Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 3, 1986

УДК 62-50

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Альбрехт Э. Г.

Рассматривается игровая задача наведения [1, 2] для нелинейных управляемых объектов в случае, когда области управления игроков зависят от фазовых координат. При определенных условиях описывается процедура построения опорных функций областей достижимости изучаемых объектов. Указываются условия, при которых опорные функции областей достижимости дифференцируемы по начальной позиции. Эти результаты позволяют использовать для решения задачи наведения правило экстремального прицеливания [1, 2]. Стандартным образом вводится условие регулярности игры [1], проверка которого сводится к определению решения конечномерной экстремальной задачи. Показывается, что в регулярном случае экстремальные стратегии доставляют седловую точку игровой задаче наведения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим противоборствующие управляемые объекты, описываемые уравнениями

$$y^{\cdot} = u \in P(t, y), \quad z^{\cdot} = v \in Q(t, z) \tag{1.1}$$

где y, z — n-мерные фазовые векторы, u, v — n-мерные векторы управляющих воздействий, $P(t, y)$, $Q(t, z)$ — области управления игроков.

Игра осуществляется на заданном отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ и плата игры определяется равенством

$$\gamma[\vartheta] = \sigma(z(\vartheta) - y(\vartheta)) = \sigma(x(\vartheta)) \tag{1.2}$$

где $\sigma(x)$ — заданная функция векторного аргумента $x = z - y$. Первый игрок, распоряжающийся выбором управления $u \in P(t, y)$, стремится минимизировать величину $\gamma[\vartheta]$, а второй игрок, распоряжающийся выбором управления $v \in Q(t, z)$, напротив, стремится максимизировать величину $\gamma[\vartheta]$.

Будем предполагать, что в каждый момент времени t игрокам известны реализовавшиеся значения $y[t]$ и $z[t]$ и управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи, т.е. реализующиеся значения $u[t]$ и $v[t]$ в каждый текущий момент времени t формируются на основании информации о величинах $y[t]$ и $z[t]$.

Допустимые стратегии U и V игроков будем определять как многозначные отображения, полунепрерывные сверху по включению, которые каждой позиции $\{t, y, z\}$ ставят в соответствие выпуклые множества $U^*(t, y, z) \subset P(t, y)$ и $V^*(t, y, z) \subset Q(t, z)$, под движениями будем понимать решения соответствующих уравнений в контингенциях [1—3].

Пусть $(\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, u, v)$ — реализация величины (1.2), отвечающая исходной позиции $\{t_0, y_0, z_0\}$ при управлениях u и v.

Задача 1.1. Среди допустимых стратегий U требуется найти оптимальную стратегию U°, которая обеспечивает неравенство

$$(\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, U^0, v) \leqslant \min_{U} \sup_{v[t]} \inf_{y[t]} (\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, U, v)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$.

Задача 1.2. Среди допустимых стратегий V требуется найти оптимальную стратегию V°, которая обеспечивает неравенство

$$(\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, u, V^0) \geqslant \max_{V} \inf_{u[t]} \sup_{z[t]} (\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, u, V)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$.

Цель статьи — обоснование правила экстремального прицеливания [1, 2] для решения задач 1.1 и 1.2 в случае управляемых объектов вида (1.1), когда области управления игроков зависят от фазовых координат.

2. Область достижимости. Рассмотрим управляемую систему

(2.1) $$x^{\cdot} = w \in R(t, x)$$

Будем предполагать, что многозначное отображение $R(t, x)$, описывающее область управления, удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(t, x)$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, непрерывно зависящее от позиции $\{t, x\}$;

2) любой вектор $w(t, x) \in R(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\| w(t, x) \| \leqslant c_1 (1 + \| x \|), \quad c_1 - \text{const}$$

3) для любого $\lambda \in [0, 1]$ и любых $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ имеет место вложение

$$\lambda R(t, x^{(1)}) + (1 - \lambda) R(t, x^{(2)}) \subseteq R(t, \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda) x^{(2)})$$

4) каков бы ни был ненулевой вектор ψ, максимум выражения

(2.2) $$\max_{w \in R(t, x)} \psi' w = \psi' w^\circ(\psi, t, x) = \eta[\psi, t, x]$$

достигается на единственном векторе $w^\circ(\psi, t, x)$, который непрерывен по переменным t, x и ψ и непрерывно дифференцируем по x, причем

$$\| \partial w^\circ(\psi, t, x)/\partial x \| \leqslant c_2, \quad c_2 = \text{const}$$

5) каков бы ни был вектор l, при всех x_0 имеет единственное решение $\{x^\circ(t/t_0, x_0, l), \psi^\circ(t/t_0, x_0, l)\}$ следующая задача:

(2.3) $$x^{\cdot} = w^\circ(\psi, t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\psi^{\cdot} = -\left[\frac{\partial w^\circ(\psi, t, x)}{\partial x}\right]' \psi, \quad \psi(\vartheta) = l$$

Примечания. 2.1. Условие 5) выполняется в случае линейных систем, если имеет место условие 4), и при дополнительных предположениях [4] в случае квазилинейных систем.

2.2. В случае нелинейных систем с областью управления, не зависящей от фазовых координат, когда множество $R(t, x)$ задается равенством

$$R(t, x) = \{w: w = f(t, x, u), \ u \in P(t)\},$$

где $P(t)$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество, условие 3) можно заменить требованием вогнутости по x опорной функции $\eta[\psi, t, x]$ множества $R(t, x)$.

При выполнении условий 1) и 2) уравнение (2.1), как дифференциальное уравнение в контингенциях, при любом выборе начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ имеет, вообще говоря, неединственное решение $x(t/t_0, x_0)$, продолжимое для всех значений времени $t \geqslant t_0$. Обозначим $X[t_0, x_0]$ множество решений уравнения (2.1), выходящих из начальной точки $\{t_0, x_0\}$ и определенных на отрезке $[t_0, \vartheta]$, т. е.

$$X[t_0, x_0] = \{x(t): \ x(t) = x(t/t_0, x_0), \ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta\}$$

При этом, по определению решения [1—3], абсолютно непрерывные функции $x(t)$ при почти всех t из отрезка $[t_0, \vartheta]$ удовлетворяют включению $x^{\cdot}(t) \in R(t, x(t))$.

Сечение множества $X[t_0, x_0]$ при $t = \vartheta$ будем называть областью достижимости системы (2.1) из состояния $x(t_0) = x_0$ к моменту времени $t = \vartheta$ и обозначать $G(\vartheta, t_0, x_0)$. Поскольку условие 3) обеспечивает выпуклость множества $X[t_0, x_0]$, то при выполнении условий 1) — 3) область достижимости $G(\vartheta, t_0, x_0)$ выпуклое, замкнутое и ограниченное множество.

Для аналитического описания области достижимости $G(\vartheta, t_0, x_0)$ рассмотрим следующую задачу.

Задача 2.1. Пусть l — произвольный вектор. Среди движений $x(t) \in X[t_0, x_0]$ требуется найти такое движение $x^{(0)}(t)$, что

$$l'x^{(0)}(\vartheta) = \max_{x(t)\in X[t_0, x_0]} l'x(\vartheta) = \rho[l, \vartheta, t_0, x_0] \tag{2.4}$$

Движение $x^{(0)}(t) = x^{(0)}(t/t_0, x_0, l)$, разрешающее задачу 2.1, и управление $w^{(0)}(t) = \dot{x}^{(0)}(t)$ будем называть оптимальными. Функция $\rho[l, \vartheta, t_0, x_0]$ — опорная функция области достижимости $G(\vartheta, t_0, x_0)$.

Достаточные условия оптимальности управления $w^{(0)}(t)$ и движения $x^{(0)}(t)$ в форме принципа максимума имеют следующий вид.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1) — 4) и

$$\{x^\circ(t), \psi^\circ(t)\} = \{x^\circ(t/t_0, x_0, l), \psi^\circ(t/t_0, x_0, l)\}$$

— решение задачи (2.3) для начальной позиции $\{t_0, x_0\}$, тогда $x^\circ(t) = x^{(0)}(t)$, т. е. $x^\circ(t)$ — оптимальное движение, разрешающее задачу 2.1.

Справедливость теоремы 2.1 следует из общих утверждений, приведенных в монографии [5], где также имеется подробная библиография работ, посвященных выводу условий оптимальности для систем, описываемых дифференциальными включениями.

В другой форме достаточные условия оптимальности можно записать опираясь на стандартные рассуждения метода динамического программирования.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия 1) — 2). Если для уравнения (2.1) можно указать непрерывно дифференцируемую функцию $\varkappa(t, x)$ и полунепрерывное сверху по включению при изменении позиции $\{t, x\}$ множество $W^\circ(t, x) \subset R(t, x)$, такие, что

а) каков бы ни был вектор $w(t, x) \in R(t, x)$ при всех t и x выполняется неравенство

$$\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial t} + w'(t, x)\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial x} \leqslant 0$$

б) каков бы ни был вектор $w^\circ(t, x) \in W^\circ(t, x)$, при всех t и x выполняется тождество

$$\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial t} + w^{\circ\prime}(t, x)\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial x} \equiv 0$$

в) $\varkappa(\vartheta, x) = l'x$

то любое решение $x^\circ(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $x^\circ(t_0) = x_0$ уравнения в контингенциях $\dot{x} \in W^\circ(t, x)$ является оптимальным движением, разрешающим задачу 2.1. При этом справедливо равенство

$$\varkappa(t_0, x_0) = \rho[l, \vartheta, t_0, x_0] = \max_{x(t)\in X[t_0, x_0]} l'x(\vartheta) \tag{2.5}$$

Следовательно, для решения задачи 2.1 достаточно найти непрерывно дифференцируемую функцию $\varkappa(t, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial t} + \max_{w\in R(t, x)} w'\frac{\partial\varkappa(t, x)}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

при условии, что

$$(2.7) \qquad \varkappa(\vartheta, x) = l'x$$

Для иллюстрации рассмотрим линейную управляемую систему, т. е. предположим, что множество $R(t, x)$ описывается равенством

$$R(t, x) = \{w\colon w = A(t)x + B(t)u,\ u \in P(t)\}$$

где u — r-мерный вектор, принимающий значения из выпуклого, замкнутого и ограниченного множества $P(t)$, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы соответствующих размерностей. Опорная функция области достижимости из произвольной позиции $\{t, x\}$ имеет вид [1]

$$(2.8) \qquad \rho[l, \vartheta, t, x] = l'Y[\vartheta, t]x + \int_t^{\vartheta} \max_{u \in P(\tau)} l'Y[\vartheta, \tau]B(\tau)u\,d\tau$$

где $Y[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $y^{\cdot} = A(t)y$. Функция $\rho[l, \vartheta, t, x]$ (2.8) непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (2.6) при условии (2.7).

В общем случае достаточные условия существования функции $\varkappa(t, x)$, разрешающей задачу Коши (2.6), (2.7), определяются следующей теоремой.

Теорема 2.3. Если выполнены условия 1) — 5), то опорная функция $\rho[l, \vartheta, t, x]$ области достижимости $G(\vartheta, t, x)$ системы (2.1) непрерывно дифференцируема по t и x и удовлетворяет уравнению (2.6) при условии (2.7).

Доказательство. Достаточно показать, что опорная функция $\rho[l, \vartheta, t, x]$ непрерывно дифференцируема по x. Рассмотрим сходящуюся последовательность точек $\{x_0^{(k)}, k = 1, 2, \ldots\} \to x_0$, которой поставим в соответствие последовательность $\{x^\circ(t/t_0, x_0^{(k)}, l), k = 1, 2, \ldots\}$ оптимальных движений и последовательность функций $\{\psi^\circ(t/t_0, x_0^{(k)}, l), k = 1, 2, \ldots\}$, являющихся при каждом $x_0^{(k)}$ единственным решением задачи (2.3). Эти последовательности равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, поэтому в силу единственности решения задачи (2.3) равномерно по $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняются предельные соотношения

$$(2.9) \qquad \lim_{k\to\infty} x^\circ(t/t_0, x_0^{(k)}, l) = x^\circ(t/t_0, x_0, l)$$
$$\lim_{k\to\infty} \psi^\circ(t/t_0, x_0^{(k)}, l) = \psi^\circ(t/t_0, x_0, l)$$

Рассмотрим решения $x(t/t_0, x_0^{(k)} + y, l)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ системы дифференциальных уравнений

$$(2.10) \qquad x^{\cdot} = w^\circ(\psi^\circ(t/t_0, x_0^{(k)}, l), t, x),\ k = 1, 2, \ldots$$

при начальном условии $x(t_0) = x_0^{(k)} + y$, $\|y\| \leqslant \alpha$, где α — достаточно малое положительное число. Известно [6], что при достаточно малых α решение системы (2.10) существует, единственно и непрерывно дифференцируемо по начальному вектору $y^{(k)} = x_0^{(k)} + y$, $k = 1, 2, \ldots$; $y^{(0)} = x_0 + y$. Используя теоремы [6] о дифференцируемости решений системы (2.10) по начальным данным и равенства (2.9), получаем, что равномерно по t и y при достаточно малых α выполняется предельное соотношение

$$(2.11) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\partial x(t/t_0, x_0^{(k)} + y, l)}{\partial y^{(k)}} = \frac{\partial x(t/t_0, x_0 + y, l)}{\partial y^{(0)}}$$

Из способа выбора функции $w^\circ(\psi, t, x)$ следует, что при любом значении k справедливо включение

$$(2.12) \qquad x(t/t_0, x_0^{(k)} + y, l) \in X[t_0, x_0^{(k)} + y]$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varkappa^{(k)}(t_0, x_0^{(k)} + y) = l'x(\vartheta/t_0, x_0^{(k)} + y, l)$$

которые определены в некоторой достаточно малой окрестности точек $x_0^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, дифференцируемы по y при $\|y\| \leqslant \alpha$ и по построению справедливы равенства

$$\lim_{y \to 0} \varkappa^{(k)}(t_0, x_0^{(k)} + y) = l'x^\circ(\vartheta/t_0, x_0^{(k)}, l) = \varkappa(t_0, x_0^{(k)}) \tag{2.13}$$

Кроме того, из включения (2.12) и определения функции $\varkappa(t_0, x_0)$ (2.5) следует, что при $\|y\| \leqslant \alpha$ имеет место неравенство

$$\varkappa^{(k)}(t_0, x_0^{(k)} + y) \leqslant \varkappa(t_0, x_0^{(k)} + y) \tag{2.14}$$

Опираясь на соотношения (2.11)—(2.14) и рассуждения автора работы ([7], с. 1309), можно показать, что справедливо равенство

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{1}{\Delta x_0} \{\rho[l, \vartheta, t_0, x_0 + \Delta x_0] - \rho[l, \vartheta, t_0, x_0]\} = \\ = \left\{\frac{\partial [l'x(\vartheta/t_0, x_0 + y, l)]}{\partial y^{(0)}}\right\}_{y=0}$$

Следовательно, опорная функция $\rho[l, \vartheta, t, x]$ непрерывно дифференцируема по x.

Проведя далее стандартные в теории управления рассуждения, можно проверить, что функция $\varkappa(t, x) = \rho[l, \vartheta, t, x]$ — решение задачи Коши (2.6), (2.7).

3. Экстремальные стратегии. Пусть в некоторый момент времени t реализовалась позиция $y[t] = y$ и $z[t] = z$. Предположим, что для уравнений (1.1) выполнены условия 1) — 5), и обозначим $\rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y]$ и $\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z]$ опорные функции областей достижимости $G^{(1)}(\vartheta, t, y)$ и $G^{(2)}(\vartheta, t, z)$ для движений $y(\tau/t, y)$ и $z(\tau/t, z)$ (1.1), $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ из состояний $y(t) = y$ и $z(t) = z$ к моменту $\tau = \vartheta$.

Предположим, что функция $\sigma(x) \geqslant 0$ платы игры выпукла и удовлетворяет глобальному условию Коши — Липшица, тогда справедливо равенство [8]

$$\sigma(x) = \max_{l \in L} \{l'x - \omega(l)\} \tag{3.1}$$

$$\omega(l) = \sup_{x \in R^n} \{l'x - \sigma(x)\}, \quad L = \operatorname{dom} \omega(\cdot) = \{l \in R^n\colon \omega(l) < \\ < \infty\}$$

где $\omega(l)$ — функция, сопряженная [5, 8] к выпуклой функции $\sigma(x)$.

Введем теперь в рассмотрение величину программного максимина

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z) = \max_{z(\vartheta) \in G^{(2)}} \min_{y(\vartheta) \in G^{(1)}} \max_{l \in L} \{l'z(\vartheta) - l'y(\vartheta) - \omega(l)\}$$

По доказанному в п. 2, области достижимости $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ выпуклы, замкнуты и ограничены, сопряженная функция $\omega(l)$ выпукла, поэтому на основании общей теоремы о минимаксе [9] можем записать

$$\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z) = \max_{l \in L} \{\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z] - \rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y] - \omega(l)\} \tag{3.2}$$

Будем рассматривать регулярный случай [1], когда для всех позиций $\{t, y, z\}$ максимум в правой части равенства (3.2) достигается на единственном векторе $l^\circ = l^\circ(\vartheta, t, y, z)$.

Определение 3.1. Стратегии U_e и V_e будем называать экстремальными стратегиями (ЭС), если в каждой позиции $\{t, y, z\}$ они определяются множествами $U_e^*(t, y, z)$ и $V_e^*(t, y, z)$, состоящими из всех тех векторов u_e и v_e, которые удовлетворяют условиям максимума

$$(3.3)\qquad \begin{gathered} u_e'\,\partial\rho^{(1)}[l^\circ, \vartheta, t, y]/\partial y = \max_{u\in P(t, y)} u'\,\partial\rho^{(1)}[l^\circ, \vartheta, t, y]/\partial y \\ v_e'\partial\rho^{(2)}[l^\circ, \vartheta, t, z]/\partial z = \max_{v\in Q(t, z)} v'\partial\rho^{(2)}[l^\circ, \vartheta, t, z]/\partial z \\ (l^\circ = l^\circ(\vartheta, t, y, z)) \end{gathered}$$

В регулярном случае ЭС U_e и V_e являются допустимыми [1, 2] и справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.1. Пусть плата игры $\sigma(x(\vartheta))$ (1.2) — выпуклая функция, удовлетворяющая глобальному условию Коши — Липшица, для уравнений (1.1) выполнены условия 1) — 5) и имеет место регулярный случай. Тогда ЭС U_e является оптимальной стратегией, которая разрешает задачу 1.1. При этом

$$(\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, U_e, v) \leqslant \varepsilon^\circ(\vartheta, t_0, y_0, z_0)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $v[t]$ управления v.

Теорема 3.2. Пусть плата игры $\sigma(x, (\vartheta))$ (1.2) — выпуклая функция, удовлетворяющая глобальному условию Коши — Липшица, для уравнений (1.1) выполнены условия 1) — 5) и имеет место регулярный случай. Тогда ЭС V_e является оптимальной стратегией, которая разрешает задачу 1.2. При этом

$$(\gamma[\vartheta]/t_0, y_0, z_0, u, V_e) \geqslant \varepsilon^\circ(\vartheta, t_0, y_0, z_0)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u[t]$ управления u.

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 рассмотрим поведение производной $d\varepsilon^\circ[t]/dt$ абсолютно непрерывной функции $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(\vartheta, t, y[t], z[t])$ вдоль движений $y[t]$ и $z[t]$ (1.1), порождаемых стратегиями U_e, V (или U, V_e).

Известно [1], что в регулярном случае правая часть равенства (3.2) непрерывно дифференцируема по t, y и z. При вычислении производных зависимость вектора l° от позиции $\{t, y, z\}$ игнорируется, и потому справедливо равенство

$$(3.4)\qquad \begin{gathered} d\varepsilon^\circ[t]/dt = \partial\rho^{(2)}[l^\circ, \vartheta, t, z]/\partial t + v'[t]\,\partial\rho^{(2)}[l^\circ, \vartheta, t, z]/\partial z - \\ -\partial\rho^{(1)}[l^\circ, \vartheta, t, y]/\partial t - u'[t]\,\partial\rho^{(1)}[l^\circ, \vartheta, t, y]/\partial y \\ (l^\circ = l^\circ(\vartheta, t, y, z),\ y = y[t],\ z = z[t]) \end{gathered}$$

Из (3.4), теоремы 2.3 и определения ЭС вытекает, что $d\varepsilon^\circ[t]/dt \leqslant 0$ почти при всех t, если первый игрок придерживается ЭС U_e, а второй игрок применяет произвольную допустимую стратегию V. Если же, наоборот, второй игрок придерживается ЭС V_e, а первый игрок применяет произвольную допустимую стратегию U, то $d\varepsilon^\circ[t]/dt \geqslant 0$ почти при всех t. Что и доказывает справедливость теорем 3.1 и 3.2.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует

Теорема 3.3. Пусть плата игры $\sigma(x(\vartheta))$ (1.2) — выпуклая функция, удовлетворяющая глобальному условию Коши — Липшица, для уравнений (1.1) выполнены условия 1) — 5) и имеет место регулярный случай. Тогда ЭС U_e и V_e доставляют седловую точку игровой задаче наведения, какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$.

4. Пример. Рассмотрим задачу о сближении квазилинейных объектов на отрезке $[t_0, \vartheta]$, когда множества $P(t, y)$ и $Q(t, z)$, описывающие области управления игроков, имеют вид

(4.1) $$P(t, y) = \{u: \|u\| \leqslant \mu + \lambda \|y\|^2\}, \quad Q(t, z) = \{v: \|v\| \leqslant \nu + \lambda \|z\|^2\}$$

где $\mu \geqslant \nu > 0$, λ — малый параметр, а функция $\sigma(x)$, задающая плату игры, определяется равенством

(4.2) $$\sigma(x) = \|z - y\|$$

и, следовательно, величина $\gamma[\vartheta]$ (1.2) определяет евклидово расстояние между объектами в заданный момент времени $t = \vartheta$.

Проведя необходимые вычисления, найдем

$$\rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda] = l'y + \mu\|l\|(\vartheta - t) + \lambda[\|l\|\|y\|^2(\vartheta - t) + \frac{1}{3}\mu^2\|l\|(\vartheta - t)^3 + \mu l'y(\vartheta - t)^2] + \ldots$$

$$\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] = \mathrm{idem}\,\{\mu \to \nu,\ y \to z\}$$

Уравнение (3.2) в данном случае имеет вид

(4.3) $$\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda) = \max_{l \in L}\{\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] - \rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda]\}, \quad L = \mathrm{dom}\,\omega(\cdot) = \{l: \|l\| \leqslant 1\}$$

При $\mu \geqslant \nu > 0$ максимум в правой части равенства (4.3) будет достигаться на единственном векторе $l^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda)$ только в области $\varepsilon^\circ > 0$. Поэтому, следуя [1, 2], ЭС U_e и V_e определим следующим образом: в области $\varepsilon^\circ > 0$, $t < \vartheta$ множества U_e^* и V_e^* складываются из всех тех векторов u_e и v_e, которые удовлетворяют условиям максимума (3.3), в области $\varepsilon^\circ = 0$, $t < \vartheta$ будем полагать $U_e^* = P$ и $V_e^* = Q$. Проделав необходимые вычисления, получим, что ЭС первого и второго игроков задаются соотношениями:

а) в области $\varepsilon^\circ > 0$, $t < \vartheta$, множества $U_e^*(t, y, z, \lambda)$ и $V_e^*(t, y, z, \lambda)$ состоят из единственной точки

$$u_e[t] = (\mu + \lambda\|y\|^2)\frac{\partial\rho^{(1)}/\partial y}{\|\partial\rho^{(1)}/\partial y\|} = \mu l^\circ + \lambda\left[x\left(\frac{\|y\|^2}{\|x\|} - \mu\frac{x'y(\vartheta - t)}{\|x\|^2}\right) + 2\mu y(\vartheta - t)\right] + \ldots$$

$$v_e[t] = \mathrm{idem}\,\{\mu \to \nu,\ y \to z,\ \rho^{(1)} \to \rho^{(2)}\}$$

б) если $\varepsilon^\circ = 0$, $t < \vartheta$, то

$$U_e^*(t, y, z, \lambda) = P(t, y), \quad V_e^*(t, y, z, \lambda) = Q(t, z)$$

Вектор $l^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda)$, доставляющий максимум правой части равенства (4.3), имеет вид

$$l^\circ = \frac{x}{\|x\|} + \lambda\frac{(\vartheta - t)^2}{\|x\|^3}[\|x\|^2(\nu z - \mu y) + x(-\nu x'z + \mu x'y)] + \ldots$$

ЭС U_e и V_e, определенные таким образом, доставляют игре сближения (4.1), (4.2) седловую точку, и цена игры $\varepsilon^\circ(\vartheta, t, y, z, \lambda)$ для произвольной позиции $\{t, y, z\}$ определяется равенством

$$\varepsilon^\circ = \|x\| - (\mu - \nu)(\vartheta - t) + \lambda[(\|z\|^2 - \|y\|^2)(\vartheta - t) + \|x\|^{-1}x'(\nu z - \mu y)(\vartheta - t)^2 + \frac{1}{3}(\nu^2 - \mu^2)(\vartheta - t)^3] + \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Мат. сб., 1960, т. 51, вып. 1, с. 99—128.
4. *Альбрехт Э. Г.* Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 3, с. 430—442.
5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
7. *Альбрехт Э. Г.* О существовании оптимальной функции Ляпунова и непрерывного оптимального управления для одной задачи об аналитическом конструировании регуляторов.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 10, с. 1301—1311.
8. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
9. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 838 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
14.II.1985