, обеспечивающих малые возмущения плотности: $\rho = 1 + \varepsilon p$. Для невязкого течения p совпадает в главном приближении с безразмерным давлением [2].

Далее будем искать главный член разложения решения по малому параметру ε . Отбрасывая в (1.1) члены, заведомо учитывающиеся в последующих приближениях, получим систему

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} + \alpha^0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2u}{x^2} \right)$$

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{T} \left\{ \alpha_1^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} \right)^2 + \alpha_2^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2u^2}{x^2} \right] + \right.$$

$$\left. + \kappa \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\}$$

$$\alpha_1^0 = \frac{3\zeta - 2\mu}{3\bar{\rho}_0 U_0 \bar{x}_0}, \quad \alpha_2^0 = \frac{2\mu}{\bar{\rho}_0 U_0 \bar{x}_0}, \quad \alpha^0 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0, \quad \kappa = \frac{\bar{\kappa} T_0}{\bar{\rho}_0 U_0^3}$$

Начальные условия однородные, краевое условие: $x = \varphi(t)$, $u = \varphi'(t)$.

Поскольку рассматриваются малые возмущения плотности, сделаем ряд замечаний, касающихся акустического подхода к данной задаче, развитого в работе [3], где исследована эволюция уже сформировавшегося импульса с учетом нелинейности, неравновесности и диссипации, включающей совместное действие вязкости и теплопроводности. Начальный профиль ударной волны (УВ) взят из эксперимента в виде известной экспоненциальной зависимости [4]. Кроме того, сделано предположение о равенстве нулю одного из инвариантов Римана: $\bar{p} - \bar{c}_0 \bar{\rho}_0 \bar{u} = 0$ (\bar{c}_0 — скорость звука в невозмущенной среде). Основанием для такого подхода служит небольшое влияние вязкости на длинах порядка ширины волны, т. е. невязкое течение уточняется для больших чисел Рейнольдса, что существенно на больших расстояниях.

При выводе основного уравнения, используемого в нелинейной акустике, предполагается следующее [5]: 1) малость возмущений для всех параметров, в частности энтропия, изменяется лишь за счет теплопроводности (нелинейные члены в последнем из уравнений (1.2) отбрасываются); 2) используется специальный вид уравнения состояния; 3) принимается, что $\bar{p} = \bar{\rho}_0 \bar{c}_0 \bar{u}$. Эти предположения позволяют свести систему (1.2) к одному уравнению.

Было показано [2], что для невязкой среды третье условие не выполняется в ряде зон, в частности в зоне малых времен, когда формируется профиль УВ. Показано также [2], что аналитическое решение сформулированной выше задачи при отсутствии вязкости и теплопроводности дает в точности экспоненциальный профиль, а третье условие в зоне УВ выполнено. Нелинейные эффекты исследованы в работах [6, 7]. Третье условие выполняется для невязкого течения всюду лишь в случае плоской симметрии как для безударного движения поршня [8], так и при наличии УВ [2].

Таким образом, акустический подход оправдан для узкой зоны около УВ, где градиент возмущений намного больше, чем в остальной зоне, и не дает решения задачи о формировании профиля УВ, а также в зоне около поршня. В данной работе не делается ни одно из трех предположений, более того, все они оказываются несправедливыми в некоторых областях.

Последнее замечание касается диапазона применимости теории. Известно, что при выходе детонационной волны на контактную поверхность давление в жидкости зависит не от абсолютных размеров заряда, а только от скорости детонации, т. е. от мощности взрывчатого вещества (ВВ) [9]. Поэтому диапазон применимости асимптотической и акустической теорий определяется не абсолютными размерами заряда, а мощностью ВВ. Как показывает аналитическое решение [2, 10], профили сферических УВ для невязкой и нетеплопроводной среды подобны при различных абсолютных размерах для одинаковых ВВ. Конденсированные ВВ типа тротила дают на границе раздела с водой давления порядка десятков тысяч атмосфер, при которых предположение о слабой сжимаемости оказывается несправедливым.

Ниже рассматривается случай, когда вязкость оказывается существенной в главном приближении. Это будет при

$$\alpha_1^0 = \alpha_1 \varepsilon^{-1/2}, \quad \alpha_2^0 = \alpha_2 \varepsilon^{-1/2}, \quad \alpha^0 = \alpha \varepsilon^{-1/2}, \quad \alpha_i, \alpha \sim 1$$

2. Решение в зоне малых времен. Зона малых времен определяется масштабами переменных: $x \sim 1$, $t = \tau \varepsilon^{1/2} \sim \varepsilon^{1/2}$, $p = p^0 \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}$, $u \sim 1$, $s \sim 1$, $T \sim 1$.

В главном приближении получается система уравнений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\frac{\partial p^0}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2u}{x^2} \right) \\ \frac{\partial p^0}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} &= \frac{1}{T} \left\{ \alpha_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x} \right)^2 + \alpha_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2u^2}{x^2} \right] \right\} \\ T(\rho, s) &= T(1 + \varepsilon^{1/2} p^0, s) = T(1, s) = T(s) \end{aligned}$$

Начальные условия нулевые, краевое условие: $\varphi(\tau \varepsilon^{1/2}) = 1$, $U(\tau \varepsilon^{1/2}) = 1$, т. е. $u(1, \tau) = 1$.

Первые два уравнения решаются независимо от третьего, затем находится энтропия.

Делаем преобразование Лапласа

$$V(x, a) = \int_0^{\infty} u(\tau, x) e^{-\tau a} d\tau, \quad P(x, a) = \int_0^{\infty} p^0(\tau, x) e^{-\tau a} d\tau$$

Из системы (2.1) с учетом начальных условий, условия затухания решения при $x \rightarrow +\infty$, $\text{Real } a > 0$ и краевого условия найдем V , затем из второго уравнения системы (2.1) получим P .

Обозначая $\theta = \alpha a$ и делая обратное преобразование Лапласа, получим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi i x} \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{\alpha \sqrt{1+\theta}}{xa} \right) f_1(\theta, x, \tau, \alpha) d\theta \\ p &= p^0 \varepsilon^{-1/2} = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2\pi i x} \int_{\Gamma} \frac{f_1(\theta, x, \tau, \alpha) d\theta}{\sqrt{1+\theta}}, \quad f_1 = \\ &= \frac{1}{\theta + \alpha \sqrt{1+\theta}} \exp \left[\frac{\theta}{\alpha} \left(\tau - \frac{x-1}{\sqrt{1+\theta}} \right) \right] \end{aligned}$$

где Γ — некоторый вертикальный контур в комплексной плоскости $\theta = \theta_0^1 + i\theta_0^2$, расположенный правее всех особых точек подынтегральной функции. Укажем ветвь корня, входящего в (2.2): решение при $x \rightarrow +\infty$ будет затухающим, если ветвь корня определить разрезом по полуоси $\theta_0^2 = 0$, $-\infty < \theta_0^1 < -1$ и условием $\arg(1 + \theta_0^1 + i\infty) = \pi/2$.

Формально построенное решение (2.2) удовлетворяет уравнениям, краевому и начальным условиям.

Можно проверить, что если выражения для p^0 , u допускают дифференцирование под знаком интеграла нужное количество раз, то они удовлетворяют системе (2.1) Равномерная сходимость всех интегралов, встречающихся при проверке условий при $t \geq 0$, $x \geq 1 + \Delta$ ($\Delta > 0$), обеспечивающая, в частности, возможность дифференцирования под знаком интеграла, следует из оценки

$$\left| \exp \left[-\frac{\theta}{\alpha} \left(\tau - \frac{x-1}{\sqrt{1+\theta}} \right) \right] \right| \leq A_1 \exp \left(\frac{1-x}{\alpha \sqrt{\theta_0^2}} \right)$$

где A_1 не зависит от x, τ .

Проверим выполнение краевого условия для скорости. В силу равномерной сходимости интеграла

$$u(1, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\theta} \exp \left[\frac{\theta}{\alpha} \left(\tau - \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \right) \right] d\theta = 1$$

Проверим выполнение начальных условий. В силу равномерной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\tau \rightarrow 0$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\theta} \exp \left[-\frac{\theta(x-1)}{\alpha \sqrt{1+\theta}} \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{M \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\theta} \exp \left[-\frac{\theta(x-1)}{\alpha \sqrt{1+\theta}} \right] d\theta$$

(контур Γ_1 : $\{\theta = Me^{i\psi}, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$ изображен на фиг. 1).

Для интеграла вдоль Γ_1 получаем оценку

$$\left| \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\theta} \exp \left[-\frac{\theta(x-1)}{\alpha \sqrt{1+\theta}} \right] d\theta \right| < 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \left[-\frac{\sqrt{M}(x-1)}{\alpha} \cos \frac{\psi}{2} \right] d\psi \ll \\ \ll 2\pi \exp \left[-\frac{\sqrt{M}(x-1)}{\alpha \sqrt{2}} \right]$$

так как $\cos \psi/2 \geq 1/\sqrt{2}$. При $x > 1$, $M \rightarrow +\infty$ получим $u(x, 0) = 0$ (при $x = 1$, $t = 0$ разрыв). Для давления начальное условие проверяется аналогично.

Заметим, что в такой же постановке в зоне малых времен для случая цилиндрической симметрии для невязкой среды обратное преобразование Лапласа приводит к расходящимся интегралам (даже в смысле главного значения).

2. Построение решения при $t \sim 1$.

Масштабы переменных в зоне около поршня: $x \sim 1$, $u \sim 1$. Уравнение неразрывности в главном приближении дает несжимаемую жидкость, для скорости получим $u = C(t)/x^2$, $C(t) = \varphi'(t)\varphi^2(t)$. В зависимости от свойств среды, т. е. от функций $\sigma(\rho, s)$, $T(\rho, s)$, могут меняться главные члены в уравнениях движения и энергии.

Пусть выполняются условия $\partial\sigma/\partial s \sim 1$, $\partial T/\partial s \sim 1$. Отсчитывая энтропию от энтропии невозмущенного состояния, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{6\alpha_2}{x^5} \varepsilon^{-1/2} C^2(t) + \frac{\kappa}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 \frac{\partial T(G)}{\partial x} \right], \\ G(s) = \int_0^s T(s) ds$$

Отсюда видно, что $G = G^i \varepsilon^{-1/2}$, $G^i \sim 1$. Получим в главном приближении

$$(3.1) \quad \frac{\partial G^i}{\partial t} + u \frac{\partial G^i}{\partial x} = 6\alpha_2 \frac{C^2}{x^5} + \frac{\kappa}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 \frac{\partial T}{\partial G} \frac{\partial G^i}{\partial x} \right]$$

В уравнении движения вязкий член обращается в нуль. Учитывая, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x}$$

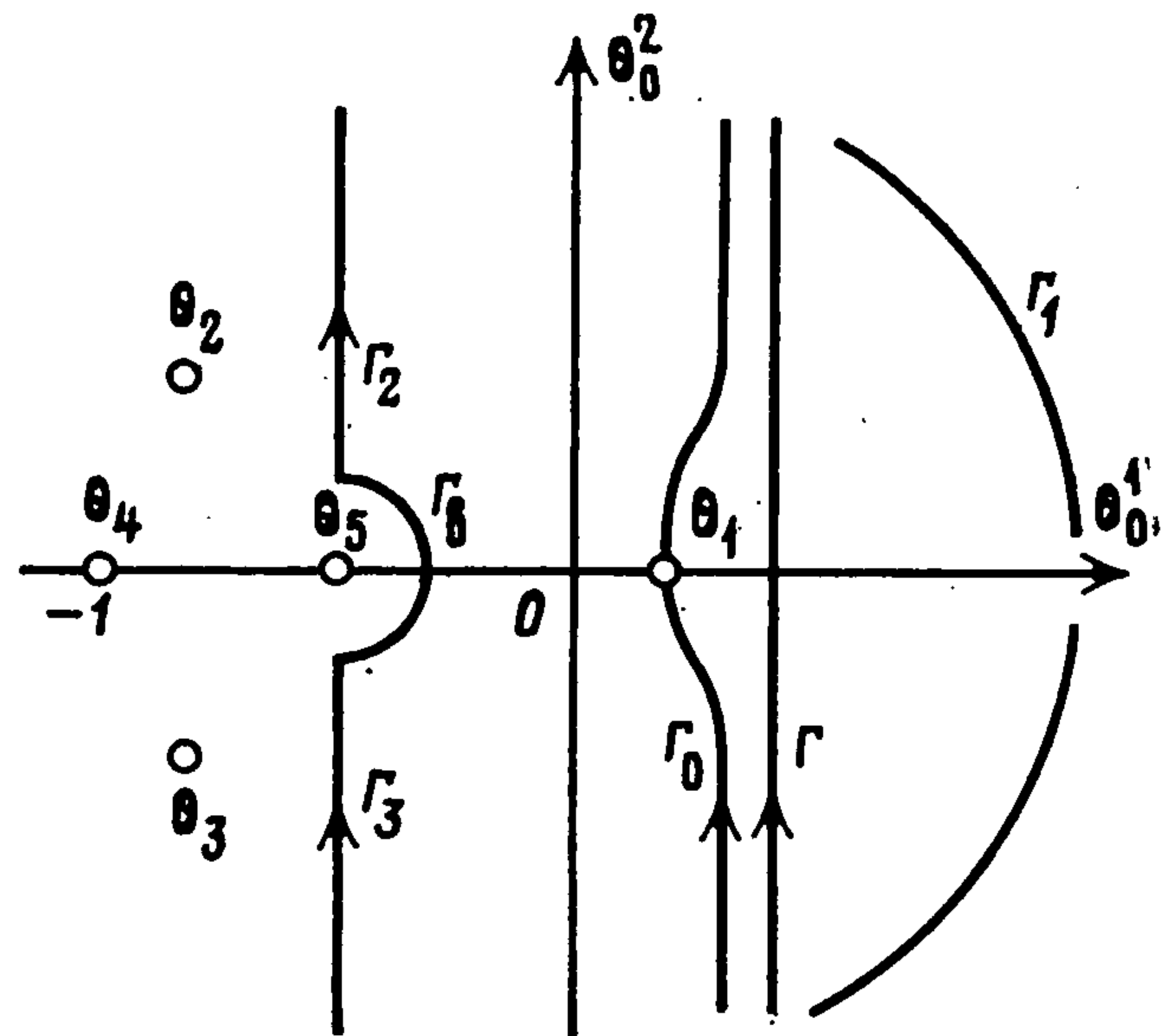
получим $p = p^i \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}$. В результате имеем

$$(3.2) \quad \frac{\partial p^i}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)_\rho \left(\frac{\partial s}{\partial G} \right)_\rho \frac{\partial G^i}{\partial x} = 0$$

Давление растет за счет изменения энтропии. Интегрируя уравнение (3.2), получим

$$(3.3) \quad p = p^i \varepsilon^{-1/2} = - \int \frac{\partial \sigma(G)}{\partial G} dG = -\sigma(1, G) + g(t)$$

Функция $g(t)$ будет найдена из сращивания с разложением, описывающим решение в следующей зоне.



Фиг. 1

Решение уравнения (3.1) при $\kappa = 0$ может быть легко получено методом характеристик в параметрическом виде

$$(3.4) \quad x = [\varphi^3(t) + n]^{1/3}, \quad G^i = 6\alpha_2 \int_0^t \frac{C^2(t_1) dt_1}{[\varphi^3(t_1) + n]^2}, \quad 0 \leq n < \infty$$

Построим решение в условно называемой волновой зоне, определяемой следующими масштабами переменных: $t \sim 1$, $x = x_e \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{-1/2}$, $p = p_e \varepsilon^{-1/2} \sim \varepsilon^{1/2}$, $u = u_e \varepsilon \sim \varepsilon$, $s = s_e \varepsilon^{1/2} \sim \varepsilon^{1/2}$, $T \sim 1$. В главном приближении система (1.2) примет вид

$$(3.5) \quad \frac{\partial u_e}{\partial t} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_e}, \quad \frac{\partial p_e}{\partial t} + \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \frac{2u_e}{x_e} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{T} \left\{ \alpha_1 \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \frac{2u_e}{x_e} \right)^2 + \alpha_2 \left[\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \right)^2 \frac{2u_e^2}{x_e^2} \right] \right\}$$

Система разделяется, энтропия растет слабо за счет вязкости. Общее решение системы (3.5) имеет вид

$$(3.6) \quad p_e = \frac{F_1'(-x_e + t)}{x_e} + \frac{F_2'(x_e + t)}{x_e}$$

$$u_e = \frac{F_1(-x_e + t)}{x_e^2} + \frac{F_2(x_e + t)}{x_e^2} + \frac{F_1'(-x_e + t)}{x_e} - \frac{F_2'(x_e + t)}{x_e}$$

В зоне около прямой $x - 1 = t\varepsilon^{-1/2}$ это решение не срачивается с решением для малых времен. Поэтому там надо искать другое разложение. Произвольные функции в (3.6) могут быть найдены только из срачивания, что заменяет краевые условия для системы (3.5).

Построим решение в зоне, определяемой масштабами: $\xi = \varepsilon^{1/4} (x - t\varepsilon^{-1/2} - 1) \sim 1$, $t \sim 1$, $p = \delta p_v \sim \delta$, $u = \varepsilon^{1/2} \delta u_v \sim \varepsilon^{1/2} \delta$, $x\varepsilon^{1/2}/t \approx 1$, $x_e = x\varepsilon^{1/2} \sim 1$ (ord $\delta \leq \text{ord } 1$). Система в главном приближении в новых координатах имеет вид (члены второго порядка малости необходимо сохранить для правильного нахождения главного приближения)

$$(3.7) \quad -\frac{\partial u_v}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4} + \frac{\partial u_v}{\partial t} \varepsilon^{1/2} = -\frac{\partial p_v}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4} + \alpha \varepsilon^{1/4} \frac{\partial^2 u_v}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial s}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4}$$

$$-\frac{\partial p_v}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4} + \frac{\partial p_v}{\partial t} \varepsilon^{1/2} + \frac{\partial u_v}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4} + \frac{2u_v}{t} \varepsilon^{1/2} = 0$$

$$-\frac{\partial s}{\partial \xi} \varepsilon^{1/4} + \frac{\partial s}{\partial t} \varepsilon^{1/2} = \frac{\alpha \delta^2}{T} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_v}{\partial \xi} \right)^2$$

Из последнего уравнения (3.7) видно, что $s \sim \varepsilon^{3/2} \delta^2$, т. е. энтропийный член в первом уравнении (3.7) должен быть отброшен в главном приближении, а энтропия в зоне ударной волны растет лишь за счет вязкости.

Главные части первого и второго уравнений (3.7) совпадают. Вычитая первое уравнение (3.7) из второго, получим в главном приближении

$$(3.8) \quad \frac{\partial u_v}{\partial \xi} = \frac{\partial p_v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u_v}{\partial t} + \frac{\partial p_v}{\partial t} + \frac{2u_v}{t} = \alpha \frac{\partial^2 u_v}{\partial \xi^2}$$

Рассматриваемая зона уходит в бесконечность, где $p_v = u_v = 0$. Следовательно, из первого уравнения (3.8) следует равенство нулю соответствующего акустического инварианта Римана: $u_v - p_v = 0$.

С учетом этого второе уравнение приводится к обычному уравнению теплопроводности для функции $u_v t$. Среди всех его решений с решением для зоны малых времен будет срачиваться только фундаментальное реше-

ние

$$(3.9) \quad u_v t = p_v t = \frac{N}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2t\alpha}\right)$$

Постоянные δ , N будут найдены из срачивания.

4. Нахождение промежуточных асимптотик и срачивание. Промежуточная зона между $t \sim \varepsilon^{1/2}$ и $t \sim 1$ может быть определена при помощи растянутого времени $t_* = t\varepsilon^{1/4} \sim 1$, т. е. характеризуется временами $t \sim \varepsilon^{1/4}$.

Найдем промежуточную асимптотику для давления в начальной зоне. В промежуточной зоне

$$(4.1) \quad p = p^0 \varepsilon^{-1/2} = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2\pi i x} \int_{\Gamma} \frac{\exp(\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta, \lambda))}{\sqrt{1+\theta} (\theta + \alpha \sqrt{1+\theta})} d\theta$$

$$f(\theta, \lambda) = \theta \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\theta}}\right), \quad \lambda = \frac{x-1}{\tau}$$

Асимптотика выражения (4.1) может быть найдена методом перевала при фиксированном λ . Точки перевала находятся из условия $\partial f/\partial \theta = 0$, что дает кубическое уравнение, и по формулам Кардано находим

$$\theta_1 = -1 + \frac{\lambda^2}{12} + D_1 + D_2, \quad \theta_{2,3} = -1 + \frac{\lambda^2}{12} - \frac{D_1 + D_2}{2} \pm$$

$$\pm i \frac{D_1 - D_2}{2} \sqrt{3}$$

$$D_1 = (-q/2 - Q)^{1/3}, \quad D_2 = (-q/2 + Q)^{1/3}$$

$$q = -\frac{\lambda^2}{1728} (\lambda^4 + 36\lambda^2 + 216), \quad Q = \frac{\lambda^2}{24} \sqrt{9 + \lambda^2/3}$$

Первая особая точка подынтегральной функции $\theta_4 = -1$, вторая определяется из условия $-\theta/\alpha = \sqrt{1+\theta}$. Возведя в квадрат обе части, получим квадратное уравнение для θ . Учитывая описанный выше выбор ветви корня $\sqrt{1+\theta}$, отбросим один из корней. В результате найдем вторую особую точку: $\theta_5 = (\alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4})/2 < 0$.

Взаимное расположение точек перевала и особых точек изображено на фиг. 1. Имеем: $\theta_1, \theta_5, \theta_4$ действительны, θ_2 и θ_3 комплексно сопряжены, можно показать, что $-q/2 - Q \geq 0$, $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, $D_1 \leq D_2$, $\text{Real } \theta_1 \geq \geq \text{Real } \theta_{2,3}$, точка θ_4 лежит левее всех остальных точек.

При нахождении асимптотик в данной задаче можно ограничиться прохождением одной лишь точки θ_1 , не проходя через θ_2 и θ_3 , деформированный контур Γ_0 изображен на фиг. 1. Перевальное направление в точке θ_1 определяется через величину

$$k(\lambda) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)_{\lambda} \Big|_{\theta_1} = \frac{(4 + \theta_1) \lambda}{4(1 + \theta_1)^{3/2}}$$

Очевидно, что $k(\lambda) \geq 0$, поэтому перевальное направление в точке θ_1 вертикально.

В зависимости от λ может выполняться одно из условий: $\theta_1 > \theta_5$, $\theta_1 < \theta_5$, $\theta_1 = \theta_5$. В первом случае в асимптотику дает вклад лишь точка перевала:

$$(4.2) \quad p_* = \frac{\varepsilon^{-3/8}}{x} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi k(\lambda) t_*}} \frac{\exp[\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta_1(\lambda))]}{\sqrt{1+\theta_1} (\theta_1 + \alpha \sqrt{1+\theta_1})}$$

Во втором случае контур при деформировании замечает особую точку θ_5 и к правой части (4.2) надо добавить вычет в этой точке, равный

$$\text{res}(\theta_5) = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{x} \frac{\exp[\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta_5)]}{\sqrt{1+\theta_5} g(\theta_5)}, \quad g(\theta) = \frac{2\theta - \alpha^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2(\theta - \alpha \sqrt{1+\theta})}$$

В третьем случае происходит полное слияние точки перевала с полюсом подынтегральной функции. Это соответствует некоторому λ_0 . Чтобы найти асимптотику в этом случае, надо деформировать контур Γ_0 , заменив его на контур $\Gamma_3 + \Gamma_b + \Gamma_2$ (см. фиг. 1), где $\Gamma_2: \{\theta = \theta_5 + i\theta_0^2, b \leq \theta_0^2 < \infty\}$, $\Gamma_3: \{\theta = \theta_5 + i\theta_0^2, -\infty < \theta_0^2 \leq -b\}$, $\Gamma_b: \{\theta = \theta_5 + be^{i\psi}, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$, $b \ll \varepsilon^{1/4}$.

Можно показать, используя принцип локализации для интегралов рассматриваемого типа [11] и стремя $b \rightarrow 0$, что асимптотика интеграла (4.1) будет равна

$$(4.3) \quad p_* = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2x \sqrt{1 + \theta_5 g(\theta_5)}} \exp[\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta_5)]$$

Найдем асимптотику в окрестности λ_0 . Воспользуемся результатами работы [11] для случая, когда точка перевала близка к полюсу. Получим

$$(4.4) \quad p_* = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{2x} \frac{\exp[\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta_5)]}{\sqrt{1 + \theta_5 g(\theta_5)}} \exp\left\{[\theta_1(\lambda) - \theta_5]^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{t_* k(\theta_5) \varepsilon^{-1/4}}{2\alpha}\right\} \left\{1 - \operatorname{erf}\left[(\theta_1(\lambda) - \theta_5) \sqrt{\frac{t_* k(\theta_5) \varepsilon^{-1/4}}{2\alpha}}\right]\right\}$$

Покажем, что (4.4) дает всюду пригодную при $\theta_1 \geq \theta_5$ асимптотику для давления, если вместо $\theta_1(\lambda_0) = \theta_5$ поставить $\theta_1(\lambda)$.

Используя асимптотику $(1 - \operatorname{erf} z) e^{z^2} \sim z^{-1} \sqrt{\pi}$ при $z \gg 1$, перепишем (4.4) в виде

$$(4.5) \quad p_* = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{x \sqrt{\pi}} \frac{\exp[\varepsilon^{-1/4} \alpha^{-1} t_* f(\theta_1(\lambda))]}{\sqrt{1 + \theta_1 g(\theta_1)}} \times \\ \times \int_0^\infty \exp\left\{-\tau \left[\tau + (\theta_1(\lambda) - \theta_5) \sqrt{\frac{t_* k(\lambda) \varepsilon^{-1/4}}{2\alpha}}\right]\right\} d\tau$$

При $\theta_1 > \theta_5$ формула (4.5) перейдет в формулу (4.2). При $\theta_1 = \theta_5$ интеграл в (4.5) считается и получается асимптотика (4.3). При $\theta_1 < \theta_5$ выражение (4.5) дает ту же асимптотику (4.2) без учета вычета. Однако в этом случае вклад точки перевала мал по сравнению с вкладом полюса. Действительно, можно показать, что функция $\theta_1(\lambda)$ возрастающая, причем в точке перевала $\theta_1(\lambda)$ имеем

$$\frac{d\theta_1(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\theta_1(\lambda)}{\sqrt{1 + \theta_1(\lambda)}}$$

Отсюда ясно, что $\theta_1 = 0$ — точка максимума функции $f(\theta_1(\lambda), \lambda)$, а при $\theta_1 < \theta_5 < 0$ эта функция возрастающая и $f(\theta_1, \lambda) < f(\theta_5, \lambda_0)$. Поэтому вклад точки перевала мал.

Функция $f(\theta_1, \lambda(\theta_1)) < 0$ при всех $\theta_1 \neq 0$, $f(0, \lambda(0)) = 0$, $\lambda(0) = 1$. Поэтому в промежуточной зоне асимптотика давления p^0 будет всюду экспоненциально малой, за исключением зоны около $\lambda = 1$. Эта зона соответствует $\theta_1 > \theta_5$, т. е. асимптотике (4.2), откуда видно, что зона неэкспоненциально малых значений p_* определяется условием $f(\theta_1(\lambda), \lambda) \sim \sim \varepsilon^{1/4}$. В этой зоне справедливо разложение $\theta_1(\lambda) = \lambda - 1 + \dots$, $f = -(\lambda^2 - 1)/2 + \dots$. Окончательно в зоне около $\lambda = 1$ получаем асимптотику давления (2.2) в виде

$$p_* = \frac{\varepsilon^{-1/8} t_*^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left\{\frac{-[(x-1)\varepsilon^{1/4} - t_*]^2}{2\alpha t_* \varepsilon^{1/4}}\right\}$$

Отсюда видно, что сращивание давлений (3.9) и (2.2) имеет место при $\delta = \varepsilon^{1/4}$, $N = 1/\sqrt{2\pi\alpha}$. Можно показать, что сращивание скоростей (3.9) и (2.2) дает тот же результат.

Срачивание (3.9) и (3.6) дает условие $p_e = u_e$ при $x_e = t$. Отсюда $F_2 \equiv 0$. Срачивание скорости (3.6) и скорости около поршня $u = C/x^2$ дает, что $F_1(t) = C(t)$.

Для определения $g(t)$ в (3.3) срастим давление (3.3) и найденное давление (3.6). Промежуточные координаты: $t \sim 1$, $x = x_* \varepsilon^{-1/4} \sim \varepsilon^{-1/4}$. Из (3.4) (для $\kappa = 0$) получаем в главном приближении: $n \sim \varepsilon^{-3/4}$, $G \sim \varepsilon$. Асимптотика давления (3.3) будет

$$p_* = \varepsilon^{-1/2}[g(t) - \sigma], \quad \sigma(1, G) \sim G \sim \varepsilon.$$

Асимптотика давления (3.6): $p_* = \varepsilon^{1/4} C'(t)/x_*$. Отсюда следует, что $g(t) = 0$. Для проведения срачивания при $\kappa \neq 0$ необходимо исследовать свойства решения уравнения (3.1).

Выпишем составные разложения, пригодные всюду при $t \sim 1$:

$$u = \frac{C(-x\varepsilon^{1/2} + t)}{x^2} + \frac{C'(-x\varepsilon^{1/2} + t)}{x} + \\ + \frac{\varepsilon^{1/4} t^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[\frac{-(x-1-t\varepsilon^{-1/2})^2 \varepsilon^{1/2}}{2t\alpha}\right] \\ p = \frac{C'(-x\varepsilon^{1/2} + t)}{x} - G + \frac{\varepsilon^{-1/4} t^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[\frac{-(x-1+t\varepsilon^{-1/2})^2 \varepsilon^{1/2}}{2t\alpha}\right]$$

Давление $\sigma = \sigma(1 + \varepsilon p, s)$.

5. **Определение динамических характеристик течения на поршне.** Полученное решение позволяет найти простые зависимости давления и напряжений от времени на поршне при $t \sim \varepsilon^{1/2}$. Учитывая, что в рассматриваемой среде внутренняя энергия зависит от энтропии слабо при $s \sim 1$, можно в главном приближении положить в начальной зоне $\sigma = p$. При $x = 1$ интегралы в (2.2) вычисляются с помощью вычетов. Для давления σ , радиальной и угловой компонент тензора напряжений на поршне получим

$$\sigma = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\sqrt{1 + \theta_5} g(\theta_5)} e^{\tau\theta_5/\alpha} \\ \sigma_x = -\varepsilon^{-1/2} \left[4\alpha + \frac{1 - 2\alpha\sqrt{1 + \theta_5}}{g(\theta_5)\sqrt{1 + \theta_5}} e^{\tau\theta_5/\alpha} \right] \\ \sigma_\varphi = \varepsilon^{-1/2} \left[2\alpha + \frac{1}{g(\theta_5)} \left(2\alpha + \frac{2\alpha^2\sqrt{1 + \theta_5}}{\theta_5} - \frac{1}{\sqrt{1 + \theta_5}} \right) e^{\tau\theta_5/\alpha} \right]$$

На фиг. 2 изображены зависимости $\varepsilon^{1/2}\sigma(\alpha)$, $\varepsilon^{1/2}\sigma_x(\alpha)$, $\varepsilon^{1/2}\sigma_\varphi(\alpha)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ (соответственно, кривые 1–3). При $\alpha > 2$ кривые хорошо описываются асимптотиками $\varepsilon^{1/2}\sigma_x = -4\alpha$, $\varepsilon^{1/2}\sigma_\varphi = 2\alpha$. Начальное давление при возрастании α стремится к нулю, как $2/\alpha$, однако напряжения быстро возрастают за счет вязких составляющих.

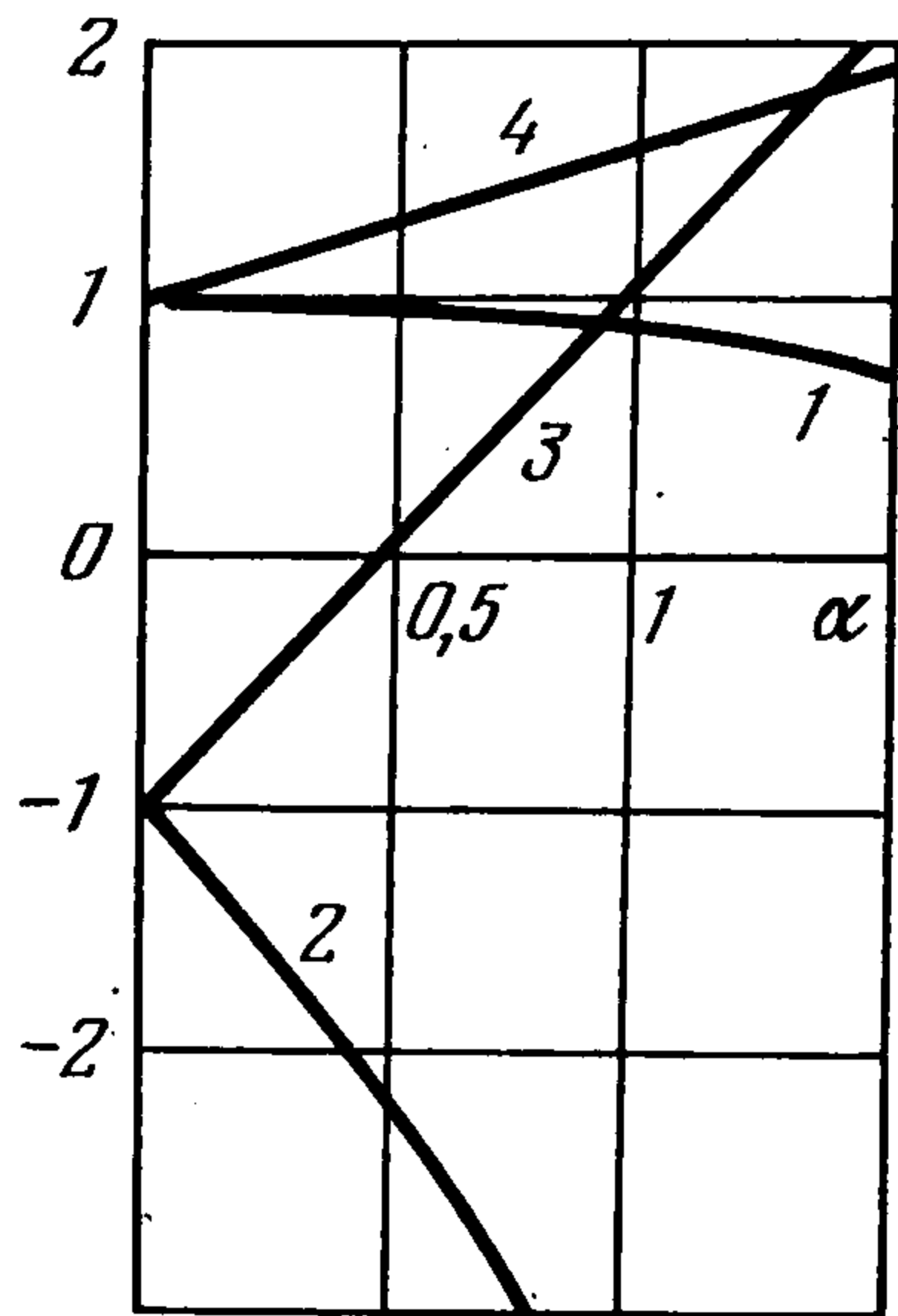
Интересно, что для давления на поршне справедлив экспоненциальный спад с ростом τ при любых α . Для напряжений экспоненциальный спад имеет место только при малых α . Обезразмеренная и отнесенная к $\varepsilon^{1/2}$ постоянная спада $b = -\alpha/\theta_5$ изображена на фиг. 2 (кривая 4). В работе [2] было теоретически подтверждено пиковое приближение для невязкой среды в случае сферической симметрии, согласно которому давление на поршне спадает со временем по экспоненте, причем было получено теоретическое значение постоянной спада, равное единице. Нетрудно видеть, что в случае вязкой среды при $\alpha \rightarrow 0$ $b(\alpha) \rightarrow 1$.

Как видно из фиг. 2, угловая компонента тензора напряжений σ_φ в начальный момент времени положительна примерно при $\alpha \geq 0,5$.

Хотя в зоне сформировавшейся УВ предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в построенном решении невозможен, в зоне малых времен $t \sim \varepsilon^{1/2}$ в формулах (2.2) можно перейти к пределу при $\tau \sim 1$, $\alpha \rightarrow 0$. Это даст

$$(5.1) \quad u = p\varepsilon^{1/2} = \frac{1}{2x} \left[1 - \operatorname{erf} \left((\lambda - 1) \sqrt{\frac{\tau}{2\alpha}} \right) \right]$$

Отсюда ясно, что вязкость в главном приближении должна учитываться при $t \sim \varepsilon^{1/2}\alpha$ (при этих временах надо пользоваться решением (2.2)) и в зоне УВ $(\lambda - 1) \sqrt{\tau/2\alpha} \sim 1$. Существенно вязкий профиль УВ, построенный в настоящей работе, будет при $x_0 \sim \zeta/(\bar{\rho}_0 \bar{U}_0)$. Например,



Фиг. 2

для воды при $\bar{U}_0 \sim 10$ м/с это соответствует $x_0 \sim 10^{-7}$ м. При $x_0 \gg \zeta/(\bar{\rho}_0 \bar{U}_0)$ будет получаться профиль, справедливый для невязкой среды [2]. Влияние вязкости при этом будет сказываться в том, что скачок будет размазываться в виде погранслошной функции (5.1).

6. Выводы. Построенное решение показывает, что при малых числах Рейнольдса $Re = 1/\alpha^0 \sim \sim \varepsilon^{1/2}$ от удара формируется профиль УВ, отличный от профиля в невязкой жидкости. Этот профиль сразу же переходит в гауссов профиль, ширина которого растет пропорционально корню квадратному из времени. Амплитуда сферической УВ падает обратно пропорционально $t^{3/2}$.

в отличие от невязкой УВ, где спад обратно пропорционален времени. В зоне УВ возмущения на порядок больше, чем в волновой зоне.

Решение в зоне УВ описывается параболическим уравнением, в волновой — гиперболической системой. Характеристики этой системы являются субхарактеристиками системы (1.1) для данной задачи [12]. Погранслоя появляется на передней характеристике линеаризованного невязкого течения. Заметим, что построенное решение описывает не обычный вязкий погранслоя, получающийся при $Re \rightarrow \infty$, а погранслоя, возникающий вследствие слабой сжимаемости среды при $Re \ll 1$.

В отличие от профилей УВ в идеальной жидкости геометрическое подобие профилей УВ в вязкой среде нарушается вследствие дополнительной зависимости от числа Рейнольдса.

В окрестности контактной границы за счет вязких составляющих тензора напряжений при малых временах может нарушаться сплошность среды, поскольку могут возникать положительные напряжения.

При малых временах давление на контактной границе падает экспоненциально со временем, как и для невязкой среды, т. е. для сильно вязкой среды также справедливо пиковое приближение в случае сферической симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
2. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Распространение ударных волн в жидкости. — В кн.: Избранные вопросы механики сплошной среды. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 57—65.
3. Фридман В. Е. Нелинейная акустика взрывных волн. — В кн.: Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький; Изд-е Ин-та прикл. физики АН СССР, 1980, с. 68—97.

4. Коул Р. Подводные взрывы. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 495 с.
5. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
6. Лихачев В. Н. Опрокидывание сферической волны сжатия в жидкости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 235—240.
7. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Распространение ударной волны на большие расстояния.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 3, с. 567—569.
8. Гонор А. Л., Лихачев В. Н. Одномерные нестационарные движения жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 3—8.
9. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва М.: Наука, 1975. 704 с.
10. Лихачев В. Н. Определение профиля сферической ударной волны в жидкости.— Гидроаэромеханика и теория упругости: Сб. статей. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1981, вып. 28, с. 3—8.
11. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
12. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VI.1984