Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 531.36

# О ПРИМЕНЕНИИ ОДНОЧЛЕННЫХ ГРУПП ЛИ К ПРОБЛЕМЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

**Журавлев В. Ф.**

В основе излагаемого ниже алгоритма асимптотического интегрирования уравнений механики лежит представление об исходной системе как об одночленной группе Ли преобразований фазового пространства в себя. Преобразования системы, приводящие ее к более простому виду, ищутся также в классе систем, обладающих групповыми свойствами. Такое согласование инструмента анализа объекту анализа позволяет ограничить используемые в алгоритме операции лишь операциями из соответствующей алгебры операторов.

После работы Хори [1], в которой для построения дополнительного первого интеграла в автономной гамильтоновой системе были применены ряды Ли, последовала серия работ, распространяющих этот подход на автономные системы общего вида (Хори, Кемел и др., обзор таких результатов можно найти, например, в [2, 3]). Заметим, что все такие работы представляют собой, по существу, лишь различные формы вывода известной из теории групп Ли формулы Хаусдорфа, слегка осложненные идеей отождествления параметров и разделения порядков. Существенно новые результаты здесь могут быть получены только при отказе от рассмотрения систем общего вида и при переходе к анализу каких-то более специальных типов систем, характерных для тех или иных областей асимптотической теории, с целью усовершенствования уже имеющихся там процедур. При этом сразу следует исходить из формулы Хаусдорфа, не повторяя в очередной раз ее вывод. Именно такой путь и предпринят в настоящей заметке, где рассматриваются системы в так называемой одночастотной стандартной форме. Этот вид систем является базовым для известного асимптотического метода Крылова — Боголюбова, который и удается существенно упростить используя теоретико-групповые принципы.

Объективными признаками такого упрощения являются: 1) отсутствие необходимости разрешать относительно производных преобразованные на каждом шаге системы, или обращать уравнения замены; 2) в алгоритме не используются ряды по степеням малого параметра, все изложение процедуры удается провести сразу в терминах искомых асимптотик; 3) выражение для произвольного приближения удается получить в виде явной рекуррентной формулы, удобной при использовании ЭВМ, выполняющих символьные выкладки. Обобщение предложенного алгоритма на многочастотные системы, на существенно нелинейные системы и трактовку резонансных случаев можно выполнить следуя [4]. Рассматриваются примеры применения метода.

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y,\varepsilon),\quad \frac{dy}{dt}=Y(x,y,\varepsilon)\quad (x\in R^1, y\in R^n, \varepsilon\ll 1) \tag{1}$$

где $x$ — скалярная переменная, $y$ — вектор размерности $n$, $\varepsilon$ — малый параметр; правые части аналитичны в некоторой области.

Присутствие малого параметра позволяет эффективно использовать его для формирования процедур асимптотического построения приближенных решений. При этом наиболее плодотворный подход состоит не в прямом построении решений, а в приведении системы (1) к более удобному для анализа (а также и для решения) виду [5, 6].

Методы такого приведения, будучи достаточно простыми и удобными при построении одного-двух приближений, становятся крайне громоздкими с увеличением числа приближений. Возникает естественная потребность в рационализации соответствующих процедур. Принцип такой рационализации может основываться на идее максимального согласования по групповым признакам инструмента исследования с объектом исследования. Примеры такого согласования в механике имеются: линейные системы естественно преобразовывать линейными заменами; кинематические уравнения Эйлера нелинейны и имеют особенности, однако если заметить, что повороты твердого тела образуют группу $SO(3)$, то в групповых переменных уравнения получаются линейными, без особенностей. При этом минимальная по размерности линейная система получается при записи уравнений в кватернионах, а если и при решении уравнений пользоваться лишь кватернионами, то выполняемые операции не выходят за пределы операций алгебры кватернионов и приводят к максимально простым и экономным алгоритмам [7].

Система (1) с произвольными нелинейными правыми частями тем не менее порождает весьма узкий класс отображений фазового пространства в себя — однопараметрическую группу Ли [8, 9] с оператором

(2) $$A = X(x, y, \varepsilon)\,\partial/\partial x + Y(x, y, \varepsilon)\,\partial/\partial y$$

Поэтому и преобразование системы (1) следует искать не в классе произвольных нелинейных замен, как это обычно делается, а в виде однопараметрической группы Ли, порождаемой некоторой дифференциальной системой, определенной в том же фазовом пространстве, что и система (1)

(3) $$dx/d\tau = M(x, y, \varepsilon),\quad dy/d\tau = N(x, y, \varepsilon)$$

где $\tau$ — параметр группы, а ее оператор имеет вид

(4) $$U = M(x, y, \varepsilon)\,\partial/\partial x + N(x, y, \varepsilon)\,\partial/\partial y.$$

В этом случае выполняемые при преобразованиях операции не выйдут за пределы операций алгебры Ли операторов вида (2), (4), что и сулит существенные преимущества, ибо в отличие от нелинейного объекта (1) объекты (2), (4) — линейные.

Под преобразованием системы (1) при помощи группы, задаваемой системой (3) с оператором (4), понимается такая замена переменных $(x, y) \to (p, q)$: $p = f_1(x, y, \tau, \varepsilon)$, $q = f_2(x, y, \tau, \varepsilon)$, в которой функции $f_1$ и $f_2$ тождественно удовлетворяют уравнениям (3), причем $f_1(x, y, 0, \varepsilon) \equiv x$, $f_2(x, y, 0, \varepsilon) \equiv y$.

Такие замены переменных, а также и обратные им могут быть записаны в виде рядов Ли при помощи оператора (4):

(5) $$p = x + \tau Ux + \frac{1}{2!}\tau^2U^2x + \ldots = e^{\tau U}x$$
$$q = y + \tau Uy + \frac{1}{2!}\tau^2U^2y + \ldots = e^{\tau U}y$$
$$x = p - \tau Up + \ldots = e^{-\tau U}p,\quad y = q - \tau Uq + \ldots = e^{-\tau U}q$$

При этом в случае обратной замены в выражении для оператора (формула (4)) вместо переменных $x$, $y$ следует формально писать переменные $p$, $q$:

$$U = M(p, q, \varepsilon)\,\partial/\partial p + N(p, q, \varepsilon)\,\partial/\partial q$$

Формулировка задачи теории возмущений, т. е. цели выполняемых над системой (1) преобразований, также может быть сделана в терминах групп. В основу такой формулировки может быть положен один из центральных фактов группового анализа дифференциальных уравнений, который состоит в следующем. Если известна какая-нибудь однопараметрическая группа симметрий системы (1), оператор которой коммутирует с оператором этой системы $A$, то последняя может быть понижена в порядке. При постановке задач теории возмущений предположения о наличии известных решений делаются по отношению к невозмущенной части системы ($\varepsilon = 0$). По аналогии и будем предполагать, что группа симметрий известна лишь для вырожденной ($\varepsilon = 0$) системы (1).

Постановка задачи теории возмущений приобретает следующий вид: дана группа $G$ симметрий системы (1) при $\varepsilon = 0$ ($G$ — оператор группы), так, что имеет место $[A, G]_{\varepsilon=0} = 0$. Требуется найти группу $U$ преобразований системы (1), переводящую оператор $A$ в оператор $B$, так, чтобы данная группа $G$ была группой симметрий системы (1) при $\varepsilon = \tau$: $[B, G]_{\tau=\varepsilon} = 0$. Если это удастся, то порядок системы (1) может быть понижен.

Скобками обозначена операция вычисления коммутатора, представляющего собой линейный оператор, вычисляемый по правилу $[A, G] = AG - GA$.

Заметим, что традиционная постановка задачи в методе осреднения вполне соответствует только что сформулированной. Действительно, в методе осреднения вырожденная система автономна, требуется сделать автономной всю систему. Но это и значит, что вырожденная система допускает группу сдвига по $t$ и требуется так преобразовать возмущенную систему, чтобы она допускала эту же группу.

Поставленная выше задача может быть решена, в частности, тогда, когда известная группа симметрий порождается фазовым потоком вырожденной системы: $G = A\,|_{\varepsilon=0}$, т. е. когда известно общее решение системы при $\varepsilon = 0$. Построим алгоритм асимптотического решения задачи возмущений в этом случае. Без ограничения общности можно считать, что система (1) записана в канонических координатах группы $G$ и, следовательно, имеет известную стандартную форму:

(6) $$dx/dt = 1 + \varepsilon X(x, y, \varepsilon),\ dy/dt = \varepsilon Y(x, y, \varepsilon)$$

Ей соответствует и стандартная форма оператора $A$:

$$A = \partial/\partial x + \varepsilon\,[X(x, y, \varepsilon)\ \partial/\partial x + Y(x, y, \varepsilon)\ \partial/\partial y]$$

Если $A$ — оператор исходной системы, $U$ — оператор замены переменных и $B$ — оператор преобразованной системы, то известно, что эти три оператора связаны начальной задачей Коши для уравнения Хаусдорфа

$$dB/d\tau = [B,\ U];\ \ B_{\tau=0} = A$$

Решение этой задачи, дающее явную связь между этими операторами, может быть представлено следующим рядом по степеням параметра группы $\tau$:

(7) $$B = A + \tau\,[A, U] + \frac{1}{2!}\tau^2\,[[A, U], U] + \ldots$$

Если подчинить оператор $B$ условию коммутирования при $\tau = \varepsilon$ с $G$ (напомним, что $G = A_{\varepsilon=0} = \partial/\partial p$ и условие коммутирования сводится к независимости $B$ от $p$), то получим уравнение для нахождения оператора $U$. Решать такое уравнение будем асимптотически, для чего введем обозначения

$$A_k = A + o(\varepsilon^k),\ B_k = B + o(\varepsilon^k),\ U_k = U + o(\varepsilon^k)$$

где $A_k$, $B_k$, $U_k$ — операторы, отличающиеся от точных операторов величинами более высокого порядка малости, чем $\varepsilon^k$.

Из формулы (7) для введенных операторов следует цепочка соотношений

(8) $$B_0 = A_0, \quad B_1 = A_1 + \varepsilon [A_0, U_0], \ldots$$
$$\ldots, \quad B_n = A_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \underbrace{[\ldots}_{k}[A_{n-k}, U_{n-k}], \ldots], U_{n-k}]$$

Рассмотрим первый коммутатор ($k = 1$) в $B_n$:

(9) $$[A_{n-1}, U_{n-1}] = [A_{n-1} - A_0, U_{n-1}] + [A_0, U_{n-1}]$$

Поскольку $A_{n-1} - A_0 \sim \varepsilon$, то, не выходя за рамки рассматриваемой асимптотики, вместо (9) можно написать

$$[A_{n-1}, U_{n-1}] = [A_{n-1} - A_0, U_{n-2}] + [A_0, U_{n-1}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_n = \varepsilon [A_0, U_{n-1}] + L_n$$

где $L_n$ — оператор, зависящий только от младших по отношению к $U_{n-1}$ асимптотик оператора $U$:

(10) $$L_n = A_n + \varepsilon [A_{n-1} - A_0, U_{n-2}] + $$
$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \underbrace{[\ldots}_{k}[A_{n-k}, U_{n-k}], \ldots], U_{n-k}]$$

Соотношения (8) с учетом того, что $[A_0, U_k] = \partial U_k / \partial p$, можно переписать в виде

(11) $$B_0 = A_0, \quad B_1 = \varepsilon \frac{\partial U_0}{\partial p} + A_1, \quad B_2 = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial p} + A_2 +$$
$$+ \varepsilon [A_1 - A_0, U_0] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [[A_0, U_0], U_0], \ldots,$$
$$B_n = \varepsilon \frac{\partial U_{n-1}}{\partial p} + L_n$$

Соотношения (11) позволяют последовательно определить все приближения для оператора $B$ и оператора замены $U$.

Действительно, для построения первого приближения достаточно $B_1$ выбрать так:

$$B_1 = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \int_0^h A_1 \, dp \equiv \langle A_1 \rangle$$

Тогда $U_0$ найдется квадратурой:

$$U_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \int (A_1 - \langle A_1 \rangle) \, dp \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \int \bar{A}_1 \, dp$$

Через $\langle A_1 \rangle$ и $\bar{A}$ обозначены соответственно среднее по $p$ значение оператора $A_1$ (при условии, что оно существует) и дополнение к среднему.

Выбор $B_1$ в виде среднего от $A_1$ диктуется, с одной стороны, требованием независимости $B$ от $p$, а другой — требованием ограниченности по $p$ уравнений замены.

После того как найден оператор $U_0$, можно приступать к построению второго приближения

$$B_2 = \left\langle A_2 + \varepsilon [A_1 - A_0, U_0] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [[A_0, U_0], U_0] \right\rangle$$

что в свою очередь позволяет найти

$$U_1 = -\frac{1}{\varepsilon} \int \left( \bar{A}_2 + \overline{\varepsilon [A_1 - A_0, U_0]} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \overline{[[A_0, U_0], U_0]} \right) dp$$

и т. д.

Таким образом, общее выражение для $n$-го приближения получается в виде

$$(12) \qquad B_n = \langle L_n \rangle, \quad U_{n-1} = -\frac{1}{\varepsilon} \int \overline{L}_n \, dp$$

где оператор $L_n$ выражен через предыдущие приближения явной, конечной формулой (10). Если нормальная форма сходится, то точное выражение для оператора преобразованной системы есть $B = \lim \langle L_n \rangle$ при $n \to \infty$.

Так как $B_n$ по построению не зависит от $p$ и $B_0 = A_0 = \partial/\partial p$, то

$$B_n = \frac{\partial}{\partial p} + \varepsilon \left[ P_n(q, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial p} + Q_n(q, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial q} \right]$$

Следовательно, уравнения (6) приобретают в переменных $(p, q)$ вид

$$(13) \qquad dp/dt = 1 + \varepsilon P_n(q, \varepsilon), \quad dq/dt = \varepsilon Q_n(q, \varepsilon)$$

что и представляет конечную цель $n$-го приближения метода осреднения.

Решения системы (13) необходимо подставить в уравнения замены

$$(14) \qquad x = e^{-\varepsilon U_{n-2}} p, \quad y = e^{-\varepsilon U_{n-2}} q$$

чтобы получить решение в исходных переменных соответствующей точности. Знание оператора $U_{n-1}$ необходимо для построения $n+1$-го приближения, т. е. $B_{n+1}$.

Таким образом, вся процедура сводится к вычислению по формулам (10) и (12) $B_n$ и $U_{n-1}$. Выражение для $B_n$ определяет правые части системы (13), $U_{n-2}$ —ту замену исходных переменных $(x, y)$ в $(p, q)$, в которых заданная система (6) принимает вид, не зависящий от $p$, т. е. (13).

Поскольку в изложенном алгоритме присутствует процедура осреднения, то асимптотические оценки точности этого алгоритма эквивалентны обычным оценкам точности метода осреднения [10]. Однако в конкретных примерах реальная точность алгоритма может быть выше точности, даваемой методом осреднения. Это происходит потому, что в методе осреднения строятся сами преобразования, аналогичные (14), в то время как в предложенном алгоритме строятся операторы. Поэтому, если точное выражение оператора удается получить за конечное число шагов, то формулы (14) определят и точное выражение для преобразований, представленных, однако, бесконечными рядами. А их конечным числом шагов метода осреднения получить нельзя.

Проиллюстрируем сказанное примером.

*Пример 1.* Пусть заменой переменных $(x, y) \to (p, q)$ требуется привести к виду, в котором была бы исключена зависимость правых частей от $p$, следующую систему:

$$dx/dt = 1, \quad dy/dt = -\varepsilon y^3 \cos^2 x$$

(методом разделения переменных она интегрируется точно). Преобразование, приводящее ее к автономной форме, может быть выписано в явном виде

$$x = p, \quad y = q\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon q^2 \sin 2p\right)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \frac{(2n-1)!!}{n!\,4^n} \sin^n 2p + q$$

Однако получить эти формулы за конечное число приближений методом Крылова — Боголюбова нельзя. Между тем этот точный результат посредством предлагаемого выше алгоритма получается в два приближения. Оператор этой системы, записанный при помощи новых переменных, имеет вид

$$A = \partial/\partial p - \varepsilon q^3 \cos^2 p \partial/\partial q$$

Применение изложенной процедуры дает

$$B_1 = \langle A_1 \rangle = \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2} \varepsilon q^3 \frac{\partial}{\partial q}$$

$$U_0 = \left(\frac{q^3}{2} \int \cos 2p \, dp\right) \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{4} q^3 \sin 2p \frac{\partial}{\partial q}$$

**Второе приближение**

$$B_2 = \langle A_2 + \varepsilon [A_1 - A_0, U_0] + {}^1/_2\varepsilon^2 [[A_0, U_0], - U_0]\rangle$$

Вычислим коммутаторы

$$[A_1 - A_0, U_0] = \left[ -\varepsilon q^3 \cos^2 p \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{1}{4} q^3 \sin 2p \frac{\partial}{\partial q} \right] = 0$$

$$[[A_0, U_0], U_0] = \left[ \frac{\partial U_0}{\partial p}, U_0 \right] = \left[ \frac{1}{2} q^3 \cos 2p \frac{\partial}{\partial q}, \frac{1}{4} \sin 2p \frac{\partial}{\partial q} \right] = 0$$

Следовательно

$$B_2 = \langle A_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial p} - \varepsilon \frac{q^3}{2} \frac{\partial}{\partial q} = B_1, \quad U_1 = U_0 = \frac{1}{4} q^3 \sin 2p \frac{\partial}{\partial q}$$

Таким образом, второе приближение совпало с первым. Из формулы (10) видно, что то же самое получится и для любого приближения. Тем самым задача решена точно.

Преобразованные уравнения имеют вид

$$dp/dt = 1, \quad dq/dt = -\frac{1}{2} \varepsilon q^3$$

Связь новых переменных со старыми получается согласно (14) и совпадает с выписанным выше точным решением.

*Пример 2* [11]. Рассмотрим уравнение $\varphi^{\cdot\cdot} + \varphi - a\varphi^2 = \mu \cos t$. В этом уравнении имеет место главный резонанс, периодическое решение раскладывается в ряд по дробным степеням малого параметра, в связи с чем утверждалось [11], что такие решения не могут быть получены при помощи теории квазилинейных систем. Покажем, что это не так. Появление дробных степеней связано лишь с выбором масштаба измерения переменных и никак существом асимптотической процедуры построения решения не определяется.

Для того чтобы применить квазилинейный подход, введем в написанном уравнении малый масштаб по формуле $\varphi = \varepsilon z$ ($\varepsilon$ — малый параметр) и перепишем его в виде квазилинейного уравнения

$$z^{\cdot\cdot} + z = \varepsilon a z^2 + \mu\varepsilon^{-1} \cos t$$

Чтобы нелинейный и неоднородный члены имели одинаковый порядок влияния на осциллятор, нужно положить $\mu\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$.

Перейдем в этом уравнении к переменным Ван дер Поля (канонические координаты в фазовом пространстве $(t, z, z^{\cdot})$ группы винтов, порождаемой фазовым потоком вырожденной системы)

$$t = x, \quad z = y_1 \sin x + y_2 \cos x, \quad z^{\cdot} = y_1 \cos x - y_2 \sin x$$

Исходное уравнение при дополнительном условии $y_1^{\cdot} \sin x + y_2^{\cdot} \cos x = 0$ перепишется в виде системы стандартной формы:

$$x^{\cdot} = 1, \quad y_1^{\cdot} = \zeta \cos x, \quad y_2^{\cdot} = -\zeta \sin x$$

$$\zeta = \varepsilon a (y_1 \sin x + y_2 \cos x)^2 + \varepsilon^2 \cos x$$

Оператор этой системы в новых переменных:

$$A = A_2 = \frac{\partial}{\partial p} + \{\varepsilon a (q_1 \sin p + q_2 \cos p)^2 + \\ + \varepsilon^2 \cos p\} \left(\cos p \frac{\partial}{\partial q_1} - \sin p \frac{\partial}{\partial q_2}\right)$$

$$A_0 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad A_1 = \frac{\partial}{\partial p} + \varepsilon a (q_1 \sin p + q_2 \cos p)^2 \left(\cos p \frac{\partial}{\partial q_1} - \sin p \frac{\partial}{\partial q_2}\right)$$

*Первое приближение*

$$B_1 = \langle A_1 \rangle = A_0 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad U_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \int \bar{A}_1 \, dp =$$

$$= a \left\{\frac{1}{3} (q_2^2 - q_1^2) \sin^3 p + \frac{2}{3} q_1 q_2 \cos^3 p - q_2^2 \sin p\right\} \frac{\partial}{\partial q_1} +$$

$$+ a \left\{\frac{1}{3} (q_1^2 - q_2^2) \cos^3 p + \frac{2}{3} q_1 q_2 \sin^3 p - q_1^2 \cos p\right\} \frac{\partial}{\partial q_2}$$

*Второе приближение.* Поскольку $A_1 - A_0 = -\varepsilon[A_0, U_0]$, получим

$$B_2 = \langle A\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\langle [A_1 - A_0, U_0]\rangle =$$
$$= \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left\{1 + \frac{5}{6}a^2q_2(q_1^2+q_2^2)\right\}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{5}{12}\varepsilon^2a^2q_1(q_1^2+q_2^2)\frac{\partial}{\partial q_2}$$

Система второго приближения с разделенными переменными получается в виде

$$\frac{dp}{dt} = 1, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{1 + \frac{5}{6}a^2q_2(q_1^2+q_2^2)\right\}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -\frac{5}{12}\varepsilon^2a^2q_1(q_1^2+q_2^2) \tag{15}$$

Связь исходных переменных с новыми

$$x = p, \quad y_1 = q_1 - \varepsilon U_0 q_1, \quad y_2 = q_2 - \varepsilon U_0 q_2 \tag{16}$$

Решив систему (15) и подставив результат в (16), получим решение задачи в исходных переменных. Если, как в [11], представляет интерес только периодическое решение, то, определив из (15) стационарную точку $q_1 = 0$, $q_2 = -(6/(5a^2))^{1/3}$, для переменной $\varphi$ можно получить выражение, совпадающее с приведенным в [11].

Автор благодарит А. Д. Брюно за обсуждения и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hori G.-I.* Theory of general perturbation with unspecified canonical variables.— Publ. Astron. Soc. Japan, 1966, v. 18, No. 4, p. 287—296.
2. *Джакалья Г. Е. О.* Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979, 319 с.
3. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
4. *Журавлев В. Ф.* Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике.— ПММ, т. 47, вып. 4, 1983, с. 559—565.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
6. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
8. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.: Гостехиздат, 1940. 396 с.
9. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
10. *Besjes J. G.* On the asymptotic methods for nonlinear differential equations.— J. Méc., 1969, v. 8, No. 3, p. 357—372.
11. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.


Москва

Поступила в редакцию
3.IV.1985