Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

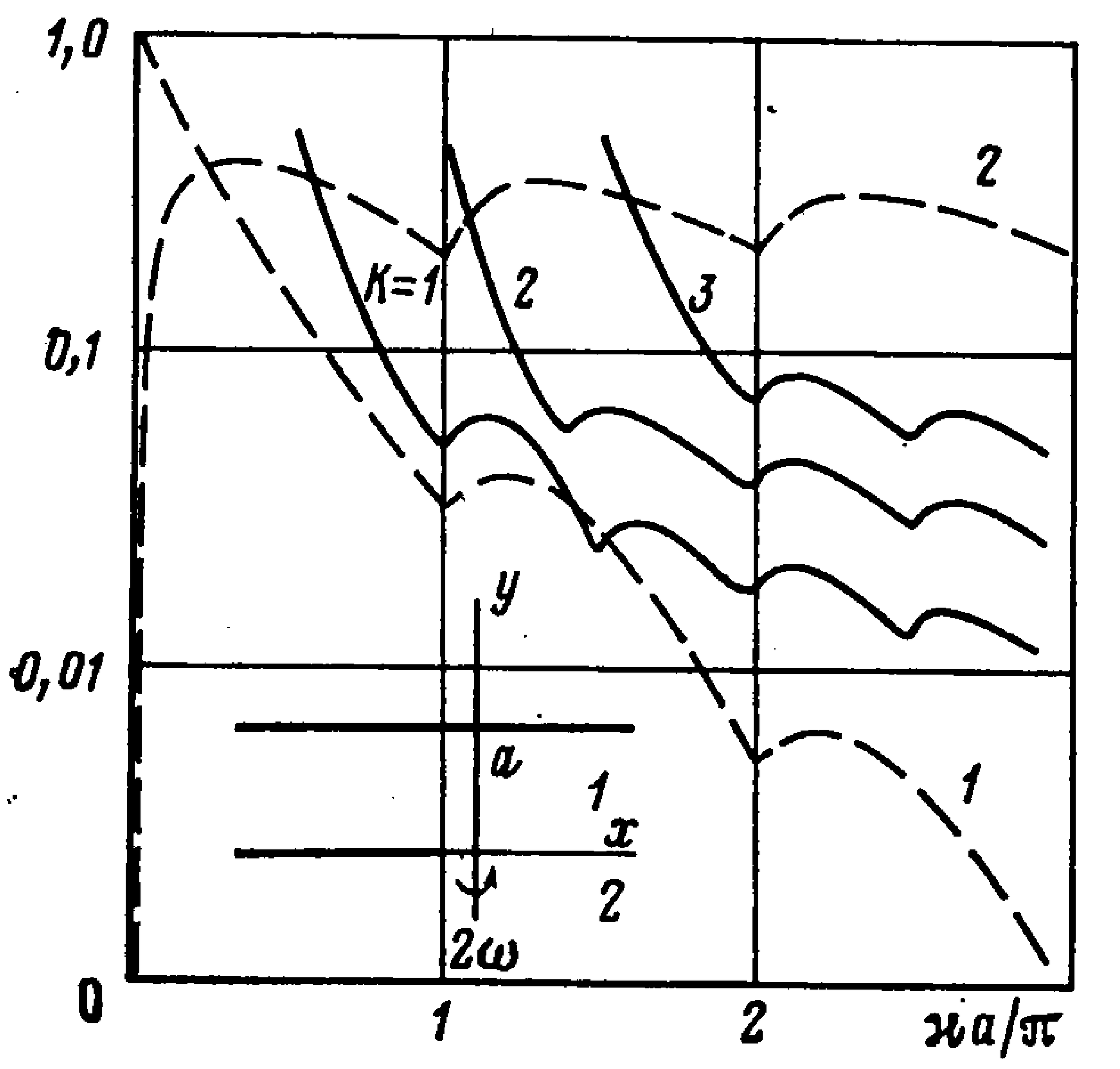
УДК 532.5 : 534.1

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН КЕЛЬВИНА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНУЮ СТЕНКУ

Плис В. И.

Методом Винера — Хопфа строится точное решение задачи о дифракции волн Кельвина во вращающемся полуограниченном бассейне, содержащем полубесконечную стенку. Проводится асимптотический и численный анализ решения. Обсуждается характер волн, распространяющихся в бассейне.

1. Постановка задачи. Пусть в бассейне $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < a$, расположенном на плоской, вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью 2ω Земле, имеется полубесконечная стенка $y = 0$, $-\infty < x < 0$ (фигура). Глубина бассейна постоянна и равна h. Ось вращения перпендикулярна плоскости (x, y) и проходит через точку с координатами $(0, 0)$.



Рассмотрим в этом бассейне установившиеся волновые движения поверхности жидкости, т. е. будем считать, что возвышения $\xi(x, y, t)$ зависят от времени гармонически $\xi(x, y) \exp(-i\sigma t)$. Остановимся на случае $\sigma > 2\omega$. В линейной теории длинных поверхностных волн [1] функция $\xi(x, y)$ — решение уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\xi(x, y) = 0, \quad \varkappa^2 = (\sigma^2 - 4\omega^2)/(gh)$$

где g — ускорение свободного падения, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Пусть в канале, образованном бесконечной и полубесконечной стенками, распространяется волна Кельвина единичной амплитуды (1.1)

$$\xi_0(x, y) = \exp(i\eta\varkappa x - l\eta\varkappa y) \tag{1.1}$$

$$l = \frac{2\omega}{\sigma} < 1, \quad \eta = (1 - l^2)^{-1/2}$$

Исследуем волновые движения в бассейне, возбуждаемые при дифракции этой волны на ребре полубесконечной стенки.

Разобьем бассейн на две области, как показано на фигуре. В области *1* ($-\infty < x < +\infty$, $0 < y < a$) полную амплитуду возвышений представим в виде $\xi_0 + \xi_1$, где ξ_0 — падающие, а ξ_1 — дифрагированные волны. В области *2* ($-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < 0$) полную амплитуду возвышений обозначим ξ_2. Для неизвестных функций ξ_j ($j = 1, 2$) получим следующую задачу: найти решения уравнений

$$(\Delta + \varkappa^2)\,\xi_j(x, y) = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{1.2}$$

удовлетворяющие краевым условиям на стенках, соприкасающихся с жидкостью, и условиям непрерывности нормальной компоненты скорости и возвышений на продолжении полубесконечной стенки

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &v_0(x, a-0) + v_1(x, a-0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ &v_0(x, 0+0) + v_1(x, 0+0) = 0, \quad v_2(x, 0-0) = 0, \\ &-\infty < x < 0 \end{aligned}$$

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &v_0(x, 0+0) + v_1(x, 0+0) = v_2(x, 0-0), \quad 0 < x < +\infty \\ &\xi_0(x, 0+0) + \xi_1(x, 0+0) = \xi_2(x, 0-0), \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}$$

Здесь $v_j(x, y)$ — компонента скорости жидкости, параллельная оси y и связанная с $\xi_j(x, y)$ соотношением

$$(1.5)\qquad v_j(x, y) = -\frac{\sigma}{\varkappa^2 h}\left(l\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\xi_j(x, y)$$

Наконец, дифрагированные волны должны удовлетворять условию на ребре [2]

$$(1.6)\qquad \xi_j \sim r^{1/2}, \quad r \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и условию излучения: решение на бесконечности должно содержать только расходящиеся волны.

Можно показать, что в классе ограниченных функций задача (1.1)—(1.6) имеет единственное решение.

2. Система парных интегральных уравнений и ее решение. Решение задачи (1.1)—(1.6) найдем методом Винера — Хопфа [3]. Для этого предположим, что волновое число $\varkappa$ обладает малой положительной мнимой частью, т. е. $\varkappa = \varkappa_0 + i\varepsilon$, а в окончательных результатах устремим ε к нулю. Введение в $\varkappa$ мнимой добавки соответствует предположению о диссипации энергии в жидкости.

Введем неизвестные функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $Z(\alpha)$, $Z_1(\alpha)$, $Z_2(\alpha)$ комплексного переменного α по формулам

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\xi_1(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,[A(\alpha)\sin\gamma(y-a) + B(\alpha)\sin\gamma y]\,d\alpha \\ &\xi_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x - i\gamma y)\,Z(\alpha)\,d\alpha \\ &\xi_1(x, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,Z_1(\alpha)\,d\alpha, \quad \xi_2(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,Z_2(\alpha)\,d\alpha \\ &\left(A(\alpha) = -\frac{Z_2(\alpha)}{\sin\gamma a}, \quad B(\alpha) = \frac{Z_1(\alpha)}{\sin\gamma a};\right. \\ &\left.\gamma = (\varkappa^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Im}\gamma > 0\right) \end{aligned}$$

Из условия непротекания (1.3) на стенке $y = a$ получаем

$$(2.2)\qquad Z_1(\alpha) = \frac{\gamma Z_2(\alpha)}{\gamma\cos\gamma a + \alpha l\sin\gamma a}$$

Введем новую неизвестную функцию $V(\alpha)$ комплексного переменного α по формуле

$$(2.3)\qquad v_1(x, 0) = -\frac{\sigma}{\varkappa^2 h}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,V(\alpha)\,d\alpha$$

Применив формулу (1.5) к интегральным представлениям для возвышений (2.1), получаем с учетом (2.2), (2.3) зависимость $Z(\alpha)$ и $Z_2(\alpha)$ от $V(\alpha)$

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &Z(\alpha) = \frac{V(\alpha)}{\gamma + i\alpha l} \\ &Z_2(\alpha) = i\,\frac{\gamma\cos\gamma a + \alpha l\sin\gamma a}{\sin\gamma a\,(\gamma^2 + \alpha^2 l^2)}\,V(\alpha) \end{aligned}$$

Подставляя интегральные представления возвышений во второе краевое условие (1.4) и пользуясь условием непротекания на полубесконечной стенке, приходим к системе парных интегральных уравнений

$$(2.5)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x)\,L(\alpha)}{\alpha^2-\eta^2\varkappa^2}\,V(\alpha)\,d\alpha = i\frac{a}{\eta^2}\exp(i\eta\varkappa x),\quad x>0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,V(\alpha)\,d\alpha = 0,\quad x<0$$

$$L(\alpha) = \frac{\gamma a}{\sin\gamma a}\exp(-i\gamma a)$$

Для решения системы (2.5) проведем факторизацию ядра интегрального уравнения $L(\alpha)$, т. е. представим его в виде $L(\alpha) = L_+(\alpha)\,L_-(\alpha)$, где функция $L_+(\alpha)$ — аналитическая и не имеет нулей в верхней полуплоскости комплексного переменного α, а функция $L_-(\alpha)$ обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости комплексного переменного α. Факторизация функций $\sin\gamma a/(\gamma a)$ и $\exp(-i\gamma a)$ неоднократно проводилась в литературе [3, 4], поэтому приведем лишь окончательный результат этой процедуры для ядра $L(\alpha)$

$$(2.6)\qquad \frac{1}{L_+(\alpha)} = \sqrt{\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}}\exp\left[\frac{\alpha\gamma}{\pi}\ln\left(\frac{\alpha+i\gamma}{\varkappa}\right)+\frac{i\alpha a}{\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-C+\ln\frac{2\pi}{\varkappa a}+i\frac{\pi}{2}\right)\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha_n}\right)\exp\frac{i\alpha a}{\pi n},\quad \alpha_n = -\sqrt{\varkappa^2-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$$

где $C = 0{,}57721\ldots$ — постоянная Эйлера.

Решение системы (2.5) ищем в виде

$$(2.7)\qquad V(\alpha) = Q/L_-(\alpha)$$

где Q — неизвестная постоянная. При таком выборе функции $V(\alpha)$ второе уравнение системы (2.5) удовлетворяется тождественно. Для определения постоянной Q подставляем (2.7) в первое из интегральных уравнений системы (2.5) и в результате вычисления вычета в полюсе $\alpha = \eta\varkappa$ находим

$$(2.8)\qquad Q = \frac{\varkappa a}{\pi\eta L_+(\eta\varkappa)}$$

Найденное решение (2.7), (2.8) удовлетворяет условию на ребре (1.6), которое, согласно теореме о связи асимптотики функции и ее фурье-образа [5], принимает для функции $V(\alpha)$ следующий вид: $V(\alpha)\sim\alpha^{-1/2}$ при $\alpha\to\infty$. Зная явное выражение для функции $V(\alpha)$, можно построить формулы для возвышений поверхности жидкости в бассейне.

3. Формулы для возвышений. Начнем с изучения возвышений в полубесконечном канале $-\infty<x<0$, $0<y<a$. Исходя из (2.1) можно получить следующее интегральное представление для возвышений в канале:

$$(3.1)\qquad \xi_1(x,y) = i\eta^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\alpha x)\,[\gamma\cos\gamma(y-a)-\alpha l\sin\gamma(y-a)]}{\sin\gamma a\,(\alpha^2-\eta^2\varkappa^2)}\,V(\alpha)\,d\alpha$$

Для вычисления входящего в (3.1) интеграла достаточно найти вычеты подынтегральной функции в простых полюсах $-\eta\varkappa$, α_k ($k = 1, 2, \ldots$). В результате получаем

$$(3.2)\qquad \xi_1(x,y) = -\frac{\pi l\eta^2}{\operatorname{sh}(l\eta\varkappa a)}V(-\eta\varkappa)\exp[i\eta\varkappa x+l\eta\varkappa(y-a)]+$$

$$+ 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\alpha_k a} \frac{V(\alpha_k)}{\delta_k} \sin(\gamma_k y + \varphi_k) \exp(i\alpha_k x)$$

$$\sin\varphi_k = \frac{\gamma_k}{\delta_k}, \quad \cos\varphi_k = \frac{\alpha_k l}{\delta_k}, \quad \delta_k = \sqrt{\gamma_k^2 + \alpha_k^2 l^2}, \quad \gamma_k = \frac{\pi k}{a}$$

Первое слагаемое в (3.2) описывает отраженную волну Кельвина (ВК), распространяющуюся в канале, а бесконечная сумма соответствует прогрессивным и затухающим волнам. При этом действительным α_k соответствуют прогрессивные волны, а мнимым — экспоненциально затухающие. При данном значении безразмерной ширины канала $\varkappa a$ число прогрессивных волн равно целой части числа $\varkappa a/\pi$.

Обратимся к области 2. Возвышения в ней описываются интегральным соотношением

$$\xi_2(x, y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\alpha x - i\gamma y)}{\gamma + i\alpha l} V(\alpha)\, d\alpha \tag{3.3}$$

Подынтегральная функция в (3.3) имеет точки ветвления $\pm\varkappa$ и простой полюс $-\eta\varkappa$. При $x < 0$ можно воспользоваться теоремой о вычетах [6] и представить возвышения $\xi_2(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} \xi_2(x, y) = &-2\pi l \eta^2 V(-\eta\varkappa) \exp(i\eta\varkappa x + l\eta\varkappa y) + \\ &+ \int_S \frac{\exp(i\alpha x - i\gamma y)}{\gamma + i\alpha l} V(\alpha)\, d\alpha \end{aligned} \tag{3.4}$$

Первое слагаемое в (3.4) описывает ВК, распространяющуюся в области *2* в отрицательном направлении оси x вдоль стенки $y = 0$, $x < 0$, второе слагаемое — интеграл по берегам разреза S до точки ветвления — описывает сложное волновое движение и для любой точки рассматриваемой области может быть получено численным интегрированием на ЭВМ.

Оценивая интеграл (3.3) для возвышений на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от входа в канал по методу перевала [7], получаем следующее выражение для возвышений поверхности вдали от ребра полубесконечной стенки:

$$\begin{aligned} &\xi_2(r, \theta) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa r}}\, \Psi(\theta) \exp\left[i\left(\varkappa r - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad \varkappa r \gg 1 \\ &\Psi(\theta) = \frac{\cos\theta V(\varkappa \sin\theta)}{\cos\theta + il\sin\theta}, \quad x = r\sin\theta, \quad y = -r\cos\theta \end{aligned} \tag{3.5}$$

Такая же оценка может быть проведена и для возвышений в области *1* вне канала. Из (3.5) видно, что вдали от ребра полубесконечной стенки возвышения представляют собой цилиндрические волны с угловым распределением амплитуды $|\Psi(\theta)|$. Следует отметить, что при $x < 0$ к цилиндрическим волнам в (3.5) необходимо добавить слагаемое, описывающее ВК.

Опишем теперь волновую картину в целом. Распространяющаяся в канале ВК достигает ребра полубесконечной стенки, разворачивается на нем и уходит на бесконечность с уменьшенной амплитудой с другой стороны стенки. Кроме этой волны вне канала будут распространяться цилиндрические волны. В самом канале возбуждается система его собственных волн, а именно: отраженная ВК, конечное число прогрессивных волн и бесконечное число волн, экспоненциально затухающих при удалении в глубь канала от его открытого конца.

Задача дифракции ВК, распространяющихся вдоль бесконечной стенки в бассейне, изображенном на фигуре, была решена [8] методом Винера — Хопфа в интерпретации Джонса. Следует отметить, что в [8], так же как и в близкой по теме работе [9] того же автора, утверждалось, что амплитуда n-й прогрессивной волны в канале стремится к бесконечности при $\alpha_n \to 0$, т. е. при $\varkappa a \to \pi n$, и формулы для возвышений справедливы при $\varkappa a$, не слишком близких к πn, потому что в выражениях для амплитуд прогрессивных волн (3.2) волновые параметры α_n стоят в знаменателе. Однако в числителе этих выражений всегда есть сомножители вида $(\sin \varkappa a)^{1/2}$, стремящиеся к нулю при $\varkappa a \to \pi n$ с той же скоростью, что и α_n. Поэтому амплитуда любой прогрессивной волны в канале всегда будет конечной, а решение (2.7), (2.8), (3.2) справедливо при любых $\varkappa a$.

Интерпретация результатов численного анализа. Амплитуды волн, возникающих в бассейне, были исследованы численно. Для этого бесконечное произведение в (2.6) заменялось конечным с N сомножителями. Относительная погрешность такой редукции, как показано в [10], не превосходит величины $|\alpha^2|a^2/(\pi^2 N)$, и следовательно, для значений $\alpha a/\pi \sim 1$ погрешность будет меньше 1% при $N > 100$.

На фигуре штриховыми линиями *1* и *2*, соответственно, приведена зависимость от ширины канала $\varkappa a$ амплитуда отраженной ВК и ВК, распространяющейся в области *2*. Видно, что для малых $\varkappa a$ ВК, достигнув открытого конца канала, почти полностью от него отражается. С ростом $\varkappa a$ амплитуда отраженной ВК быстро убывает, а амплитуда ВК в «теневой» области стремится к своему предельному значению, равному $l\eta/(1 + \eta)$ [11]. Это объясняется тем, что рассматриваемая задача при $\varkappa a \to +\infty$ переходит в задачу о дифракции ВК на полубесконечной стенке в неограниченном вращающемся бассейне.

Сплошными линиями приведена зависимость амплитуд нескольких первых прогрессивных волн от безразмерной ширины канала $\varkappa a$. С ростом ширины при $\varkappa a = \pi n$ ($n = 1, 2, \ldots$) в канале будут возникать прогрессивные волны. Значения безразмерной ширины, при которых происходит возбуждение новой распространяющейся волны, называются пороговыми. На графиках зависимости амплитуд пороговым значениям ширины соответствуют характерные изломы, которые связаны с перераспределением энергии между распространяющимися волнами вблизи от порога возникновения новой прогрессивной волны. Явление перестройки волновых движений при зарождении новой распространяющейся волны известно в оптике [12], электродинамике [13], ядерной физике [14] и носит там название порогового явления. Подробно пороговый характер дифракции длинных поверхностных волн во вращающихся бассейнах обсуждался в [10, 16—18].

Результаты данной работы можно использовать в геофизических расчетах при исследовании движения приливных волн, подобно тому как это сделано в [15].

Автор благодарит В. А. Белякова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.— Л.: Глав. ре . общетехн. лит. и номогр., ОНТИ, 1936. 303 с.
2. *Плис В. И.* Об «условии на ребре» в линейной теории длинных поверхностных волн.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 564—566.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
4. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
5. *Риекстиньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов. Т. 1. Рига: Зинатне, 1974. 390 с.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
8. *Kapoulitsas G. M.* Diffraction of Kelvin waves from a rotating channel with an infinite and a semi-infinite barrier.— J. Phys. Ser. A, 1979, v. 19, No. 5, p. 733—742.
9. *Kapoulitsas G. M.* Scattering of long waves in a rotating bifurcated channel.— Intern. J. Theor. Phys., 1980, v. 19, No. 10, p. 773—788.
10. *Плисс В. И.* Дифракция волн Кельвина в канале с полубесконечной стенкой.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 947—953.
11. *Габов С. А.* Дифракция волны Кельвина на полубесконечной стенке в неограниченном бассейне.— Вестн. МГУ, Математика, механика, 1973, № 5, с. 100—107.
12. *Wood R. W.* Diffraction gratings with a controlled groove form and abnormal distribution of intensity.— Philos. Mag. Ser. 6, 1912, v. 23, No. 133, p. 310—317.

13. *Болотовский Б. М., Лебедев А. Н.* О пороговых явлениях в классической электродинамике.— Ж. эксперим. и теор. физики, 1967, т. 53, № 4, с. 1349—1352.
14. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1966. 339 с.
15. *Packham B. A.* Reflexion of Kelvin waves at the open end of a rotating semi-infinite channel.— J. Fluid Mech., 1969, v. 39, pt 2, p. 321—328.
16. *Габов С. А., Рубан П. И., Секерж-Зенькович С. Я.* Дифракция волн Кельвина на полубесконечной стенке в полуограниченном бассейне.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 6, с. 1512—1524.
17. *Плис А. И., Плис В. И.* Дифракция волн Кельвина на открытом конце плоскопараллельного канала.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 69—76.
18. *Плис В. И.* Распространение волн Кельвина из канала в полуограниченный бассейн.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1041—1048.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1984