

УДК 532.5

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ В СОСУДАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Владимиров В. А., Вострецов Д. Г.

Рассматривается задача устойчивости стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости в сосудах эллиптического сечения. Поле скоростей основного потока является линейной функцией координат, а завихренность постоянна. Спектральная задача для линейных возмущений решается методом последовательных приближений. Демонстрируется неустойчивость течений в первом приближении. Подробно разбирается частный случай течения в трехосном эллипсоиде. Предсказания теории хорошо согласуются с результатами экспериментов [1]. В отличие от анализа, проведенного в [1], рассматривается существенно более широкий класс возмущений, причем метод Галеркина приближенной априорной аппроксимации решения не используется.

Задача устойчивости течений рассматриваемого типа представляет интерес в связи с объяснением свойств гироскопов с жидким наполнением [2—4] и поведения ядер планет и звезд [5]. В то же время течение с линейным полем скорости является наиболее простым примером реализации нового механизма неустойчивости закрученных потоков, связанного с нарушениями вращательной симметрии [6—9].

1. Постановка задачи. Идеальная несжимаемая однородная по плотности жидкость целиком заполняет покоящийся сосуд, граница которого в декартовой системе координат x_0, y_0, z_0 задается соотношением

$$(1.1) \quad x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + \varphi(z_0/c) = 0$$

с тремя постоянными a, b и c . Любое сечение сосуда плоскостью $z_0 = \text{const}$ есть эллипс с отношением полуосей $a/b > 1$. Функция $\varphi(z_0/c)$ на некотором интервале изменения аргумента z_0/c , соответствующем высоте сосуда, предполагается неположительной и достаточно гладкой. Для сосудов конечной высоты можно выбрать $-1 \leq z_0/c \leq 1$.

Точное решение уравнений движения, удовлетворяющее условиям непротекания на поверхности (1.1), задается следующими выражениями для поля скорости u

$$(1.2) \quad u = (-a\Omega y_0/b, b\Omega x_0/a, 0)$$

Здесь Ω — постоянная величина, имеющая размерность угловой скорости. Течение (1.2) характеризуется постоянной завихренностью, имеющей единственную ненулевую z_0 -компоненту. Оно устанавливается, например, после резкой остановки сосуда из состояния вращения сосуда с жидкостью как твердого тела.

Задача состоит в исследовании течения (1.2) в сосуде (1.1) на устойчивость по линейному приближению.

Рассмотрение проводится в «деформированных» цилиндрических координатах r, θ, z , таких, что

$$x_0/a = r \cos \theta, \quad y_0/b = r \sin \theta, \quad z_0/R = z$$

$$R \equiv ab/\sqrt{1/2(a^2 + b^2)}$$

Вводится также безразмерное время $\tau \equiv \Omega t$.

В силу стационарности основного течения (1.2) и соответствующих граничных условий непротекания на (1.1) задача устойчивости сводится

к изучению возмущений, гармоническим образом зависящих от времени. В частности, поле возмущений давления P представляется в виде

$$(1.3) \quad P(r, \theta, z, \tau) = p(r, \theta, z) e^{-i\omega\tau}$$

с комплексными амплитудной функцией p и частотой ω .

Известным методом ([1], с. 84) из уравнений движения получается уравнение для p

$$(1.4) \quad D^2 \Delta p + 4p_{zz} = \frac{1}{2}\varepsilon (e^{2i\theta} N^+ M^+ + e^{-2i\theta} N^- M^-) p$$

$$D \equiv -i\omega + \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$N^\pm \equiv (D \pm 2i)(D \pm 4i), \quad M^\pm \equiv M_1 \pm 2iM_2$$

$$M_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$M_2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right), \quad \varepsilon \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Аналогичным образом показывается, что на границе (1.1), описываемой уравнением

$$(1.5) \quad r^2 + \varphi(z/h) = 0, \quad h \equiv c/R$$

из условий непротекания следует соотношение

$$(1.6) \quad D(Dp_r + 2r^{-1}p_\theta) + [\varphi'/(rh)](D^2 + 4)p_z = \frac{1}{2}\varepsilon (e^{2i\theta} N^+ K^+ + e^{-2i\theta} N^- K^-) p$$

$$K^\pm \equiv \frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \varphi'(\xi) \equiv \frac{d\varphi}{d\xi}$$

Задача (1.4) — (1.6) является спектральной на определение собственных функций $p(r, \theta, z)$ и собственных частот ω . Наличие хотя бы одного собственного значения ω с $\text{Im } \omega > 0$ означает неустойчивость течения (1.2). Поскольку собственные значения (1.4) — (1.6) встречаются комплексно-сопряженными парами, для неустойчивости достаточно $\text{Im } \omega \neq 0$.

Ниже задача (1.4) — (1.6) изучается методом последовательных приближений с учетом малости величины ε . Предполагается, что имеют место разложения p и ω по целым степеням ε

$$(1.7) \quad (p, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu (p_\nu, \omega_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Вопрос о сходимости рядов (1.7) не затрагивается, рассмотрение ограничено подробным изучением двух первых приближений и их сравнением с экспериментом.

2. Нулевое приближение. Решения задачи (1.4) — (1.7) нулевого приближения представляют собой известные инерционные волны в твердотельно вращающейся жидкости [10], заключенной в осесимметричный резервуар (1.5). Поскольку при $\varepsilon = 0$ коэффициенты уравнений (1.4), (1.6) не зависят от θ , задача сводится к изучению гармоник вида

$$(2.1) \quad p_0(r, \theta, z) = A_m(r, z) e^{im\theta}$$

с целыми волновыми числами $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для A_m из (1.4) — (1.7) вытекает следующая

Задача. Необходимо найти решение уравнения

$$(2.2) \quad \frac{1}{r} (rA_{mr})_r - \frac{m^2}{r^2} A_m - \beta_m^2 A_{mzz} = 0$$

$$\beta_m^2 \equiv (4 - \sigma_m^2)/\sigma_m^2, \quad \sigma_m \equiv m - \Omega_0$$

удовлетворяющее на (1.5) граничным условиям

$$(2.3) \quad r A_{mr} + \frac{2m}{\sigma_m} A_m - \frac{\beta_m^2 \varphi'}{2h} A_{mz} = 0$$

Решение задачи (2.2), (2.3) позволяет определить вид собственных функций $A_m(r, z)$ и дисперсионную связь $\omega_0 = \omega_0(m, h)$.

В общем случае сосуда произвольной формы известно [10], что спектр собственных значений ω_0 задачи (2.2), (2.3) веществен и сосредоточен на отрезке

$$(2.4) \quad m - 2 < \omega_0 < m + 2$$

В частности, отсюда вытекает, что $\beta_m^2 \geq 0$. Следует отметить также следующую из вида (2.2), (2.3) антисимметрию дисперсионной связи

$$(2.5) \quad \omega_0(m, h) = -\omega_0(-m, h).$$

3. Неустойчивость в общем случае.] Неустойчивость в первом приближении ($\text{Im } \omega_1 \neq 0$) может быть проиллюстрирована для любой функции φ в (1.1). Для этого следует выбрать нулевое приближение в виде суммы гармоник (2.1) с $m = \pm 1$;

$$(3.1) \quad p_0 = a A_1 e^{i\theta} + \bar{a} A_{-1} e^{-i\theta}$$

Здесь a и \bar{a} — независимые комплексные постоянные. Запись (3.1) в силу (1.3), (1.7) означает, что гармоники $m = 1$ и $m = -1$ обладают одинаковой частотой ω_0 . Ясно, что такое вырождение имеет место не для любых значений геометрического параметра h (1.5). Подходящие значения $h = h_0$ определяются как координаты точек пересечения семейств дисперсионных кривых $\omega_0(1, h)$ и $\omega_0(-1, h)$ на плоскости переменных ω_0, h . Такие пересечения имеют место в силу перекрытия спектров для $m = 1$ и $m = -1$ на участке $-1 < \omega_0 < 1$ (2.4). Антисимметрия (2.5) соответствует наличию пересечений на оси $\omega_0 = 0$.

Основной результат, который будет сейчас получен, состоит в том, что каждой точке пересечения $\omega_0 = 0, h = h_0$ соответствует интервал значений $|h - h_0| < \varepsilon h_*$, на котором течение (1.2) в первом приближении неустойчиво ($\text{Im } \omega_1 \neq 0$).

Подстановка $\omega_0 = 0$ в (2.2), (2.3) приводит к выводу, что $A_{-1} = A_1 \equiv A$. После этого (3.1) переписывается в виде

$$(3.2) \quad p_0 = (a e^{i\theta} + \bar{a} e^{-i\theta}) A$$

где $A(r, z)$ удовлетворяет уравнению с граничными условиями на поверхности (1.5)

$$(3.3) \quad L^+ A \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - 3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A = 0$$

$$(3.4) \quad G^+ A \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 2 - \frac{3\varphi'}{2h} \frac{\partial}{\partial z} \right) A = 0$$

Функциональный вид решения в первом приближении следует из (3.2) и наличия множителей $e^{\pm 2i\theta}$ в правых частях (1.4), (1.6):

$$(3.5) \quad p_1 = B e^{i\theta} + \bar{B} e^{-i\theta} + C e^{3i\theta} + \bar{C} e^{-3i\theta}$$

Здесь B, \bar{B}, C, \bar{C} — подлежащие определению четыре различные функции аргументов r и z .

Уравнение (1.4) в первом (линейном по ε) приближении дает

$$(3.6) \quad \begin{aligned} L^+ B &= a \omega_1 f_1 + \bar{a} f_2 \\ L^+ \bar{B} &= -\bar{a} \omega_1 f_1 + a f_2 \end{aligned}$$

$$f_1 \equiv 8A_{zz}, \quad f_2 \equiv \frac{9}{2} A_{zz}$$

Аналогично из граничных условий (1.6) следует

$$(3.7) \quad \begin{aligned} G^+ B &= a (\omega_1 g_1 + h_1 g_3) + \bar{a} g_2 \\ G^+ \bar{B} &= \bar{a} (-\omega_1 g_1 + h_1 g_3) + a g_2 \\ g_1 &\equiv 2 \left(\frac{2\varphi_0'}{h_0} A_z - A \right) \\ g_2 &\equiv \frac{3}{2} (r A_r + A) \\ g_3 &\equiv -\frac{3}{2h_0^3} \left(\varphi_0' + \frac{z}{h_0} \varphi_0'' \right) A_z \end{aligned}$$

В соответствии с результатом, сформулированным выше, в (3.7) введено $h = h_0 + \varepsilon h_1$; нулевой индекс у производных функции φ означает, что в ее аргументе величина h заменена на h_0 .

Задача теперь состоит в нахождении решений неоднородных уравнений (3.6) с неоднородными граничными условиями (3.7). Однако оказывается, что можно вычислить ω_1 (и тем самым решить наиболее интересную часть задачи) без получения явных выражений для B и \bar{B} . Для этого следует воспользоваться фактом самосопряженности дифференциальной формы $\Lambda \equiv rL^+$. Для произвольных функций u и v справедливо равенство Грина

$$v \Lambda u - u \Lambda v = [r (vu_r - uv_r)]_r - 3r (vu_z - uv_z)_z$$

Выбирая $v = A$, $u = B$, интегрируя полученное равенство по площади меридионального сечения S (1.5), преобразуя интегралы по площади S к интегралам по границам ∂S и используя соотношения (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), можно получить первое из двух уравнений

$$(3.8) \quad \begin{aligned} a (\omega_1 \kappa_1 + h_1 \kappa_3) + \bar{a} \kappa_2 &= 0 \\ \bar{a} (-\omega_1 \kappa_1 + h_1 \kappa_3) + a \kappa_2 &= 0 \\ \kappa_i &\equiv F_i - V_i, \quad F_i \equiv \int_S A f_i r dr dz \\ V_i &\equiv \oint_{\partial S} A g_i dz, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Величины f_1, f_2, g_1, g_2, g_3 определены в (3.6), (3.7); $f_3 \equiv 0$. Второе равенство (3.8) получается тем же способом, что и первое.

Условие существования нетривиального решения a, \bar{a} системы (3.8) приводит к выражению

$$(3.9) \quad \omega_1^2 = (h_1^2 \kappa_3^2 - \kappa_2^2) / \kappa_1^2$$

Наименьшее значение (3.9) достигается при $h_1 = 0$. При этом всегда имеет место неустойчивость

$$(3.10) \quad \omega_1 = \pm i \omega_* \equiv \pm i \kappa_2 / \kappa_1$$

Интервал «неустойчивых» значений h определяется неравенством

$$(3.11) \quad |h_1| < h_* \equiv |\kappa_2 / \kappa_3|$$

4. Течение в трехосном эллипсоиде. В качестве конкретизации и разработки изложенных в п. 3 соображений рассмотрим задачу устойчивости течения (1.2) в сосуде, имеющем форму трехосного эллипсоида. В (1.1), (1.5) в этом случае

$$\varphi = (z_0/c)^2 - 1 = (z/h)^2 - 1$$

Точное решение задачи (2.2), (2.3) для эллипсоида выписывается через специальные функции ([1], с. 87). Для этого вводятся новые незави-

симые переменные ξ_m и η_m

$$(4.1) \quad \begin{aligned} r &= d_m [(1 - \xi_m^2)(1 - \eta_m^2)]^{1/2} \\ z &= \beta_m d_m \xi_m \eta_m, \quad d_m \equiv (1 + h^2/\beta_m^2)^{1/2} \end{aligned}$$

в которых половина эллипса $r^2 + z^2/h^2 \leq 1$, $r \geq 0$ отображается на прямоугольник S_0 :

$$(4.2) \quad -\alpha_m \leq \xi_m \leq \alpha_m, \quad \alpha_m \leq \eta_m \leq 1, \quad \alpha_m \equiv h/(h^2 + \beta_m^2)^{1/2}$$

В новых переменных уравнение (2.2) имеет счетное количество ограниченных решений, выражающихся через присоединенные полиномы Лежандра $P_l^{(m)}$:

$$A_{m,l} = P_l^{(m)}(\xi_m) P_l^{(m)}(\eta_m)$$

Индекс l может быть равен любому целому числу, большему чем $|m| - 1$. Краевое условие (2.3) сводится к уравнению

$$(4.3) \quad \left(\frac{1 - \alpha_m^2}{\alpha_m} \frac{d}{d\alpha_m} - \frac{2m}{\sigma_m} \right) P_l^{(m)}(\alpha_m) = 0$$

из которого определяется α_m и дисперсионная связь $\omega_0(m, h)$. При этом необходимо учитывать соотношение

$$\sigma_m^2 = 4\alpha_m^2/[h^2 + (1 - h^2)\alpha_m^2]$$

После того как решение в нулевом приближении представлено в виде суммы гармоник

$$(4.4) \quad \sum_{m,l} a_{m,l} A_{m,l} e^{i(m\theta - \omega_0 \tau)}$$

с некоторым набором коэффициентов $a_{m,l}$, встает вопрос о вычислении первого приближения. Для полного решения задачи устойчивости необходимо иметь ответ для любого набора коэффициентов $a_{m,l}$. Оказывается, что в зависимости от того, какие члены представлены в (4.4), величина ω_1 может быть как вещественной, так и комплексной. Классификация случаев проводится посредством следующих общих утверждений.

1°. Если нулевое приближение выбрано в виде одной гармоники (одного члена в (4.4)) с любым значением m , то величина ω_1 действительна.

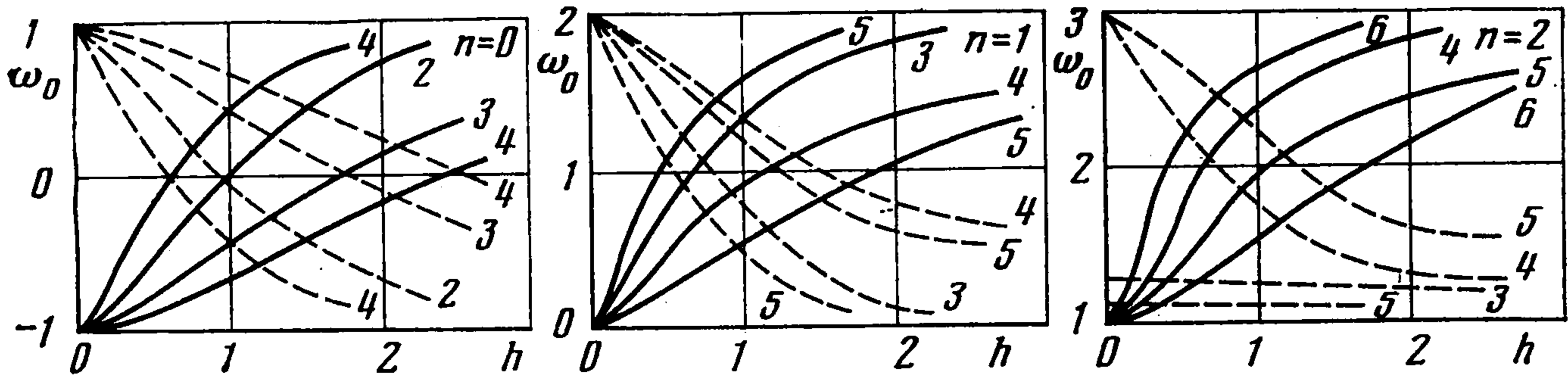
2°. Пусть сумма (4.4) составлена из произвольного количества слагаемых. Если среди них нет членов с различными m , но одинаковыми ω_0 (отсутствие вырождения), то ω_1 действительны.

3°. При наличии таких членов (случай вырождения) возможны два различных варианта. Если среди этих членов нет двух с $m = m_1$ и $m = m_2$, таких, что $|m_1 - m_2| = 2$, то величина ω_1 действительна. Если же такие слагаемые есть, то всегда имеют место комплексные значения ω_1 .

4°. На плоскости h, ε области неустойчивости ($\text{Im } \omega_1 \neq 0$) имеют вид «резонансных» зон. Уравнение каждой из этих зон записывается в форме $|h - h_0| \leq \varepsilon h_*$ с постоянными h_0 и h_* . Величина h_0 есть значение h , при котором имеет место упомянутое выше вырождение с $|m_1 - m_2| = 2$.

Части сформулированных утверждений, касающиеся существования неустойчивости ($\text{Im } \omega_1 \neq 0$), доказываются способом, по существу повторяющим рассуждения п. 3. Утверждения о вещественности ω_1 более простые и получаются аналогично.

Ниже рассматриваются простейшие случаи, к изучению которых сводится доказательство неустойчивости.



Фиг. 1

Согласно сказанному, функция p_0 нулевого приближения для «опасных» возмущений записывается в виде, обобщающем (3.1):

$$(4.5) \quad p_0 = aA(\xi, \eta) e^{i(n+1)\theta} + \bar{a}\bar{A}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) e^{i(n-1)\theta}$$

(n — произвольное целое число). Для сокращения записи в (4.5) и везде ниже буквами без индексов и без черты сверху обозначаются величины с индексами $n+1$, а с чертой сверху — с индексами $n-1$. Так, в (4.5) принято $a \equiv a_{n+1, l}$, $\bar{a} \equiv a_{n-1, \bar{l}}$,

$$A \equiv A_{n+1, l}, \quad \bar{A} \equiv A_{n-1, \bar{l}}, \quad \xi \equiv \xi_{n+1}, \quad \eta \equiv \eta_{n+1}, \quad \bar{\xi} \equiv \xi_{n-1}$$

$\bar{\eta} \equiv \eta_{n-1}$; l и \bar{l} — независимые целые числа, такие, что $l \geq |n+1|$, $\bar{l} \geq |n-1|$.

Запись (4.5), так же как и (3.1), означает существование двух решений с одной и той же частотой ω_0 . Это возможно не при любых высотах h , а только при счетном наборе значений $h = h_0$, соответствующем на плоскости ω_0, h точкам пересечения дисперсионных кривых $\omega_0(n-1, h)$ и $\omega_0(n+1, h)$. На фиг. 1 представлены пересекающиеся семейства дисперсионных кривых $\omega_0(m, h)$ (4.3) при $m = n \pm 1$ для $n = 0, 1, 2$. Сплошными линиями нанесены кривые для гармоник $n+1$, пунктирными — для $n-1$. Цифра у кривой задает значение l . Следует обратить внимание, что некоторым парам значений m, l соответствуют на фиг. 1 по две кривые.

Функциональный вид решения в первом приближении строится по (4.5), (1.4), (1.6) и является обобщением (3.5)

$$p_1 = Ve^{i(n+1)\theta} + \bar{V}e^{i(n-1)\theta} + Ce^{i(n+3)\theta} + \bar{C}e^{i(n-3)\theta}$$

Величины $B, C; \bar{B}, \bar{C}$ — подлежащие определению функции $\xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}$. Обобщение уравнений (3.6) записывается в форме

$$(4.6) \quad \begin{aligned} LB &= a\omega_1 f_1 + \bar{a}f_2 \\ \bar{L}\bar{B} &= \bar{a}\omega_1 \bar{f}_1 + af_2 \\ L &\equiv L_{n+1}(\xi, \eta), \quad \bar{L} \equiv L_{n-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ L_m(\xi_m, \eta_m) &\equiv N_m(\xi_m) - N_m(\eta_m) \\ N_m(x) &\equiv (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2}{1-x^2} \\ f_1 &\equiv \frac{8d^2}{\sigma^3} (\xi^2 - \eta^2) A_{zz}, \quad \bar{f}_1 \equiv \frac{8\bar{d}^2}{\bar{\sigma}^3} (\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2) \bar{A}_{zz} \\ f_2 &\equiv d^2 (\xi^2 - \eta^2) \frac{\sigma+2}{2\sigma} \left[\beta^2 \bar{A}_{zz} + \frac{2n}{r} \left(\frac{n-1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \bar{A} \right] \\ \bar{f}_2 &\equiv \bar{d}^2 (\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2) \frac{\bar{\sigma}-2}{2\bar{\sigma}} \left[\beta^2 A_{zz} + \frac{2n}{r} \left(\frac{n+1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) A \right] \\ \sigma &\equiv \sigma_{n+1}, \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma_{n-1}, \quad \beta \equiv \beta_{n+1}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta_{n-1} \\ d &\equiv d_{n+1}, \quad \bar{d} \equiv d_{n-1} \end{aligned}$$

Обозначения d_m, β_m, σ_m взяты из (4.1), (2.2).

Аналогично из граничных условий (1.6) следует выполнение на границах прямоугольника S_0 (4.2) равенств

$$(4.7) \quad \begin{aligned} GB &= \alpha^2 (\xi^2 - \eta^2) [a (\omega_1 g_1 + h_1 g_3) + \bar{a} g_2] \\ \bar{G}\bar{B} &= \bar{\alpha}^2 (\bar{\xi}^2 - \bar{\eta}^2) [\bar{a} (\omega_1 \bar{g}_1 + h_1 \bar{g}_3) + a \bar{g}_2] \\ G &\equiv G_{n+1}(\xi, \eta), \quad \bar{G} \equiv G_{n-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ G_m(\xi_m, \eta_m) &\equiv (\alpha_m^2 - \xi_m^2) Q_m(\eta_m) - (\alpha_m^2 - \eta_m^2) Q_m(\xi_m) \\ Q_m(x) &\equiv (1 - x^2) x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2m\alpha_m^2}{\sigma_m} \\ g_1 &\equiv \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{4}{\sigma h_0^2} z A_z - (n+1) A \right] \\ \bar{g}_1 &\equiv \frac{2}{\bar{\sigma}^2} \left[\frac{4}{\bar{\sigma} h_0^2} z \bar{A}_z - (n-1) \bar{A} \right] \\ g_2 &\equiv \frac{\sigma+2}{2\sigma} [r \bar{A}_r - (n-1) \bar{A}], \quad g_3 \equiv -\frac{2\beta^2}{h_0^3} z A_z \\ \bar{g}_2 &\equiv \frac{\bar{\sigma}-2}{2\bar{\sigma}} [r A_r + (n+1) A], \quad \bar{g}_3 \equiv -\frac{2\bar{\beta}^2}{h_0^3} z \bar{A}_z \end{aligned}$$

В целях компактности записи в правых частях (4.6), (4.7) сохранены производные по r и z , которые простым, но несколько громоздким способом выражаются через производные по ξ_m и η_m . Кроме того, в соответствии с результатом, сформулированным в утверждении 4°, в (4.7) введено

n	l	ω_0	h_0	ω_*	h_*
0	2	0	1	0,5	0,5
0	3	0	1,803	0,518	1,634
0	4	0	2,529	0,524	3,341
0	4	0,548	1,315	0,015	0,060
0	4	0	0,593	0,547	0,709
1	3	1,087	0,772	0,519	0,643
1	4	1,062	1,382	0,453	1,205
1	5	0,876	1,571	0,455	10,416
1	5	1,389	0,793	0,460	3,763
1	5	0,550	1,037	0,251	1,159
1	5	1,012	0,486	0,632	0,847
2	4	2,110	0,645	0,521	0,577
2	5	2,078	1,157	0,967	3,154
2	5	1,069	0,190	0,761	2,101

$h = h_0 + \varepsilon h_1$, т. е. величина h считается мало отличающейся от «резонансного» значения h_0 .

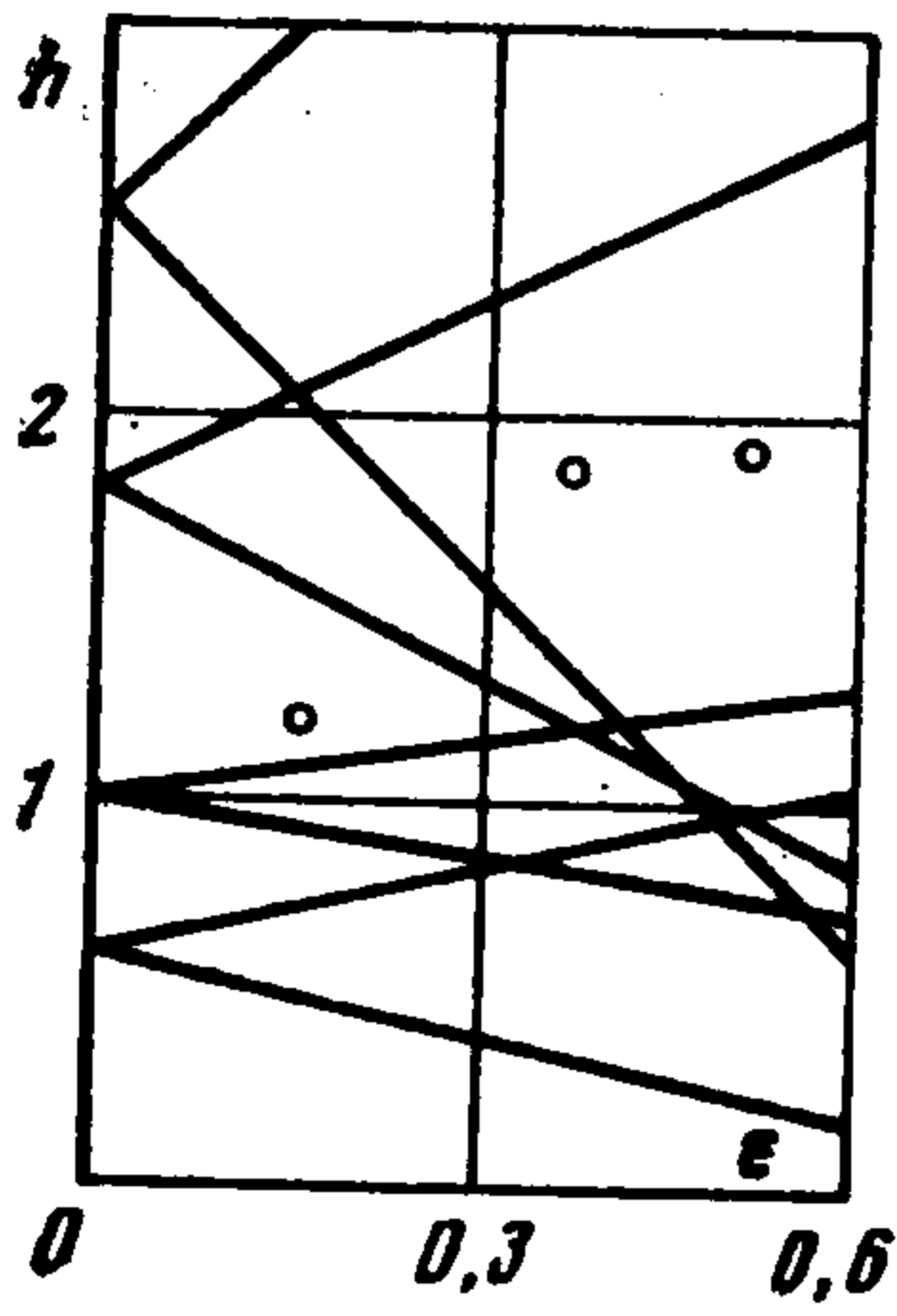
Далее используется равенство Грина, которое, например, для самосопряженного оператора L записывается в форме

$$vLu - uLv = [(1 - \xi^2)(vu_\xi - uv_\xi)]_\xi - [(1 - \eta^2)(vu_\eta - uv_\eta)]_\eta$$

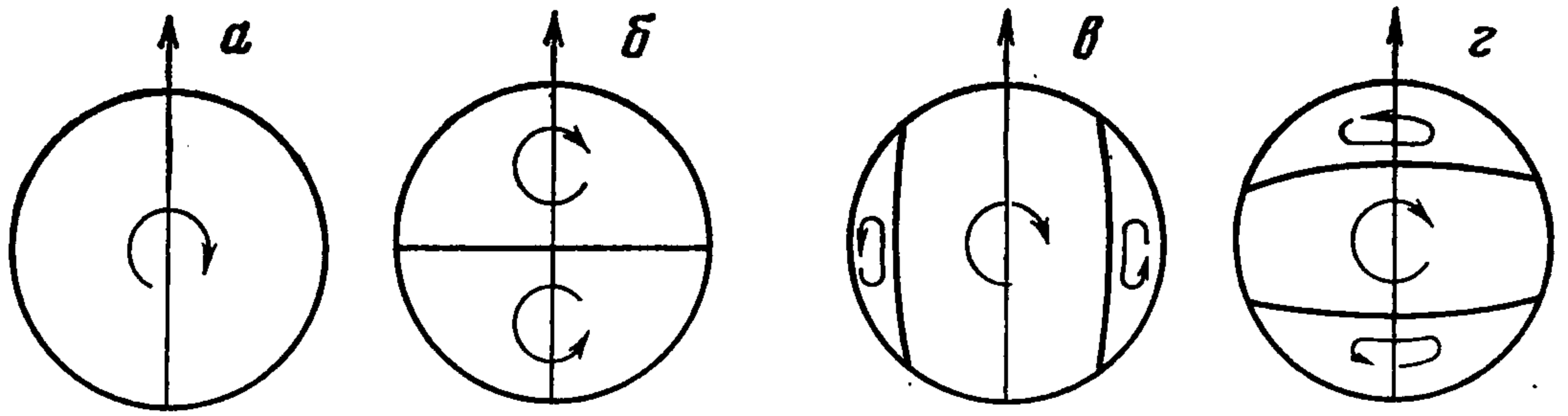
Выбирая $v = A$, $u = B$, интегрируя полученное равенство по площади S_0 (4.2) и далее действуя так же, как при выводе (3.8), можно получить следующие уравнения:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} a (\omega_1 \kappa_1 + h_1 \kappa_3) + \bar{a} \kappa_2 &= 0 \\ \bar{a} (\omega_1 \bar{\kappa}_1 + h_1 \bar{\kappa}_3) + a \bar{\kappa}_2 &= 0 \\ \kappa_i &\equiv F_i + V_i, \quad F_i \equiv \int_{S_0} f_i A d\xi d\eta, \quad f_3 \equiv 0, \\ V_i &\equiv \alpha \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} g_i A |_{\eta=\alpha} d\xi + \int_{\alpha}^1 g_i A |_{\xi=\alpha} d\eta + \int_{\alpha}^1 g_i A |_{\xi=-\alpha} d\eta \right), \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Представления для $\bar{\kappa}_i$, получаются введением черточек над α , A , ξ , η , f_i , g_i в выражениях для κ_i .



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие существования нетривиального решения системы (4.8) приводит к выражению

$$\omega_1 = \{-h_1(\kappa_1\bar{\kappa}_3 + \bar{\kappa}_1\kappa_3) \pm [h_1^2(\kappa_1\bar{\kappa}_3 - \bar{\kappa}_1\kappa_3)^2 + 4\kappa_1\bar{\kappa}_1\kappa_2\bar{\kappa}_2]^{1/2}\} / (2\kappa_1\bar{\kappa}_1)$$

Наименьшее значение подкоренного выражения достигается при $h_1 = 0$. Неустойчивости соответствует $\kappa_2\bar{\kappa}_2/\kappa_1\bar{\kappa}_1 < 0$. В этом случае при $h_1 = 0$

$$(4.9) \quad \omega_1 = \pm i\omega_*, \quad \omega_* \equiv \sqrt{-\kappa_2\bar{\kappa}_2/\kappa_1\bar{\kappa}_1}$$

Неустойчивость имеет место при

$$(4.10) \quad h_1 < h_* \equiv 2 \sqrt{-\kappa_1\bar{\kappa}_1\kappa_2\bar{\kappa}_2 / |\kappa_1\bar{\kappa}_3 - \bar{\kappa}_1\kappa_3|}$$

В случае $n = 0$ часть точек пересечения дисперсионных кривых лежит на оси $\omega_0 = 0$ (фиг. 1). При этом $\bar{\kappa}_1 = -\kappa_1$, $\bar{\kappa}_2 = \kappa_2$, $\bar{\kappa}_3 = \kappa_3$ и из (4.9), (4.10) автоматически вытекает неустойчивость. Этот результат — частный случай (3.10), (3.11).

5. Результаты расчетов. Сравнение с экспериментом. Для всех точек пересечения кривых ω_0 ($n \pm 1, h$), попавших на фиг. 1, проводились расчеты величин ω_0 , h_0 , ω_* , h_* . Выбор нескольких первых из счетного набора кривых связан с тем, что возмущения с наименьшими l (крупномасштабные) наиболее существенны для объяснения экспериментальных фактов [1].

После определения значений ω_0 , h_0 проводились вычисления ω_* (4.9) и h_* (4.10). Оказалось, что все точки пересечения разделяются на две группы. К первой из них относятся точки пересечения кривых с разными индексами l . Для всех этих точек $\omega_* = 0$, что соответствует нейтральной устойчивости в первом приближении. Во вторую группу входят точки пересечения кривых с одинаковыми значениями l . Для них значения ω_* вещественны, так что амплитуды возмущений в первом приближении всегда экспоненциально нарастают. В таблице представлены значения ω_0 , h_0 , ω_* , h_* для точек пересечения второй группы.

Общий вывод, вытекающий из сравнения величин ω_* и h_* в различных точках (см. таблицу), состоит в том, что какого-либо ослабления неустойчивости с ростом n или l не происходит. В то же время в экспериментах [1] наблюдались только неустойчивости с $n = 0$ и $\omega_0 = 0$. Эта особенность соотношения теории и эксперимента остается пока необъясненной.

При $n = 0$, $\omega_0 = 0$ имеется хорошее согласие предсказаний теории с результатами экспериментов. На фиг. 2 нанесены зоны неустойчивости $|h - h_0| \leq \epsilon h_*$ на плоскости h, ϵ , соответствующие случаям $n = 0$, $\omega_0 = 0$ из таблицы. На фиг. 3 даны качественные картины направлений поля скорости неустойчивых мод в меридиональном сечении эллипсоида в каждой из приведенных на фиг. 2 зон. Фиг. 3, а соответствует $h_0 = 1, l = 2$; б — $h_0 = 1,803, l = 3$; в — $h_0 = 0,593, l = 4$; г — $h_0 = 2,592, l = 4$. Случаи $l = 2, 3, 4$ по терминологии [1] соответствуют одно-, двух- и трехвихревой неустойчивости. Соответствие картин фиг. 3 зонам на фиг. 2 просто усматривается из сравнения значений h_0 . На фиг. 2 точками нанесены значения h, ϵ в экспериментах [1]. Две верхние точки попадают почти в середину зоны, соответствующей фиг. 3, б. В согласии с этим предсказанием теории в экспериментах наблюдается двухвихревая неус-

тойчивость. В нижней точке на фиг. 2 как теория, так и эксперимент отвечают устойчивому вращению жидкости. Согласно теории с экспериментом проявляется также в правильном предсказании нулевой скорости вращения неустойчивой вихревой структуры $\omega_0 = 0$.

Сравнивая результаты изложенной теории с выводами авторов [1], следует отметить три момента. Во-первых, предсказания [1] касаются только случаев $n = 0$, $\omega_0 = 0$. Во-вторых, в этих случаях имеется совпадение параметров h_0 в обеих теориях, но h_* , вообще говоря, различаются. В-третьих, имеющиеся в настоящее время данные опытов находятся в согласии как с [1], так и с настоящей теорией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. Румянцев В. В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 6, с. 119—140.
4. Магнус К. Гироскоп. М.: Мир, 1974. 526 с.
5. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 440—445.
6. Владимиров В. А., Рыбак Л. Я., Тарасов В. Ф. Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости линейного вихря с деформированным ядром. — ПМТФ, 1983, № 3, с. 61—69.
7. Владимиров В. А. К устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в эллиптическом цилиндре. — ПМТФ, 1983, № 4, с. 118—124.
8. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф., Рыбак Л. Я. Устойчивость эллиптически деформированного вращения идеальной несжимаемой жидкости в поле сил Кориолиса. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1983, т. 19, № 6, с. 586—594.
9. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Резонансная неустойчивость вращающихся слабо деформированных течений. — В кн.: Математические проблемы гидродинамики. Новосибирск; Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983, с. 39—61.
10. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.

Новосибирск¹

Поступила в редакцию
27.VI.1984