Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 531.36 : 534.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ ПЕРЕМЕННЫХ

Воротников В. И.

Рассматривается устойчивость по заданному (в количественном отношении) числу переменных, набор которых меняется в зависимости от начальных условий. Методом функций Ляпунова выводятся условия устойчивости рассматриваемого вида. Изучается задача о гашении вращательных движений относительно центра масс асимметричного твердого тела; показывается, что «закрутка» тела относительно одной из главных осей его эллипсоида инерции возможна с помощью всего лишь одного «фиксированного реактивного двигателя» при любых больших начальных возмущениях.

1. Определение устойчивости по заданному числу переменных. Допустим, набор переменных, по которым изучается устойчивость, заранее не задается, а при любых достаточно малых или даже больших начальных возмущениях необходимо обеспечить устойчивость лишь по заданному (в количественном отношении) числу переменных. Какие именно из переменных при этом окажутся устойчивыми — не существенно, и допускается, что в зависимости от начальных условий (охватывающих обязательно всю достаточно малую или даже большую область начальных возмущений) устойчивыми могут оказаться различные переменные. Более точно, введем следующее

Определение 1. Невозмущенное движение $\mathbf{x}=0$ n-мерной системы возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{X}(t,\mathbf{x})\quad (\mathbf{X}(t,0)\equiv 0),\quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.1}$$

называется устойчивым по заданному числу $m<n$ переменных, если для любых ε, $t_0\geqslant 0$ найдутся числа $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ и $L>0$ (L не зависит от ε, t_0), такие, что область $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$ делится на L частей D_j, таких, что

$$D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_L=\{\mathbf{x}_0:\|\mathbf{x}_0\|<\delta\},\ D_1\cap D_2\cap\ldots\cap D_L=\{0\}$$

причем из $\|\mathbf{x}_0\|<\delta$ следует

$$\|\mathbf{y}_j^+(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|<\varepsilon\ (t\geqslant t_0)\ \ (j=1,\ldots,L)$$

если $\mathbf{x}_0\in D_j$. Здесь $\mathbf{y}_j^+=(x_{j1},\ldots,x_{jm})$ — различные (т. е. различающиеся хотя бы двумя элементами, но не порядком их расположения) наборы по m переменных из $x_1,\ldots,x_n$. Если, кроме того, выполняются условия

$$\lim\|\mathbf{y}_j^+(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\|=0\ \ (t\to\infty)$$

то движение $\mathbf{x}=0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по заданному числу переменных.

Замечания. 1°. Считаем, что правые части системы (1.1) непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения в области

$$t\geqslant 0,\quad \|\mathbf{y}_j^+\|\leqslant H>0,\quad 0\leqslant\|\mathbf{z}_j^+\|<+\infty \tag{1.2}$$
$$\mathbf{x}_j^+=(\mathbf{y}_j^+,\mathbf{z}_j^+),\quad \|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}_j^+\|,\quad j=1,\ldots,L$$

а любое решение $\mathbf{x}(t)$ определено для всех $t\geqslant 0$, при которых $\|\mathbf{y}_j^+(t)\|\leqslant H$ $(j=1,\ldots,L)$.

2°. По смыслу определения $L>2$, ибо при $L=1$ определение 1 переходит в определение y-устойчивости в смысле В. В. Румянцева [1, 2], если $D_1=D$, или в определение условной (в смысле Ляпунова) y-устойчивости, если $D_1 \neq D$. В этой связи подчеркнем, что при $L \geqslant 2$ введенное определение шире определения условной устойчивости по части переменных, ибо определением 1 охватывается вся достаточно малая область начальных возмущений.

3°. Число L может быть равно максимально возможному числу различных наборов $\mathbf{y}_j^+$, хотя последнее и не обязательно.

4°. Определение 1 допускает различные модификации с учетом различных трактовок понятия y-устойчивости [2]; в частности, можно говорить о равномерной или экспоненциальной устойчивости по заданному числу и т. д.

5°. Выделим также случай, когда невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1) устойчиво по заданному числу переменных во всей области Ω изменения параметров системы, но каких именно переменных — это зависит от принадлежности параметров системы той или иной части области Ω. Такую устойчивость назовем параметрической устойчивостью по заданному числу переменных.

2. Использование метода функций Ляпунова. Покажем одну из возможностей использования метода функций Ляпунова для обнаружения устойчивости в смысле определения 1.

Теорема 1. Пусть $W(\mathbf{x})$, $W(0) \equiv 0$ — первый интеграл системы (1.1). 1°. Если существуют две функции V_j $(j = 1, 2)$, такие, что в области

$$\{t \geqslant 0, \|\mathbf{y}_j^+\| \leqslant H > 0, 0 \leqslant \|\mathbf{z}_j^+\| < +\infty\} \cap \{\mathbf{x}: (-1)^j W(\mathbf{x}) < 0\} \tag{2.1}$$

выполняются условия

$$V_j(t, \mathbf{x}) \geqslant a_j(\|\mathbf{y}_j^+\|), \quad V_j^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant 0 \quad (j = 1, 2)$$

в которых $a_j(r)$ — непрерывные монотонно возрастающие при $r \in [0, H]$ функции $a_j(r)$, $a_j(0) \equiv 0$, то движение $\mathbf{x} = 0$ устойчиво по заданному числу m переменных; при этом область начальных возмущений $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ делится на три части: $W(\mathbf{x}_0) > 0$, $W(\mathbf{x}_0) < 0$, $W(\mathbf{x}_0) = 0$, в каждой из которых устойчивы переменные, составляющие, соответственно, векторы $(\mathbf{y}_1^+)$, $(\mathbf{y}_2^+)$, $(\mathbf{y}_1^+, \mathbf{y}_2^+)$. 2°. Если, кроме того, выполняются условия $V_j \downarrow 0$ $(j = 1, 2)$, то устойчивость по заданному числу переменных носит асимптотический характер. (Условие $V_j \downarrow 0$ означает, что V_j стремится к нулю, монотонно убывая.)

Доказательство. Обозначая $W^*(\mathbf{x}) \equiv W(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}_0)$, заключаем, что в случае $\mathbf{y}_j^+ = \mathbf{x}$ функции $V_j(t, \mathbf{x})$ при $W^*(\mathbf{x}) = 0$ удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об условной устойчивости ([3], с. 112). Поэтому справедливость теоремы 1 следует из теоремы Ляпунова и теорем В. В. Румянцева [1, 2] об устойчивости по отношению к части переменных.

Замечание. Проверка условий $V_j \downarrow 0$ может быть осуществлена так же, как в известных теоремах об устойчивости по части переменных [2]; например, условие $V_j \downarrow 0$ будет выполнено, если $V_j \leqslant b_j(\|\mathbf{y}_j^+\|)$, $V_j^{\boldsymbol{\cdot}} \leqslant -c_j(\|\mathbf{y}_j^+\|)$ в области (2.1), где b_j, c_j — функции того же вида, что и a_j.

3. Задача о гашении вращательных движений твердого тела. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера твердого тела, закрепленного в центре масс

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{B - C}{A} x_2 x_3 + \frac{1}{A} u_1 \quad (123, ABC) \tag{3.1}$$

где x_i $(i = 1, 2, 3)$ — проекции мгновенной угловой скорости тела на главные оси инерции, A, B, C — главные моменты инерции, u_i (1, 2, 3) — управляющие моменты. В частности, u_i могут характеризовать силу тяги трех «фиксированных реактивных двигателей», расположенных соответствующим образом (см., например [4]).

В [5] методом функций Ляпунова показано, что: 1) управления $u_i = \alpha_i x_i$ $(i = 1,\ 2)$, $u_3 \equiv 0$ $(\alpha_i = \mathrm{const} < 0)$ обеспечивают устойчивость в смысле Ляпунова и асимптотическую $(x_1,\ x_2)$-устойчивость положения равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ замкнутой системы (3.1) при любых A, B, C; 2) управление

$$(3.2)\qquad u_1 = \alpha_1 x_1,\ u_2 \equiv x_3 \equiv 0$$

обеспечивает устойчивость по Ляпунову и асимптотическую x_1-устойчивость положения равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) при любых A, B, C. Ниже будет изучен вопрос о гашении угловых вращений твердого тела по двум из трех переменных x_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ с помощью лишь одной управляющей переменной (одного «фиксированного реактивного двигателя малой тяги»). Считаем, что твердое тело асимметрично, т. е. $A \neq B \neq C$.

Теорема 2. Если $B < A < C$ $(C < A < B)$, то при любых малых начальных возмущениях положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по двум из трех переменных x_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. При этом область начальных возмущений делится на три взаимно непересекающиеся части

$$(3.3)\qquad W_0 > 0\ \ (W_0 < 0),\ W_0 < 0\ \ (W_0 > 0),\ \ W_0 = 0$$

$$\left(W_0 = \frac{C-A}{B} x_{30}^2 - \frac{A-B}{C} x_{20}^2\right)$$

в которых асимптотически устойчивы переменные $(x_1,\ x_2)$, $(x_1,\ x_3)$, $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Доказательство. Воспользуемся правилами [6], позволяющими свести изучение устойчивости по части переменных к изучению устойчивости в смысле Ляпунова для некоторой вспомогательной системы уравнений μ-вида. Для этого введем новую переменную $\mu_1 = (B - C)\, x_2 x_3 / A$, в результате чего система (3.1), (3.2) преобразуется следующим образом:

$$(3.4)\qquad x_1^{\cdot} = \alpha_1^* x_1 + \mu_1,\ \ \mu_1^{\cdot} = x_1 X(x_2,\ x_3)$$

$$x_2^{\cdot} = \frac{C-A}{B} x_1 x_3,\quad x_3^{\cdot} = \frac{A-B}{C} x_1 x_2,\quad \alpha_1^* = \frac{\alpha_1}{A}$$

$$X(x_2,\ x_3) = (B - C)\,[C\,(C - A)\, x_3^2 + B\,(A - B)\, x_2^2]$$
$$(ABC)^{-1} = \Gamma\,(t)$$

Рассмотрим поведение функции $\Gamma(t)$ вдоль траекторий системы (3.1), (3.2). Для этого отметим, что система (3.1), (3.2) допускает первый интеграл

$$(3.5)\qquad W = \frac{C-A}{B} x_3^2 - \frac{A-B}{C} x_2^2 = W_0 = \mathrm{const}$$

Допустим сначала, что $W_0 \neq 0$, и покажем, что при выполнении условия $C < A < B$ или $B < A < C$ вдоль траекторий системы (3.1), (3.2) имеет место неравенство

$$(3.6)\qquad \Gamma(t) \leqslant -\gamma_0 = \mathrm{const} < 0$$

Предполагая от противного, что $\lim \Gamma(t) = 0$ $(t \to \infty)$ или существует конечный момент времени $t = t_*$, при котором $\Gamma(t_*) = 0$, и учитывая, что $X(x_2,\ x_3)$ — определенно-отрицательная функция для всех x_2, x_3, заключаем, что $\lim x_i^2(t) = 0$ $(t \to \infty)$ $(i = 2, 3)$ или $x_2(t_*) = x_3(t_*) = 0$, и, следовательно, в равенстве (3.5) $\lim W(t) = 0$ $(t \to \infty)$ или $W = 0$ при $t = t_*$, что невозможно. Значит, неравенство (3.6) имеет место при всех $t \geqslant t_0$.

Теперь первые два уравнения (3.4) можно записать следующим образом (система μ-вида [6]): $x_1^{\cdot} = \alpha_1^* x_1 + \mu_1$, $\mu_1^{\cdot} = \Gamma(t) x_1$ или в виде одного уравнения

$$x_1^{\cdot\cdot} + p x_1^{\cdot} + q(t) x_1 = 0 \quad (p = -\alpha_1^*,\ q(t) = -\Gamma(t) \geqslant \gamma_0) \tag{3.7}$$

Известно ([7], с. 238 или [8], с. 255), что при выполнении условия

$$p > \sqrt{\Gamma_0} - \sqrt{\gamma_0} \quad (p \geqslant {}^1/_2\, \varepsilon q - {}^1/_2\, q^{\cdot}/q,\ \varepsilon > 0) \tag{3.8}$$

где $\Gamma_0 = \text{const} > 0$ — верхняя граница функции $q(t)$ (т. е. $\gamma_0 \leqslant q(t) \leqslant \Gamma_0$), решение $x_1 = x_1^{\cdot} = 0$ уравнения (3.7) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова. Проверим возможность выполнения условия (3.8) в рассматриваемом случае. Для этого заметим, что ввиду неасимптотической устойчивости в смысле Ляпунова положения равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ система (3.1), (3.2) в достаточно малой окрестности начала координат будет справедлива оценка

$$\sqrt{\Gamma_0} - \sqrt{\gamma_0} < \varepsilon_1$$

$$\left(\left|-\frac{q^{\cdot}}{2q}\right| = \left|-\frac{\Gamma^{\cdot}}{2\Gamma}\right| = \right.$$

$$\left. = \left|\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{C-A}{B} x_1 x_3 + \frac{\partial X}{\partial x_3}\frac{A-B}{C} x_1 x_2\right)(2X(x_2, x_3))^{-1}\right| < \varepsilon_1\right)$$

где ε_1 — достаточно малое наперед заданное число. Значит, при достаточно малых начальных возмущениях (и достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$) неравенство (3.8) выполняется при любом фиксированном числе $p = -\alpha_1^* > 0$.

Решения $x_1(t)$, $x_1^{\cdot}(t)$ уравнения (3.7) являются одновременно и решениями $x_1(t)$, $\mu_1(t)$ исходной системы (3.1), (3.2); это означает, что положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) обладает свойствами:

1) для любых ε_1, $t_0 \geqslant 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из $|x_{10}| < \delta$, $|x_{20} x_{30}| < \delta$ при всех $t \geqslant t_0$ следует

$$|x_1(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)| < \varepsilon, \quad |x_2(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\, x_3(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)| < \varepsilon \tag{3.9}$$

2) для каждого $t_0 \geqslant 0$ найдется $\Delta(t_0) > 0$, такое, что при $|x_{10}| < \Delta$, $|x_{20} x_{30}| < \Delta$

$$\lim |x_1(t)| = 0, \quad \lim |x_2(t)\, x_3(t)| = 0 \qquad (t \to \infty) \tag{3.10}$$

Покажем, что из условий (3.9), (3.10) будут следовать соотношения

$$|x_\alpha(t)| < \varepsilon, \quad \lim |x_\alpha(t)| = 0 \quad (t \to \infty)$$

где $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$ в зависимости от начальных условий.

Для определения геометрической границы областей сходимости решений системы (3.1), (3.2) обозначим

$$x_2^2(t)\, x_3^2(t) = f(t) \tag{3.11}$$

и, опуская промежуточные выкладки, из равенств (3.5), (3.11) найдем следующие решения:

$$x_3^2(t) = \frac{BW_0}{2(C-A)} + \left[\frac{B^2 W_0^2}{4(C-A)^2} + \frac{(A-B)Bf(t)}{C(C-A)}\right]^{1/2} \tag{3.12}$$

$$x_2^2(t) = -\frac{CW_0}{2(A-B)} + \left[\frac{C^2 W_0^2}{4(A-B)^2} + \frac{(C-A)Cf(t)}{B(A-B)}\right]^{1/2}$$

(решения со знаком минус перед радикалом отбрасываем).

Теперь можно проверить, что в случае $B < A < C$ $(C < A < B)$ при $W_0 < 0$ справедливо соотношение $x_3^2(t) \to 0$ $(x_2^2(t) \to 0)$, а при $W_0 > 0$ — соотношение $x_2^2(t) \to 0$ $(x_3^2(t) \to 0)$. Значит, в случае $W_0 \neq 0$ утверждение теоремы 2 доказано.

Изучим отдельно случай $W_0 = 0$, когда возможен такой конечный момент времени $t = t_*$, что $\Gamma(t_*) = 0$; предельное соотношение $\lim \Gamma(t) = 0$ $(t \to \infty)$ означает асимптотическую устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2). Поскольку условие $\Gamma(t_*) = 0$ эквивалентно условиям $x_2(t_*) = x_3(t_*) = 0$ и, кроме того, система (3.1), (3.2) имеет решение $x_1 = x_1(t;\ t_0,\ \mathrm{x}_0)$, $x_2 \equiv x_3 \equiv 0$, то условия $x_1(t_*) \neq 0$, $x_2(t_*) \equiv x_3(t_*) \equiv 0$ будут при всех $t \geqslant t_*$ определять решение $x_1 = x_1(t;\ t_*,\ x_1(t_*))$, $x_2(t) \equiv x_3(t) \equiv 0$. В силу выполнимости для системы (3.1), (3.2) условий [9], гарантирующих единственность решений, такое решение будет единственным для указанных начальных условий. Положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) устойчиво (неасимптотически) по Ляпунову, а функция $x_1(t;\ t_*,\ x_1(t_*))$ удовлетворяет при $t \geqslant t_*$ дифференциальному уравнению $x_1^{\cdot} = \alpha_1^* x_1$ $(\alpha_1^* = \mathrm{const} < 0)$; поэтому из условий $W_0 = 0$, $\Gamma(t_*) = 0$ следует асимптотическая устойчивость в смысле Ляпунова положения равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2). В случае $W_0 = 0$, $\Gamma(t) \leqslant -\Gamma_0 = \mathrm{const} < 0$ аналогичное свойство положения равновесия системы (3.1), (3.2) следует из равенств (3.12). Теорема доказана.

Замечание. Для функции Ляпунова

$$V = x_1^2 + \frac{x_1^{\cdot 2}}{q(t)} = x_1^2 + \frac{(B-C)^2}{A^2 q(t)} x_2^2 x_3^2$$

вдоль траекторий уравнения (3.7), а следовательно, и вдоль траекторий системы (3.1), (3.2) выполняется условие $V \downarrow 0$ ([8], с. 255). Учитывая, что для уравнений (3.1), (3.2) имеет место также интеграл (3.5), вместо функции V можно рассмотреть две функции:

$$V_1 = x_1^2 + \frac{(B-C)^2}{A^2 q(t)} \frac{B}{C-A} W_0 x_2^2 + \frac{(B-C)^2 (A-B) B}{A^2 (C-A) C q(t)} x_2^4$$

$$V_2 = x_2^2 + \frac{(B-C)^2}{A^2 q(t)} \frac{C}{A-B} (-W_0) x_3^2 + \frac{(B-C)(C-A) C}{A^2 (A-B) B q(t)} x_3^4$$

Можно проверить, что в области

$$\{t \geqslant 0,\ \|\mathrm{y}_j^+\| \leqslant H,\ \|\mathrm{z}_j^+\| < +\infty\} \cap \{W(-1)^j < 0\}$$
$$\mathrm{y}_1^+ = (x_1, x_2), \quad \mathrm{y}_2^+ = (x_2, x_3), \quad j = 1, 2$$

функции V_j $(j = 1, 2)$, W удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Покажем, что, выбирая величину $|\alpha_1|$ в (3.2) достаточно большой, можно добиться выполнения условий теоремы 2 для любой наперед заданной области начальных условий.

Теорема 3. Если $B < A < C$ $(C < A < B)$, то положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) устойчиво по Ляпунову и асимптотически по двум из трех переменных x_i $(i = 1, 2, 3)$ в области

(3.13) $$\sqrt{R_0} \leqslant -\alpha_1^*/\sqrt{l}, \quad R_0 = Ax_{10}^2 + Bx_{20}^2 + Cx_{30}^2$$
$$l = \max\left\{\frac{(C-B)(C-A)}{ABC},\ \frac{(C-B)(A-B)}{ABC}\right\}$$

При этом область (3.13) делится на три взаимно непересекающиеся части (3.3), в которых асимптотически устойчивы, соответственно, переменные (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_2, x_3).

Доказательство. Известно ([7], с. 238), что если для всех t, x_i $(i = 1, 2, 3)$ выполняется неравенство

(3.14) $$-\alpha_1^* > \sqrt{\Gamma_0} - \sqrt{\gamma_0}$$

то решение $x_1 = x_1^{\cdot} = 0$ уравнения (3.7) асимптотически устойчиво по обеим переменным при любых начальных возмущениях. Выразим неравенство (3.14) через начальные условия x_{i0} ($i = 1, 2, 3$). Для этого заметим, что функция $R = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2$ удовлетворяет в силу системы (3.1), (3.2) уравнению $R^{\cdot} = 2\alpha_1{}^* A x_1^2$ и, следовательно, является невозрастающей для всех $t \geqslant t_0$. Это значит, что для всех $t \geqslant t_0$

(3.15) $\qquad R \leqslant R_0$

Кроме того, для функции $\Gamma(t)$ справедлива оценка

(3.16) $$-\Gamma(t) = (C - B)\ [C(C - A)x_3^2(t) + B(A - B)x_2^2(t)]$$
$$(ABC)^{-1} \leqslant l(Cx_3^2 + Bx_2^2) \leqslant lR$$

Из (3.15), (3,16) заключаем, что $-\Gamma(t) \leqslant lR_0$, и следовательно, $\Gamma_0 = lR_0$.

Поскольку неравенство (3.14) будет выполнено, если $-\alpha_1{}^* > \sqrt{\Gamma_0}$, то в случае, когда начальные возмущения x_{i0} ($i = 1, 2, 3$) в системе (3.1), (3.2) удовлетворяют условию $-\alpha_1 > \sqrt{lR_0}$, решение $x_1 = x_1{}^{\cdot} = 0$ уравнения (3.7) асимптотически устойчиво по x_1, $x_1{}^{\cdot}$, и следовательно, положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво по x_1, $(B - C)\ x_2x_3/A$. Дальнейшее доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.

Теорема 4. Пусть решения системы (3.1), (3.2), начинающиеся в достаточно малой окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ограничены при достаточно малых возмущающих моментах M_i ($i = 1, 2, 3$) относительно главных осей инерции тела. Если $B < A < C$ ($C < A < B$), то при любых малых начальных возмущениях положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ замкнутой системы (3.1), (3.2) устойчиво в смысле Ляпунова и устойчиво относительно двух из трех переменных x_i ($i = 1, 2, 3$) при постоянно действующих малых возмущающих моментах M_i ($i = 1, 2, 3$). При этом область начальных возмущений делится на три взаимно непересекающиеся части (3.3), в которых устойчивы, соответственно, переменные (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_2, x_3).

Доказательство. В случае $M_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$) уравнения (3.1), (3.2) после введения новой переменной $\mu_1 = (B - C)\ x_2x_3/A$ преобразуются следующим образом:

$$x_1{}^{\cdot} = \alpha_1{}^* x_1 + \mu_1 + M_1$$

$$\mu_1{}^{\cdot} = \Gamma(t)\, x_1 + \Lambda, \quad \Lambda = \frac{B - C}{A}(x_2M_3 + x_3M_2)$$

При сделанном допущении об ограниченности решений при всех $t \geqslant t_0$ имеем $|\Lambda| < \delta$, где δ — достаточно малое число, если M_2, M_3 достаточно малы. Поскольку асимптотическая устойчивость решения $x_1 = x_1{}^{\cdot} = 0$ уравнения (3.7) установлена в [7] при помощи не зависящей явно от времени функции Ляпунова, производная которой определенно отрицательна, решение $x_1 = x_1{}^{\cdot} = 0$ уравнения (3.7) устойчиво при постоянно действующих возмущениях на основании теоремы И. Г. Малкина [10]. Это означает, что при достаточно малых возмущающих моментах M_i ($i = 1, 2, 3$) положение равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (3.1), (3.2) устойчиво по x_1, $(B - C)\ x_2x_3/A$. Используя далее схему доказательства теоремы 2, заключаем, что из условия $(B - C)^2x_2^2x_3^2 \mid A^2 < \varepsilon$ следует, в зависимости от знака величины W_0, соответственно, неравенство $|x_2| < \varepsilon$ или $|x_3| < \varepsilon$.

4. О практическом применении полученных результатов. 1°. Условия теоремы 3 гарантируют «закрутку» тела относительно большей или меньшей (в зависимости от величины начальных возмущений) оси его эллипсоида инерции при любых начальных возмущениях. При этом угловая скорость ω^2, с которой тело будет вращаться после закрутки, определяется равенством

$$\omega^2 = W_0/E \tag{4.1}$$

где $E = (C - A)/B$ или $E = (B - A)/C$ в зависимости от того, вокруг какой оси происходит закрутка. Как следует из (4.1), угловая скорость ω^2 не зависит от x_{10} — проекции величины начальной угловой скорости тела на ось, относительно которой дает момент «фиксированный реактивный двигатель», и уменьшается в сравнении с начальным значением $x_{\alpha 0}$ ($\alpha = 2$ или $\alpha = 3$) на величину $E_1 = C\,(C - A)\;x_{30}{}^2/[(B - A)\,B]$ ($\alpha = 2$) или $E_2 = B\,(A - B)\;x_{20}{}^2/[(C - A)\,C]$ ($\alpha = 3$). Поэтому от величин x_{20}, E_1 и x_{30}, E_2 зависит, будет ли угловая скорость тела после закрутки достигать значения, диктуемого исходной технической потребностью. Закрутка тела представляет интерес в ряде задач управления космическими летательными аппаратами [11], а также на промежуточном этапе активного управления вращательным движением твердого тела, ибо после того, как закрутка осуществлена, можно построить законы управления [12, 13], разворачивающие тело на заданный угол и прекращающие полностью его вращение.

2°. Известно [14, 15], что при пассивной стабилизации спутников используется предварительная закрутка спутника вокруг большей оси эллипсоида инерции. Поскольку в случае, когда собственная угловая скорость спутника значительно превосходит его угловую скорость обращения по орбите, угловое движение спутника описывается уравнениями (3.1) ([8], с. 256), то в случае достаточно большой величины (4.1) закрутку спутника можно осуществить при помощи всего лишь одного фиксированного реактивного двигателя.

3°. Ситуация, названная в п. 1 параметрической устойчивостью по заданному числу переменных, возникает, например, при изучении устойчивости систем Лотки — Вольтерры ([3], с. 207). Введенное понятие может использоваться для точной формулировки экологического принципа вымирания Лотки — Вольтерры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1957, № 4, с. 9—16.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364—384.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968, 764 с.
5. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 245 с.
6. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 441—450.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976, 320 с.
8. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 552 с.
9. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 331 с.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
12. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 253 с.
13. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
14. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс: М.: Наука, 1965, 416 с.
15. *Гродзовский В. Л., Охоцимский Д. Е., Белецкий В. В., Иванов Ю. Н., Курьянов А. И., Платонов А. К., Сарычев В. А., Токарев В. В., Ярошевский В. А.* Механика космического полета.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968, т. 1, с. 265—319.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию 14.II.1985