Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 521.1

ОБ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Морозов А. Д.

Рассматриваются неконсервативные периодические по времени возмущения задачи Кеплера. Приводится усредненная по фазам система, которая в отсутствие резонансных режимов определяет эволюцию в системе. Исследуется качественное поведение решений в резонансных зонах. В зависимости от структуры поведения решений резонансы делятся на проходимые, частично проходимые и непроходимые. Устанавливается ограниченность множества частично проходимых резонансов, что позволяет во многих случаях определить эволюцию в системе при наличии резонансных режимов. Рассмотрение иллюстрируется примером. Показывается, что постоянная составляющая у периодической функции в возмущении приводит к тому, что эволюционный процесс становится неоднонаправленным.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение «частицы» в поле тяготения в среде, сопротивления R которой периодически зависит от времени. Если r, φ — полярные координаты в плоскости орбиты, то нормальная и тангенциальная составляющие силы сопротивления соответственно равны, $-mRr^{\cdot}/\nu$, $-mR\varphi^{\cdot}r/\nu$. Здесь m — масса частицы, R — сопротивление, приходящееся на единицу массы частицы, ν — орбитальная скорость [1]. Положим $R = \varepsilon g\,(r, \nu, \Omega t)$, где ε — малый положительный параметр, функция g, по крайней мере, непрерывна по t и периодична по Ωt с периодом 2π, Ω — частота возмущения. Предположим также, что g аналитическая по r и $\nu\,(r)$ в области $r \geqslant r_- > 0$. Уравнения движения частицы можно записать в виде

$$r^{\cdot\cdot} - \alpha^2/r^3 + M/r^2 = -\varepsilon g r^{\cdot}/\nu, \quad \alpha^{\cdot} = -\varepsilon\alpha g/\nu \tag{1.1}$$

где $\alpha = r^2\varphi^{\cdot}$ — кинетический момент частицы, $M = G\,(m_0 + m)$, m_0 — масса центрального тела, G — гравитационная постоянная.

Характерной особенностью системы (1.1) являются резонансы — целочисленные соотношения между частотой возмущения Ω и собственной частотой (средним угловым движением ω):

$$p\omega = q\Omega \tag{1.2}$$

Если рассмотреть две (или более) не взаимодействующие одна с другой частицы с частотами ω_1 и ω_2, то из резонансных соотношений вида (1.2) для этих частиц следует соизмеримость частот ω_1 и ω_2.

Такого типа соизмеримости хорошо известны для Солнечной планетной системы и спутниковых систем [2, 3]. Одной из причин, приведшей к этому, является результат действия сил сопротивления среды и приливных сил. Отметим также принципиальную роль сил сопротивления при движении частицы в атмосфере.

Цель рассмотрения модели (1.1) — изучение результата действия неконсервативных сил сопротивления среды на движение частицы и, в первую очередь, выяснение структуры резонансных зон и возможности застревания частицы на резонансах. Исследование системы (1.1) представляет и определенный математический интерес. Для систем с $^3/_2$ степенями свободы подобная задача была рассмотрена в [4, 5]. Система (1.1) — по существу система с двумя степенями свободы и поэтому при ее исследовании возникают новые проблемы.

При $\varepsilon = 0$ система (1.1) допускает первые интегралы

(1.3) $$r^{\cdot 2}/2 + \alpha^2/(2r^2) - M/r = h, \quad \alpha = \text{const}$$

Эллиптическим орбитам соответствуют значения $h \in (-M^2/(2\alpha^2), 0)$, круговой — $h = -M^2/(2\alpha^2)$, параболической — $h = 0$. Используя (1.3), получаем известные соотношения

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad \theta = \omega t = \xi - e\sin\xi$$

определяющие решение системы. Здесь a — большая полуось кеплеровой орбиты, e — эксцентриситет, θ — средняя аномалия, ξ — эксцентрическая аномалия. В области, соответствующей значениям $h \in [-M^2/(2\alpha^2), 0)$, $\alpha > 0$, заменим переменные $(r, r^{\cdot})$ на переменные действия I, угол θ:

$$I(h) = \frac{1}{2\pi}\oint r^{\cdot}\, dr = \frac{M}{\sqrt{-2h}} - \alpha, \quad 0 \leqslant I < \infty$$

$$\theta = \frac{\partial S(r, I)}{\partial I}, \quad S = \int\limits_{r_*}^{r}\left[2\left(h(I) - \frac{\alpha^2}{2x^2} + \frac{M}{x}\right)\right]^{1/2} dx$$

В новых переменных невозмущенная система запишется в виде $I^{\cdot} = 0$, $\theta^{\cdot} = \omega(I, \alpha)$, $\alpha^{\cdot} = 0$. При этом для параметров эллиптической орбиты получаем следующие соотношения:

(1.4) $$a = -\frac{M}{2h} = \frac{(I+\alpha)^2}{M}, \quad e = \left[1 - \frac{\alpha^2}{(I+\alpha)^2}\right]^{1/2}$$
$$\omega = \frac{M^2}{(I+\alpha)^3}$$

Заметим, что условие $\alpha = 0$, $I \neq 0$ приводит к $e = 1$. Однако в этом случае первое уравнение системы (1.1) вырождается и движение происходит не по параболической траектории, а по траектории, для которой $r \to 0$ при $t \to \infty$ (асимптотическое падение).

Далее, согласно [1], имеем

(1.5) $$v = \left[M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{2M}{r} - \frac{M^2}{(I+\alpha)^2}\right]^{1/2}$$

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. В новых переменных система (1.1) запишется в виде

(1.6) $$\begin{aligned} I^{\cdot} &= -\varepsilon g(r, v, \psi)\, r^{\cdot} r_\theta'/v + (r_\alpha' r_\theta'' - r_\theta' r_\alpha'')\,\alpha^{\cdot} \equiv \varepsilon F_1 \\ \alpha^{\cdot} &= -\varepsilon\alpha g(r, v, \psi)/v \equiv \varepsilon F_2 \\ \theta^{\cdot} &= \omega + \varepsilon g(r, v, \psi)\, r^{\cdot} r_I'/v + (r_I' r_\alpha'' - r_\alpha' r_I'')\,\alpha^{\cdot} \equiv \omega + \varepsilon F_3 \\ \psi^{\cdot} &= \Omega; \quad (F_k = F_k(I, \theta, \alpha, \psi),\ k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Система (1.6) определена в $G \times S^1 \times S^1$, где $G = \{(I, \alpha): 0 \leqslant I < \infty, \sqrt{Mr_-} < \alpha < \infty\}$. Наряду с (1.6) рассмотрим определенную в G усредненную по фазам систему (УФС)

(1.7) $$I^{\cdot} = \varepsilon B_1(I, \alpha), \quad \alpha^{\cdot} = \varepsilon B_2(I, \alpha)$$
$$B_k = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_k(I, \theta, \alpha, \psi)\, d\theta\, d\psi$$

Предположим, что система (1.7) имеет в G не более, чем конечное множество состояний равновесия. Если бы в системе (1.6) не существовало резонансных режимов, то (1.7) описывала бы эволюцию в исходной системе. Условие резонанса (1.2), используя последнее соотношение в (1.4), перепишем в виде $I + \alpha = (pM^2/(q\Omega))^{1/3}$. Это условие выделяет на плоскости (I, α) прямые, которые будем называть резонансными. Как известно [6], не для каждой точки резонансной прямой в системе (1.6) существуют периодические решения соответствующего периода.

Обозначим M_{pq} множество резонансных точек (I_{pq}, α_{pq}), для которых такие решения существуют. В данной работе показывается, что при наличии неконсервативного возмущения ($B_{1,2} \not\equiv 0$) множество M_{pq} не более чем конечно. В этом случае эволюция в системе (1.6) определяется движением по траекториям УФС до тех пор, пока изображающая точка $(I(t), \alpha(t))$ не попадет в окрестность резонансной точки $(I_{pq}, \alpha_{pq}) \in M_{pq}$. Далее в работе проводится качественное исследование поведения решений системы (1.6) в окрестностях резонансных точек. Показывается, что изображающая точка либо «застревает» на данном резонансе, либо проходит его и движется далее по траектории УФС. Если же изображающая точка не застревает ни на одном резонансе, то при $t \to \infty$ она стремится к притягивающему множеству УФС, либо покидает рассматриваемую область G. Здесь, как и в [4], резонансы можно разделить на проходимые, частично проходимые и непроходимые. В работе решается вопрос и об устойчивости резонансных режимов. Рассмотрение иллюстрируется на примере $g = \nu\,[\delta - (b + \sin\psi)/r]$,[1] где δ, b — параметры.

[1] В [7] рассматривался пример $g = \nu - f(\psi)$. Однако исследование ограничивалось по существу случаем $f \equiv 0$, в котором частица асимптотически падает (при $t \to \infty$) на центральное тело. Приведенная же в [7] усредненная система для неавтономного случая не описывает структуру резонансной зоны и не решает вопроса об устойчивости резонансных режимов.

2. Вспомогательные преобразования исходной системы в резонансном случае. Делая в (1.6) замену

$$I = I_{pq} + \mu x_1, \quad \alpha = \alpha_{pq} + \mu x_2, \quad \theta = \Phi + q\psi/p, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}$$

раскладывая правые части полученной системы по степеням μ и выделяя члены, не зависящие от ψ («автономные члены»), придем к системе (подробнее см. в [8]; отметим лишь, что $u_k = x_k + O(\mu)$, $\Phi = v + O(\mu^2)$)

$$\begin{aligned} &u_k^{\boldsymbol\cdot} = \mu A_k + \mu^2 (P_{k1}u_1 + P_{k2}u_2) + \mu^3 S_k \\ &v^{\boldsymbol\cdot} = \mu b_1 (u_1 + u_2) + \mu^2 [b_2 (u_1^2 + u_2^2) + Q] + \mu^3 S_3 \\ &\psi^{\boldsymbol\cdot} = \Omega, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$A_k = \frac{1}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi p} F_k\,d\psi, \quad Q = \frac{1}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi p} F_3\,d\psi \tag{2.2}$$

$$P_{kj} = \frac{1}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi p} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\,d\psi, \quad k, j = 1, 2$$

$$F_l = F_l\,(I_{pq}, \alpha_{pq}, v + q\psi/p, \psi), \quad l = 1, 2, 3, \quad y_1 = I, \quad y_2 = \alpha$$

$$A_k = A_k\,(v; I_{pq}, \alpha_{pq}), \quad P_{kj} = P_{kj}\,(v; I_{pq}, \alpha_{pq})$$

$$b_1 = -3M^{-5/3}\,(q\Omega/p)^{4/3}, \quad b_2 = 6M^{-7/3}\,(q\Omega/p)^{5/3}$$

Функции $S_k\,(v, u_1, u_2, t; \mu)$ — аналитические по u_1, u_2, μ при достаточно малых μ, аналитические и периодические по v с периодом $2\pi p/(q\Omega)$, непрерывные и периодические по t с периодом $2\pi p/\Omega$. Делая в (2.1) замену $u_k = \eta_k - \mu Q/(2b_1)$ $(k = 1, 2)$ и пренебрегая членами $O(\mu^3)$, получим систему

$$\begin{aligned} &\eta_k^{\boldsymbol\cdot} = \mu A_k\,(v) + \mu^2\,[(P_{k1}\,(v) + Q_v'\,(v)/2)\,\eta_1 + (P_{k2}\,(v) + \\ &\quad + Q_v'\,(v)/2)\,\eta_2], \quad k = 1, 2 \\ &v^{\boldsymbol\cdot} = \mu b_1\,(\eta_1 + \eta_2) + \mu^2 b_2\,(\eta_1^2 + \eta_2^2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Систему (2.3) в отличие от системы (1.7) (УФС) будем называть усредненной в окрестности резонанса системой (УОРС).

Для дальнейшего удобно преобразовать систему (2.3) с помощью линейной замены $\gamma_1 = \eta_1 + \eta_2$, $\gamma_2 = \eta_2$ к виду

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &v^{\cdot} = \mu b_1 \gamma_1 + \mu^2 Q_1, \quad \gamma_1^{\cdot} = \mu (A_1 + A_2) + \mu^2 Q_2, \; \gamma_2^{\cdot} = \mu A_2 + \\ &+ \mu^2 Q_3 \\ &Q_1 = b_2 [(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + \gamma_2^2], \quad Q_2 = (P_{11} + P_{21} + Q_v') \gamma_1 + \\ &+ (P_{22} - P_{11} + P_{12} - P_{21}) \gamma_2, \quad Q_3 = (P_{21} + \\ &+ Q_v'/2) \gamma_1 + (P_{22} - P_{21}) \gamma_2 \end{aligned}$$

3. Исследование УОРС. Прежде всего рассмотрим укороченную систему

$$(3.1)\qquad v^{\cdot} = \mu b_1 \gamma_1, \quad \gamma_1^{\cdot} = \mu (A_1 (v) + A_2 (v)), \quad \gamma_2^{\cdot} = \mu A_2 (v)$$

Дифференцируя первое уравнение по t, приходим к фазовому уравнению

$$(3.2)\qquad v^{\cdot\cdot} - \mu^2 b_1 (A_1 (v) + A_2 (v)) = 0$$

Если система

$$(3.3)\qquad A_k (v, I, \alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \quad I + \alpha = [M^2/(q\Omega/p)]^{1/3}$$

имеет простой корень v_0, I_{pq}, α_{pq}, то при этих значениях I и α у системы (3.1) существуют состояния равновесия с $v = v_0$. При этом состояния равновесия неизолированы (заполняют прямую $\gamma_1 = 0$, $v = v_0$). Отметим, что фазовым пространством системы (3.1) является прямое произведение $D \times R^1$, где $D = R^1 \times S^1$ — фазовое пространство системы (3.2). Поэтому для построения фазового портрета системы (3.1) достаточно построить фазовый портрет системы (3.2).

Можно показать, что наименьший период функций $A_k (v)$ по v равен $2\pi/p$ (см. ниже (3.7)). Итак, уравнение (3.2) маятникового типа. Оно допускает первый интеграл

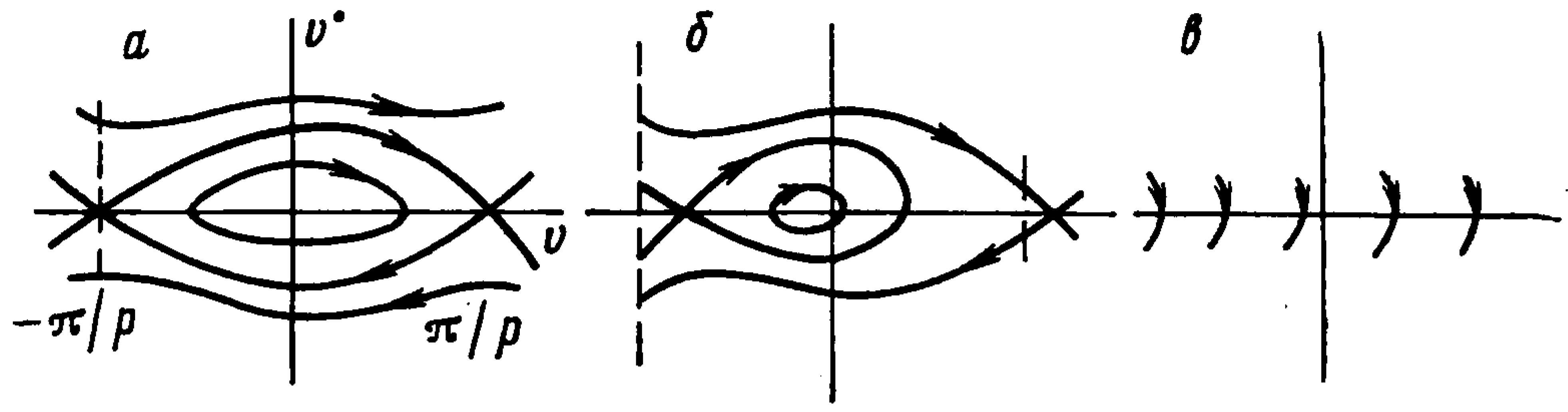
$$(3.4)\qquad v^{\cdot 2}/2 - \mu^2 b_1 V (v) = H, \quad V = \int (A_1 (v) + A_2 (v))\, dv$$

который и определяет фазовые кривые. Простое состояние равновесия ($\gamma_1 = 0$, $v = v_0$) уравнения (3.2) типа центр, если $b_1 (A_1' (v_0) + A_2' (v_0)) < 0$, и типа седло, если $b_1 (A_1' (v_0) + A_2' (v_0)) > 0$. В силу (2.2) $b_1 < 0$ и, следовательно, $A_1' (v_0) + A_2' (v_0) > 0$ — условие центра, а $A_1' (v_0) + A'_2 (v_0) < 0$ — седла. Так как $A_1' (v) + A_2' (v)$ в соседних нулях функции $A_1 (v) + A_2 (v)$ принимает значения разных знаков, то простые состояния равновесия типа центр и седло чередуются.

Представим функции $A_k (v)$ в виде

$$(3.5)\qquad A_k (v; I_{pq}, \alpha_{pq}) = A_{k*} (v; I_{pq}, \alpha_{pq}) + B_k (I_{pq}, \alpha_{pq})$$

где B_k — средние за период значения функций $A_k (v)$. Если $B_k (I_{pq}, \alpha_{pq}) = 0$, $k = 1, 2$, то точка (I_{pq}, α_{pq}) — состояние равновесия УФС. Возможный фазовый портрет уравнения (3.2) в этом случае приведен на фиг. 1, *а*. Такие резонансы будем называть непроходимыми. На фиг. 1, *б* приведен фазовый портрет для (3.2) в случае, когда $\max_v | A_{1*} + A_{2*} | > | B_1 + B_2 | > 0$. Такие резонансы будем называть частично проходимыми. Отсутствие состояний равновесия у (3.2) означает отсутствие соответствующих резонансных режимов в исходной системе (обратное, вообще говоря, неверно). Фазовый портрет уравнения (3.2) для этого случая приведен на фиг. 1, *в*. Такие резонансы будем называть проходимыми (более точные определения см. в [8]).



Фиг. 1

Заметим, что укороченная система (3.1) не решает вопроса об устойчивости резонансных режимов системы (1.6) (в классе неконсервативных систем (3.1) не является структурно устойчивой). Это приводит к необходимости исследования системы (2.4).

Пусть $G_{n\rho} = \{(I, \alpha): (I - I_n)^2 + (\alpha - \alpha_n)^2 < \rho\}$, где (I_n, α_n) — состояния равновесия УФС, для которых $I_n \geqslant 0$, $\alpha_n \geqslant \sqrt{Mr_-} > 0$, ρ — фиксированное достаточно малое положительное число. Обозначим G_* ограниченную область плоскости (I, α), получающуюся из области G выбрасыванием окрестностей $G_{n\rho}$ и «бесконечности»: $I \leqslant I_+ < \infty$, $\alpha \leqslant \alpha_+ < \infty$.

Утверждение 1. Для $(I_{pq}, \alpha_{pq}) \in G_*$ система (2.4) имеет состояния равновесия лишь для не более чем конечного множества $\{p, q\}$.

Чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что у системы (3.2) отсутствуют состояния равновесия для достаточно больших p и q. Раскладывая функции F_k в двойные ряды Фурье

$$F_k(I, \alpha, \theta, \psi) = \sum_{m,\, s=-\infty}^{\infty} F_{kms}(I, \alpha) \exp[i(m\theta + s\psi)]$$

из (2.2) получаем

$$A_k(v; I_{pq}, \alpha_{pq}) = \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{2\pi p} \sum_{m,\, s=-\infty}^{\infty} F_{kms}(I_{pq}, \alpha_{pq}) \int_0^{2\pi p} \exp\{i[m(v + q\psi/p) + s\psi]\}\, d\psi$$

Интеграл в (3.6) отличен от нуля, когда $m = np$, $s = -nq$, n — целое. Поэтому имеем

$$A_k(v; I_{pq}, \alpha_{pq}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{k,\, np,\, -nq}(I_{pq}, \alpha_{pq}) \exp(inpv) \tag{3.7}$$

Для невозмущенного решения $r(\theta)$ справедливы разложения [1]

$$r = a\left[1 + \frac{e^2}{2} - e\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(J_{m-1}(me) - J_{m+1}(me))\cos m\theta\right] \tag{3.8}$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(me)\cos m\theta$$

где $J_s(me)$ — функция Бесселя порядка s. При больших s справедлива оценка [9]

$$J_s(se) \sim \{\exp[s(\operatorname{th}\beta - \beta)]\,(2\pi s \operatorname{th}\beta)\}^{-1/2}, \quad \operatorname{ch}\beta = e^{-1} > 1 \tag{3.9}$$

Далее, справедливо разложение

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r, \nu) \exp(in\psi)$$

Тогда из (1.6), (3.8), (3.9)] и аналитичности g по r и ν в рассматриваемой области и непрерывности по t следует оценка

$$F_{k,\, np,\, -nq} \sim \exp[-C(e)\,|n|\,p]\,(|n|\,q)^{-1} \text{ при } \frac{p}{q} \to \frac{\Omega}{\omega_*} > \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad n \neq 0$$

$C(e) > 0$ для $e < 1$, $\omega_0 = M^2/a^3$, $\omega_* = \omega(I_*, \alpha_*)$, $(I_*, \alpha_*) \in G_*$.

Отсюда и из соотношений $F_{k,0,0} \equiv B_k$ $(k = 1, 2)$ вытекает требуемое утверждение.

Замечания. 1°. Если $\omega_* = \omega_0$, то при $(p/q) \to (\Omega/\omega_*)$ имеем $I \to 0$, $e \to 0$ и, следовательно, $r \to r_0 = \alpha^2/M$, $r_\theta' \to 0$. Тогда $B_1 \to 0$. При этом $B_2 \not\equiv 0$, если

$$\int_0^{2\pi} g(r_0, \nu(r_0), \psi)\, \nu^{-1}\, d\psi \not\equiv 0$$

В противном случае УФС имеет неограниченное множество состояний равновесия, что противоречит сделанному выше предположению. Если же уравнение

$$\int_0^{2\pi} g(r_0, \nu(r_0), \psi)\, \nu^{-1}\, d\psi = 0$$

имеет изолированные корни $\alpha = \alpha_j$, то $I = 0$ является координатой состояния равновесия УФС, т. е. $(I = 0,\ \alpha_j) \overline{\in} G_*$.

2°. Утверждение 1 позволяет увязать исследование системы (2.4) в окрестностях индивидуальных резонансных точек (I_{pq}, α_{pq}) с глобальным исследованием в G_* и тем самым решить вопрос об эволюции в системе (1.6).

Рассмотрим вопрос об устойчивости состояний равновесия системы (2.4). Если $v = v_0$ — координата состояния равновесия укороченной системы (3.1), то система (2.4) при условии $A_0'(v_0) + A_2'(v_0) \neq 0$ имеет изолированное состояние равновесия $(v = v_0,\ \eta_1 = \eta_2 = 0)$. Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид

$$\begin{aligned}
(3.10)\qquad & -\lambda^3 + \mu^2 a_2 \lambda^2 + \mu^2 (a_1 + O(\mu^2))\, \lambda + \mu^4 a_0 = 0\\
& a_0 = b_1 [A_1'(P_{21} - P_{22}) + A_2'(P_{12} - P_{11})]|_{v=v_0}\\
& a_1 = b_1 (A_1' + A_2')\,|_{v=v_0}, \quad a_2 = (P_{11} + P_{22} + Q_v')\,|_{v=v_0}
\end{aligned}$$

Согласно [6], имеем следующую асимптотику для корней уравнения (3.10):

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a_1}\,\mu - (a_0 - a_1 a_2)(2a_1)^{-1}\mu^2, \quad \lambda_3 = -a_0 a_1^{-1} \mu^2$$

Отсюда следует, что при выполнении условий

$$(3.11)\qquad a_1 < 0, \quad a_0 < 0, \quad a_2 < a_0/a_1$$

состояние равновесия $(v_0, 0, 0)$ системы (2.4) устойчиво (обобщенный узел). Итак, состоянию равновесия системы (3.2) типа центр при условии $a_0 < 0$, $a_2 < a_0/a_1$ отвечает устойчивое состояние равновесия УОРС. Если хотя бы одно из условий (3.11) нарушено, то состояние равновесия не будет асимптотически устойчивым (при наличии строгого неравенства — будет неустойчивым).

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned}
&\sigma(v; I_{pq}, \alpha_{pq}) =\\
&= P_{11}(v; I_{pq}, \alpha_{pq}) + P_{22}(v; I_{pq}, \alpha_{pq}) + Q_v'(v; I_{pq}, \alpha_{pq})
\end{aligned}$$

определяющую дивергенцию векторного поля УОРС. Очевидно, $\sigma(v_0) = a_2$. Используя (2.2), а также тот факт, что якобиан преобразования $(r, \dot r) \to (I, \theta)$ равен единице, получаем

$$(3.12)\qquad \sigma(v) = -\frac{1}{\pi p} \int_0^{2\pi p} g \nu^{-1}\, d\psi$$

Из (3.12), (2.2), (1.6) следует

$$(3.13)\qquad \sigma(v) = 2A_2(v)\, \alpha^{-1}$$

Тем самым доказано

Утверждение 2. Если система (2.4) имеет простое состояние равновесия $(v_0, 0, 0)$, то $\sigma(v)$ — знакопеременная функция, причем $\sigma(v_0) = a_2 = 0$.

Для установления топологии УОРС в случае знакопеременной $\sigma(v)$ перейдем в укороченной системе (3.1) в области $D_0 \times R^1$, где D_0 — область плоскости $(v, v^{\cdot})$, заполненная замкнутыми фазовыми кривыми уравнения (3.2), от переменных (v, γ_1, γ_2) к переменным (J, β, γ_2), где J — действие, β — угол. В случае $B_k = 0$ $(k = 1, 2)$ переменные действия J, угол β можно ввести не только в области колебательных движений уравнения (3.2), но также и в области вращательных движений.

В новых переменных система (2.4) примет вид (штрих означает производную по $\tau = \mu t$)

$$(3.14)\qquad \begin{gathered} J' = \mu R_1, \quad \beta' = \omega_p(J) + \mu R_2, \quad \gamma_2' = A_2(v(J, \beta)) + \mu R_3 \\ \omega_p = dH/dJ, \quad R_1 = Q_2 v_\beta' - Q_1 \gamma_{1\beta}', \quad R_2 = -Q_2 v_J' + Q_1 \gamma_{1J}' \\ R_3 \equiv Q_3 \quad (R_k = R_k(J, \beta, \eta_2), \quad k = 1, 2, 3) \end{gathered}$$

Заменой

$$\gamma = \gamma_2 - \omega_p^{-1} \int A_2(v(J, \beta))\, d\beta$$

преобразуем систему (3.14) к виду

$$(3.15)\qquad \begin{gathered} J' = \mu R_1, \quad \gamma' = \mu\, [R_3 - A_2(v(J, \beta))\, R_2 \omega_p^{-1}] \\ \beta' = \omega_p + \mu R_2 \end{gathered}$$

Правые части системы (3.15) периодические по β с периодом 2π. Усредняя (3.15) по β, приходим к системе

$$(3.16)\qquad \begin{gathered} \bar{J}' = \mu C_1(\bar{J}, \bar{\gamma}), \quad C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_3 - A_2 R_2 \omega_p^{-1})\, d\beta \\ \bar{\gamma}' = \mu C_2(\bar{J}, \bar{\gamma}), \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1\, d\beta \end{gathered}$$

Если система (3.16) имеет простое устойчивое состояние равновесия $(\bar{J}_0, \bar{\gamma}_0)$ в области допустимых значений $\bar{J}$, $\bar{\gamma}$, то, как известно (например, [10]), в УОРС ему отвечает устойчивый предельный цикл, если $\bar{J}_0 \neq 0$, либо устойчивое состояние равновесия, если $\bar{J}_0 = 0$. Если же (3.16) имеет устойчивый грубый предельный цикл с частотой l, то в УОРС ему соответствует устойчивый двумерный инвариантный тор T^2, который делит фазовое пространство УОРС. Решения на T_2 двухчастотны с частотами ω_p и l. Как решение на цикле, так и решения на торе длиннопериодические, ибо $\tau = \mu t$. В свою очередь, простым устойчивым состояниям равновесия УОРС отвечают устойчивые периодические решения в (1.6), устойчивым грубым предельным циклам — двумерные устойчивые инвариантные торы, устойчивым двумерным торам — устойчивые трехмерные торы.

4. Пример. Положим $g = \nu(\delta - f(\psi)/r)$, где δ — параметр.

1°. Пусть $f = \sin\psi$. Тогда, согласно (1.6), имеем

$$(4.1)\qquad \begin{gathered} F_1 = -\left(\delta - \frac{\sin\psi}{r}\right) r^{\cdot} r_\theta' - \alpha\left(\delta - \frac{\sin\psi}{r}\right)\left(\frac{\alpha}{\omega r^2} - 1\right), \\ F_2 = -\alpha\left(\delta - \frac{\sin\psi}{r}\right) \end{gathered}$$

Прежде всего вычислим правые части УФС. Подставляя (4.1) в последнее соотношение (1.7), находим

$$(4.2)\qquad B_1 = -\delta I, \; B_2 = -\delta\alpha$$

В этом случае система (1.7) (УФС) имеет единственное состояние равновесия в начале координат типа дикритический узел (устойчивый при $\delta > 0$). Поэтому в отсутствие резонансов частица асимптотически падает при $\delta > 0$ на центральное тело.

Перейдем к вычислению правых частей укороченной системы (3.1). В соответствии с (2.2) имеем

$$(4.3)\qquad \begin{gathered} A_1 \equiv B_1 + A_{1*}(v), \quad A_2 = B_2 + A_{2*}(v) \\ A_{1*} = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} \left[r^{\cdot} r_\theta' \frac{\sin\psi}{r} + \alpha \frac{\sin\psi}{r}\left(\frac{\alpha}{\omega r^2} - 1\right)\right] d\psi \end{gathered}$$

$$A_{2*}=\frac{\alpha}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi p}\frac{\sin\psi}{r}\,d\psi$$

Из (3.8) находим

(4.4) $$r_\theta'=ae\sum_{n=1}^{\infty}\left(J_{n-1}(ne)-J_{n+1}(ne)\right)\sin n\theta$$

Подставляя (4.4) и второе выражение из (3.8) в (4.3) и учитывая, что $r^{\cdot}=\omega r_\theta'$, получаем

(4.5) $$A_{1*}=A_{1p}\sin pv,\quad A_{2*}=A_{2p}\sin pv$$

$$A_{1p}=\frac{\omega ae^2}{4}\left[\left(J_{p/2-1}\left(\frac{pe}{2}\right)-J_{p/2+1}\left(\frac{pe}{2}\right)\right)^2-\right.$$

$$\left.-2J_p(pe)\left(J_{p-1}(pe)-J_{p+1}(pe)\right)^2\right]-\frac{3\alpha^2}{\omega a^3}\left(J_p(pe)+J_p^3(pe)+\right.$$

$$\left.+J_{p/2}^2\left(\frac{pe}{2}\right)\right)+\frac{\alpha}{a}J_p(pe),\quad p\text{ — четно},\quad q=1$$

$$A_{1p}=-\frac{\omega ae^2}{2}J_p(pe)\left(J_{p-1}(pe)-J_{p+1}(pe)\right)^2-$$

$$-\frac{3\alpha^2}{\omega a^3}\left(J_p(pe)+J_p^3(pe)\right)+\frac{\alpha}{a}J_p(pe),\quad p\text{ — нечетно},\quad q=1$$

$$A_{2p}=-\alpha a^{-1}J_p(pe),\ q=1$$

При $q>1$ имеем $A_{1p}=0$, $A_{2p}=0$.

Для решения вопроса о существовании состояний равновесия у системы (3.1) и, соответственно, у системы (2.4) рассмотрим систему (3.3). Для определенности положим, что p — нечетно. Исключая $\sin pv$ из уравнения $A_1(v)=0$, при помощи уравнения $A_2=0$ приходим к уравнению

(4.6) $$e^2\left(J_{p-1}(pe)-J_{p+1}(pe)\right)^2+6\left(1-e^2\right)\left(1+J_p^2(pe)\right)-2=0$$

Таким образом, у системы (2.4) существуют состояния равновесия для тех нечетных p, для которых трансцендентное уравнение (4.6) имеет простой корень $e=e_p\in$ $\in[0,1)$, причем такой, что

(4.7) $$|\delta d_p^2/(MJ_p)|<1;\quad d_p=[M^2/(\Omega/p)]^{1/3}=I+\alpha$$

Используя разложение

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

можно показать, что уравнение (4.6) не имеет корней с достаточно малыми значениями e_p (кометоподобная частица). Например, для $p=1$ имеем $e_1^2\approx 0{,}77$.

При выполнении условия (4.7) уравнения $B_k+A_{k*}(v)=0$ $(k=1,2)$ на периоде $-\pi/p\leqslant v<\pi/p$ имеют два вещественных корня.

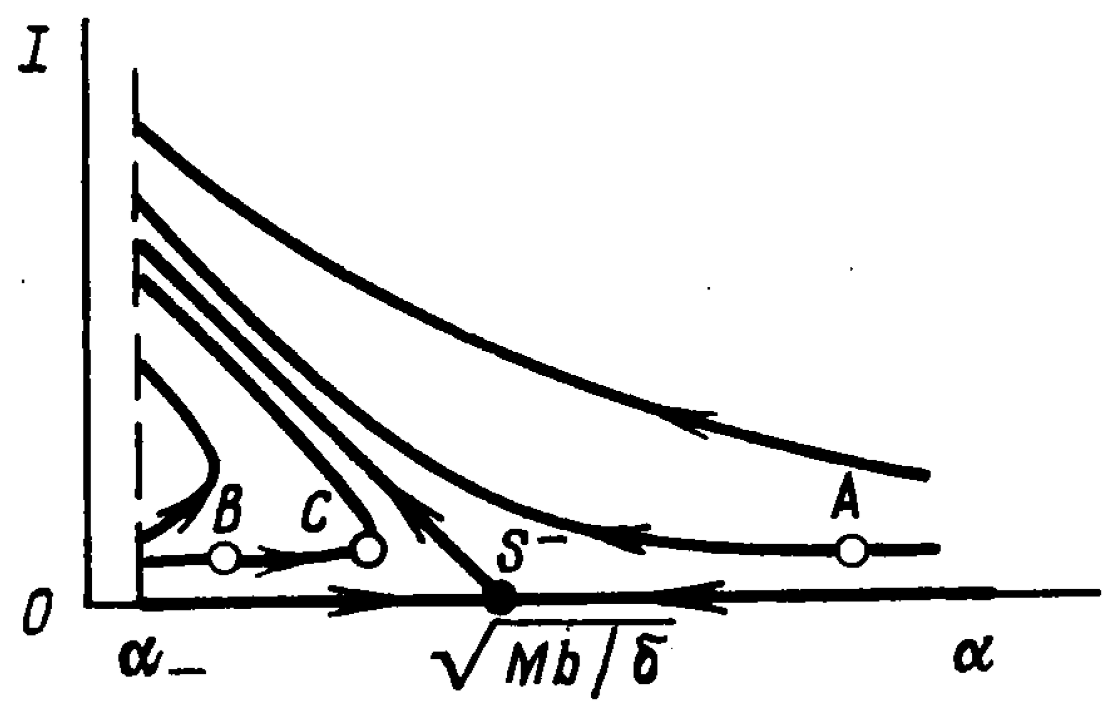
Обозначим через v_0 тот корень, для которого $\cos pv_0<0$. Зная e_p, по второй формуле (1.4) находим $\alpha=\alpha_{p1}=d_p\sqrt{1-e_p^2}$. И, наконец, из соотношения $I+\alpha=d_p$ находим $I=I_{p1}=\alpha_p-\alpha_{p1}$. Тем самым определена резонансная точка (I_{p1},α_{p1}), в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности которой у системы (1.6) существуют резонансные режимы. Иначе говоря, определены параметры порождающей эллиптической фазовой кривой уравнения $r^{\cdot\cdot}-\alpha^2/r^3+M/r^2=0$.

При решении вопроса об устойчивости состояния равновесия $(v_0,0,0)$ системы (2.4) необходимо определить знаки величин a_1, a_0 (в соответствии с утверждением 2 $a_2=0$). Это можно сделать используя формулы для a_0, a_1 в (3.10), (4.5), (4.7), (2.2). Так, для небольших p имеем $a_1<0$ при $\cos pv_0<0$. Далее, можно показать, что $a_0=\delta E$, где $E=E(p)$ не зависит от δ. Поэтому при $E\neq 0$ выбором знака параметра δ можно добиться выполнения условия устойчивости: $a_0<0$. Вычисление E в силу громоздкости не приводим.

2°. Рассмотрим случай $f=b+\sin\psi$, где b — постоянная составляющая. В этом случае УФС имеет вид

(4.8) $$I^{\cdot}=\varepsilon\left[-\delta I+bM\left(I/[\alpha(I+\alpha)]+1/\alpha-\alpha/(I+\alpha)^2\right]\right.$$
$$\alpha^{\cdot}=\varepsilon\left[-\delta\alpha+bM\left(\alpha/(I+\alpha)^2\right)\right]$$

Очевидно, функции $A_{1*}(v)$, $A_{2*}(v)$ останутся прежними, см. (4.5).) Система (4.8) в области G имеет единственное неустойчивое состояние равновесия ($I = 0$, $\alpha = \sqrt{bM/\delta}$) типа седло. Этому состоянию равновесия соответствует круговая орбита с $r_0 = b/\delta$. На фиг. 2 показан возможный фазовый портрет системы (4.8) при $\delta > 0$, $b > 0$. Появление седлового состояния равновесия приводит к тому, что характер эволюции по разные стороны от неустойчивой сепаратрисы S^- различный. Если в начальный момент частица находилась в точке, отвечающей точке A (фиг. 2,) то дальнейшее ее движение в отсутствие резонансных режимов происходит по соответствующей фазовой кривой в направлении стрелки. При этом уменьшение α (при постоянном I) приводит в согласии с (1.4) к уменьшению размеров орбиты, а увеличение I (при постоянном α) — к увеличению эксцентриситета e. Финал эволюции — попадание частицы на штриховую линию (фиг. 2) и дальнейшее падение на центральное тело. Если же в начальный момент частица имеет параметры, соответствующие точке B (т. е. находится на орбите, расположенной ближе к центральному телу), то далее, до некоторого момента, соответствующего точке C на фиг. 2, ее орбита увеличивается (α возрастает). Дальнейший этап эволюции аналогичен предыдущему случаю.



Фиг. 2

Таким образом, наличие постоянной составляющей у функции $f(\psi)$ приводит к интересным эффектам с точки зрения эволюции движения. Эволюционный процесс может быть неоднонаправленным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смарт У. М.* Небесная механика. М.: Мир, 1965. 502 с.
2. *Молчанов А. М.* Резонансы в многочастотных колебаниях.— Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 2, с. 284—287.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 127 с.
4. *Морозов А. Д., Шильников Л. П.* О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 385—394.
5. *Морозов А. Д.* Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1983. 96 с.
6. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. *Chester W.* A General theory of resonance between weakly coupled oscillatory systems. Pt II. Nonconservative systems.— J. Inst. Math. and Appl., 1980, v. 26, No. 2, p. 199—207.
8. *Морозов А. Д.* К исследованию резонансов в системе нелинейных слабо связанных осцилляторов.— В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1984, с. 147—158.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Жевакин С. А.* Об отыскании предельных циклов в системах, близких к некоторым нелинейным.— ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 237—244.

Горький

Поступила в редакцию
9.IX.1985