Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 533.6.011

ОБ УДАРНЫХ ПОЛЯРАХ В ГАЗЕ С ОБЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

Тешуков В. М.

Для сред с более общими, чем для политропного газа, уравнениями состояния (удовлетворяющими условиям нормального газа [1]) выясняются дополнительные условия, обеспечивающие свойства ударных поляр, аналогичные хорошо изученным их свойствам в политропном газе [2].

1. Постановка задачи. Уравнения состояния газа задаются в виде $\varepsilon = \varepsilon(v, p)$, $p = g(v, S)$ (ε — удельная внутренняя энергия, v — удельный объем, $\rho = v^{-1}$ — плотность, p — давление, S — энтропия). Функции $\varepsilon(v, p)$, $g(v, S)$ определены при $0 < v < \infty$, $0 < p < \infty$, $-\infty < S < \infty$, являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям для нормального газа [2]

$$\varepsilon > 0,\ g > 0,\ g_S > 0,\ g_v < 0,\ g_{vv} > 0,\ \varepsilon_p > 0 \tag{1.1}$$

Последнее условие связано с положительностью температуры T ($T = \varepsilon_p g_S$).

Кроме того, предположим, что справедливы предельные соотношения

$$\lim_{S\to-\infty} g(v, S) = 0,\ \lim_{S\to\infty} g(v, S) = \infty,\ \lim_{S\to-\infty} \varepsilon(v, g(v, S)) = 0 \tag{1.2}$$

$$\lim_{S\to\infty} \varepsilon(v, g(v, S)) = \infty,\ \lim_{v\to 0} \varepsilon(v, p) = 0$$

Отметим, что в силу основного термодинамического тождества функции $\varepsilon(v, p)$ и $g_v(v, S(v, p))$ (где $S(v, p)$ определяется из соотношения $p = g(v, S)$) связаны уравнением

$$\varepsilon_v + g_v\varepsilon_p + p = 0 \tag{1.3}$$

Доказано [3], что при выполнении условий (1.1), (1.2) необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи о распаде произвольного разрыва (задача Римана) для уравнений одномерной газовой динамики сводится к следующему условию для функций ε, g:

$$\varepsilon_p \geqslant 2\varepsilon p (p^2 - 2\varepsilon g_v)^{-1} \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) — необходимое и достаточное условие монотонности (p, u)-диаграмм ударных волн — кривых в плоскости u, p, задаваемых уравнением

$$u - u_1 = \pm[(p - p_1)(v_1 - v)]^{1/2} \tag{1.5}$$

Здесь u — скорость газа в одномерном движении, u_1, p_1, v_1 — заданные величины, $v = v(p, v_1, p_1)$, где функция $v(p, v_1, p_1)$ определяется из уравнения адиабаты Гюгонио

$$H(v, p, v_1, p_1) = 0,\quad H(v, p, v_1, p_1) = \varepsilon(v, p) - \varepsilon(v_1, p_1) - 2^{-1}(p + p_1)(v_1 - v) \tag{1.6}$$

при выполнении более слабого, чем (1.4), неравенства

$$\varepsilon_p \geqslant -p(2g_v)^{-1} \tag{1.7}$$

В теории плоских стационарных течений аналогами (p, u)-диаграмм являются ударные поляры. Эти же кривые возникают в пространственных нестационарных задачах, описывающих взаимодействие ударной волны с жесткой стенкой [4], либо с другим сильным разрывом.

Напомним определение ударной поляры в стационарном случае. Пусть $\mathbf{w} = (w^1, w^2)$ — вектор скорости газа в плоском стационарном течении. Введем угол θ соотношением $\operatorname{tg}\theta = w^2/w^1$. Тогда следствием соотношений на сильном разрыве

$$(\mathbf{w} - \mathbf{w}_1)^2 = (p - p_1)(v_1 - v)$$
$$q^2 = q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v) \quad (q = |\mathbf{w}|)$$

(нижний индекс единица относится к состоянию перед скачком, величины без индекса соответствуют состоянию за скачком) является уравнение (θ, p)-поляры

$$\sin(\theta - \theta_1) = \pm [(p - p_1)(v_1 - v - v_1^2 q_1^{-2}(p - p_1)]^{1/2} \times \times [q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v)]^{-1/2} = \pm (\varphi(p, v_1, p_1, q_1))^{1/2}. \tag{1.8}$$

В (1.8), как и в (1.5), $v = v(p, v_1, p_1)$, величина q_1 удовлетворяет неравенству $q_1^2 > -v_1^2 g_v(v_1, S_1)$. Здесь предполагается выполненным условием (1.7)

Отметим очевидные свойства (θ, p)-поляры: кривая определена при $(v_1 - v) q_1^2 v_1^{-2} \geqslant (p - p_1) \geqslant 0$, две ее ветви симметричны относительно оси $\theta = \theta_1$. Всюду вдоль кривой $|\sin(\theta - \theta_1)| < 1$. Действительно, из $\sin^2(\theta - \theta_1) = 1$ следует, что $p - p_1 = q_1^2 v_1^{-1}$, но эти значения лежат вне области определения. Тогда существует θ_*, $0 < \theta_* < \pi/2$, такое, что $|\theta - \theta_1| \leqslant \theta_*$, причем значение θ_* достигается (предельной угол поворота вектора $\mathbf{w}$ при переходе через скачок).

Известно, что ударная поляра в политропном газе обладает следующими свойствами: A — существует единственное значение p_0, такое, что $q^2 = q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v) > -v^2 g_v(v, S)$ при $p < p_0$, что соответствует сверхзвуковым течениям за фронтом, и $q^2 = q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v) < -v^2 g_v(v, S)$ при $p > p_0$ (дозвуковые течения за фронтом); Б — любая прямая $\theta = \mathrm{const}$, $|\theta - \theta_1| < \theta_*$ пересекает ударную поляру ровно в двух точках, а значение θ_* достигается при единственном значении p; В — величина $|\theta - \theta_1|$ монотонно возрастает при возрастании p на сверхзвуковых участках ударной поляры.

Задача состоит в описании класса уравнений состояния, в котором для ударных поляр справедливы свойства А, Б, В.

Некоторые из известных свойств адиабаты Гюгонио (1.6) будут использованы в дальнейшем. Через f' будет обозначаться производная по p величины f вдоль адиабаты Гюгонио. При выполнении условий (1.1), (1.2) имеем

$$-g_v(v_1, S_1) < (p - p_1)(v_1 - v)^{-1} < -g_v(v, S) \tag{1.9}$$

в точках адиабаты Гюгонио (1.6) при $p > p_1$ (теорема Цемплена). При $p < p_1$ знаки неравенств меняются на противоположные. Кроме того

$$\left(\frac{p - p_1}{v_1 - v}\right)' = \frac{v_1 - v + v'(p - p_1)}{(v_1 - v)^2} > 0 \tag{1.10}$$

В этой формуле участвует $v'(p, v_1, p_1)$ в связи с тем, что в дальнейшем изложении условие (1.7) предполагается выполненным. Из (1.6) непосредственно следует, что вдоль адиабаты Гюгонио при $p \geqslant p_1$

$$v_1 - v < 2\varepsilon p^{-1} \tag{1.11}$$

Отметим, что функции ε и g связаны неравенством [3]

$$(1.12) \qquad -2\varepsilon g_v > p^2$$

Если условие (1.4) справедливо, то правая часть в (1.5) монотонна при $p > p_1$ [3]

$$(1.13) \qquad v_1 - v - v'(p - p_1) > 0$$

2. Свойство А. *Лемма* 1. Справедливость свойства А для ударной поляры (1.8) с произвольными параметрами p_1, v_1, q_1 ($p_1 > 0$, $v_1 > 0$, $q_1^2 > -v_1^2 g_v(v_1, S(v_1, p_1))$) эквивалентна строгой монотонности функции $2i + c^2$ ($i = \varepsilon + pv$ — удельная энтальпия, $c = (-v^2 g_v)^{1/2}$ — скорость звука) вдоль адиабаты Гюгонио с центром в точке (v_1, p_1) при $p > p_1$.

Доказательство. Из монотонности следует свойство А, так как в этом случае величина

$$q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v) + v^2 g_v = q_1^2 + 2i_1 - 2i - c^2$$

монотонно убывает вдоль адиабаты Гюгонио с ростом p. Пусть функция $2i + c^2$ принимает одинаковые значения в точках (v_2, p_2), (v_3, p_3) адиабаты Гюгонио с центром в точке (v_1, p_1) $(p_1 < p_2 < p_3)$, причем на отрезке $[p_1, p_2 - \delta]$ (δ — малая положительная величина) $2i + c^2$ не убывает (при малых $p - p_1$ она всегда строго возрастает). Положим $q_1^2 = (p_2 - p_1)(v_1 + v_2) - v_2^2 g_v(v_2, S(v_2, p_2))$. В силу возрастания на отрезке $[p_1, p_2 - \delta]$ и непрерывности функции $2i + c^2$ $q_1^2 > -v_1^2 (g_v)_1$. Утверждается, что точки (v_i, p_i) ($i = 2, 3$) принадлежат области определения ударной поляры с таким параметром q_1. Действительно, неравенство

$$(p_i - p_1)(v_1 - v_i)^{-1} < q_1^2 v_1^{-2} = [(p_i - p_1)(v_1 + v_i) - v_i^2 (g_v)_i] v_1^{-2}$$

следует из (1.9). Тогда на ударной поляре найдутся две «звуковые» точки и свойство А нарушено.

Лемма 2. Производная $(2i + c^2)' > 0$ на любой адиабате Гюгонио при $p \geqslant p_1 > 0$ в том и только в том случае, когда функции $\varepsilon(v, p)$ и $g(v, S(v, p))$ удовлетворяют неравенству

$$(2.1) \qquad \varepsilon_p \geqslant \frac{v^2 \varepsilon g_{vv} + (v - v^2 g_{vS}(2g_S)^{-1})(p^2 + 2\varepsilon g_v)}{-p^2 - 2\varepsilon g_v + v^2 p g_{vv}}$$

Замечание. Для рассматриваемого класса уравнений состояния условие (2.1) является более сильным ограничением по сравнению с (1.7) только на множестве точек (v, p), определяемом неравенством

$$2.2) \qquad (2g_v)^{-1} p - v + v^2 g_{vS}(2g_S)^{-1} - v^2 g_{vv}(2g_v)^{-1} > 0$$

(Неравенство (2.2) — условие положительности разности величин, стоящих в правых частях неравенств (2.1) и (1.7).) В частности, если для какого-то уравнения состояния $p = g(v, S)$ множество решений неравенства (2.2) пусто, неравенство (2.1) выполнено всюду в силу (1.7).

Доказательство леммы 2. После вычисления производной $(2i + c^2)'$ в силу уравнения (1.6) получаем неравенство

$$(2.3) \qquad (v_1 - v + (p - p_1) g v^{-1}) \Phi(p, v, p_1, v_1) > 0, \ \Phi(p, v, p_1, v_1) =$$
$$= -g_v \left(\varepsilon_p + v + \frac{v^2 g_{vv}}{2g_v} - \frac{v^2 g_{vS}}{2g_S} \right) + \frac{v^2 g_{vv}(p_1 - p - 2\varepsilon_p g_v)}{2(p_1 - p - (v_1 - v) g_v)}$$

эквивалентное неравенству $(2i + c^2)' > 0$. Первый сомножитель в (2.3) положителен в силу (1.1), (1.9), поэтому достаточно выяснить условия положительности Φ. Зафиксируем произвольную точку (v, p). Центры (v_1, p_1) различных адиабат Гюгонио, проходящих через эту точку, лежат на кривой $H = 0$. Производная $d\Phi/dp_1$ на $H = 0$ при фиксированных v, p и $0 \leqslant p_1 \leqslant p$ положительна в силу (1.1), (1.7), (1.9) и неравенства $1 - g_v dv_1/dp_1 < 0$, которое следует из (1.9), (1.10) (в (1.10) величины с индексом и без индекса нужно поменять местами). Следовательно, для положительности Φ на $H = 0$ при $p_1 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(p, v, 0, v + 2\varepsilon p^{-1}) \geqslant 0$, так как при $p_1 = 0$, $v_1 = v + 2\varepsilon p^{-1}$ достигается минимум $\Phi(p, v, p_1, v_1(p_1))$ по p_1 на $H = 0$. Если неравенство $\Phi(p, v, 0, v + 2\varepsilon p^{-1}) \geqslant 0$ записать в эквивалентном виде, разрешенном относительно ε_p, получим неравенство (2.1).

3. Свойство Б. Пусть выполнено условие (1.4).

Лемма 3. Свойство Б эквивалентно строгому возрастанию величины $M(p)$ при $p > p_1$

$$M(p) = v_1(p-p_1)[v_1+v-v'(p-p_1)][v_1-v-v'(p-p_1)]^{-1} \tag{3.1}$$

вдоль адиабаты Гюгонио с центром в точке (v_1, p_1).

Доказательство. Дифференцированием (1.8) получаем формулу

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{(1-v_1q_1^{-2}(p-p_1))(v_1-v-v'(p-p_1))}{(q_1^2-(p-p_1)(v_1+v))^2}[q_1^2-M(p)] \tag{3.2}$$

Из монотонности $M(p)$ следует свойство Б, так как $\varphi' = 0$ в единственной точке ударной поляры. Пусть $M(p)$ принимает одинаковые значения в точках (v_2, p_2), (v_3, p_3) адиабаты (1.6) $(p_1 < p_2 < p_3)$. Если $M'(p) \geqslant 0$ всюду, то $M(p) = \text{const}$ при $p \in [p_2, p_3]$, если же есть точка, где $M'(p) < 0$, то p_3 можно выбрать так, что $M'(p_3) < 0$ и точка p_3 близка к p_4, где $[p_1, p_4]$ — максимальный отрезок, на котором $M'(p) \geqslant 0$. Отметим, что неравенство $M'(p) > 0$ эквивалентно в силу (3.1) следующему:

$$2v(p-p_1)^2v'' + (v_1+v-v'(p-p_1))(v_1-v+v'(p-p_1)) > 0 \tag{3.3}$$

и, следовательно, $M'(p) > 0$ в окрестности точки p_1. Полагаем $q_1^2 = M(p_3)$, тогда $q_1^2 > M(p_1) = -v_1^2(g_v)_1$, так как точки p_3 и p_4 близки. Точки (v_2, p_2) и (v_3, p_3) принадлежат области определения ударной поляры с таким q_1:

$$\frac{p_i-p_1}{v_1-v_i} = \frac{v_1-v_i-v'(p_i)(p_i-p_1)}{v_1+v_i-v'(p_i)(p_i-p_1)}\,\frac{q_1^2}{v_1(v_1-v_i)} < \frac{q_1^2}{v_1^2}, \quad i=2,3$$

в силу (1.10). Свойство Б нарушено для ударной поляры с таким параметром q_1: в первом случае $|\theta-\theta_1| = \theta_*$ на отрезке $[p_2, p_3]$, во втором случае производная φ' меняет знак по крайней мере три раза. Так как $M'(p_3) < 0$, то найдутся $p_5 < p_3 < p_6$, такие, что $M(p_5) > q_1^2 > M(p_6)$, но при $(p-p_1)(v_1-v)^{-1} \to q_1^2v_1^{-2}$ имеем $M(p) > q_1^2$.

Лемма 4. Неравенства (а) либо (б) достаточны для выполнения (3.3)

(а) $\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \varkappa^2, \quad \beta \leqslant 4p\varepsilon_p g_v(\varkappa^2-\alpha)(p^2+2\varepsilon g_v)^{-1}$

(б) $\quad \alpha \leqslant 0, \quad \beta \leqslant 4p\varkappa(\varepsilon_p g_v\varkappa - p\alpha)(p^2+2\varepsilon g_v)^{-1}$

$$(\alpha = \varepsilon_p g_v s g s^{-1} + 2^{-1}, \ \beta = \varepsilon_{pv} - \varepsilon_p g_v s g s^{-1}, \ \varkappa = \varepsilon_p q_v p^{-1} + 2^{-1})$$

Доказательство. Неравенство (3.3) в силу (1.3), (1.6) преобразуется к эквивалентному

$$\begin{gathered} N = (p_1-p+g_v(v-v_1))[\varepsilon_p H_v((v_1+v)H_v+(p-p_1)H_p) + \\ + v(p-p_1)^2 g_v^{-1}\psi] + 2v(p-p_1)^2\varepsilon_p H_p{}^2 g_{vv} > 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\psi = 2^{-1}(p_1-p+g_v(v-v_1))\beta + (p_1-p-2g_v\varepsilon_p)\alpha$$

Так как $(v_1+v)H_v + (p-p_1)H_p > 2vH_v > 0$, неравенство (3.4) справедливо для $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ (тогда $\psi \leqslant 0$). Вдоль кривой (1.6) при фиксированных v, p и переменных v_1, p_1 имеем

$$d\psi/dp_1 = \alpha + 2^{-1}(1-g_v dv_1/dp_1)\beta$$

Рассуждая так же, как в п. 2, приходим к выводу, что при $\beta > 0$, $\alpha < 0$ наибольшее значение ψ достигается при $p_1 = 0$, $v_1 = v + 2\varepsilon p^{-1}$, а при $\beta < 0$ и $\alpha > 0$ — при $p_1 = p$, $v_1 = v$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то

$$\psi < -2^{-1}(2g_v\varepsilon p^{-1}+p)\beta - 2g_v\varepsilon_p\alpha$$

Неравенство (3.3) будет выполнено, если

$$2\varepsilon_p\varkappa^2 + (g_v)^{-1}\max_{p_1}\psi \geqslant 0 \tag{3.5}$$

так как $H_v((v_1+v)H_v+(p-p_1)H_v) > 2vH_v{}^2 > 2v\varkappa^2p^2$.

Из (3.5) с использованием полученных оценок ψ получаются достаточные условия а), б).

Можно получить достаточное условие для того, чтобы свойство Б нарушалось. Оно сводится к отрицательности величины N при $p_1 = 0$, $v_1 = v + 2\varepsilon p^{-1}$ при некоторых v, p.

4. **Свойство В.** *Лемма* 5. Пусть выполнено условие, сформулированное в лемме 2. Тогда свойство В эквивалентно неравенству

$$(p + vg_v)\,\varepsilon_p + pv \leqslant 0 \tag{4.1}$$

Доказательство. Неравенство $\varphi' > 0$ в силу формулы (3.2) равносильно следующему

$$[q_1^2 - (p - p_1)(v_1 + v) + v^2 g_v](v_1 - v - v'(p - p_1)) + + vH_v^{-1}(p - p_1 + g_v(v_1 - v))[(p - p_1 + vg_v)\,\varepsilon_p + v(p - p_1)] > 0 \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует достаточность условия (4.1) для монотонного возрастания $|\theta - \theta_1|$ на сверхзвуковом участке ударной поляры. Действительно, в случае выполнения неравенства (4.1) величина ε_p также удовлетворяет неравенству (1.4). Тогда справедливо неравенство (1.13) и первое слагаемое в (4.2) положительно на сверхзвуковом участке поляры. Положительность второго слагаемого обеспечивается неравенствами (1.7), (1.9), (4.1).

Докажем необходимость. Пусть в некоторой точке (v_2, p_2) $(p + vg_v)\,\varepsilon_p + vp > 0$. Проведем через эту точку адиабату Гюгонио и выберем на ней точку (v_1, p_1) с достаточно малым p_1, так, что

$$((p_2 - p_1 + v_2(g_v)_2)(\varepsilon_p)_2 + v_2(p_2 - p_1) > 0 \tag{4.3}$$

Положим $q_1^2 = (p_2 - p_1)(v_1 + v_2) - v_2^2(g_v)_2$. Тогда точка (v_2, p_2) принадлежит области определения ударной поляры с такими параметрами v_1, p_1, q_1 (аналогично п. 2). В силу леммы 2 участок поляры при $p \in [p_1, p_2)$ — сверхзвуковой, но в окрестности точки p_2 имеем $\varphi' < 0$. Свойство В нарушено. Лемма доказана.

Замечание. Монотонное возрастание $|\theta - \theta_1|$ при возрастании p на сверхзвуковых участках поляры обеспечивается только неравенством (4.1) (условия леммы 2 не используются).

В итоге для класса общих уравнений состояния газа, удовлетворяющих условиям (1.1), (1.2), (1.7), получены дополнительные условия, эквивалентные выполнению свойств А, В для ударных поляр в таком газе (леммы 2, 5), а также достаточные условия для выполнения свойства Б (лемма 4).

В связи с применением ударных поляр (1.8) при расчетах отражений и взаимодействий ударных волн возможно использование полученных условий для качественной характеристики процессов в конкретных средах. Например, если уравнения состояния среды таковы, что в некоторой области изменения параметров состояния нарушено условие (2.1), то при определенных параметрах потока, набегающего на косой скачок уплотнения, будет наблюдаться чередование сверхзвуковых и дозвуковых режимов течения за скачком при увеличении давления за скачком. В газе с уравнениями состояния, удовлетворяющими условиям леммы 4, задача обтекания клина однородным сверхзвуковым потоком [5] может иметь не более двух решений так же, как в случае политропного газа. В случае выполнения неравенства, обратного к (3.3) в точках некоторой адиабаты Гюгонио, задача обтекания клина может иметь три и более решений.

Если уравнения состояния газа не удовлетворяют условию (4.1), то в некоторой области параметров предельный угол поворота вектора скорости в косом скачке может достигаться при сверхзвуковом режиме течения за скачком, в то время как в политропном газе предельный угол достигается в случае дозвукового течения за скачком. В доказательствах лемм указывается, как с помощью уравнений состояния газа можно определять области параметров, где нарушаются свойства А, Б, В.

Возможные геометрические формы ударных поляр в общих двухпараметрических средах рассматривались в работе [6]. Свойства ударных поляр сопоставлялись в [6] с соответствующими свойствами адиабат Гюгонио и с условиями устойчивости ударных волн, при этом рассматривались также адиабаты Гюгонио, не проектирующиеся однозначно на ось p (нарушено условие (1.7)), либо не обладающие свойством звездности относительно центра (нарушено (1.10)). В указанной работе отмечалось, что наличие двух и более точек перегиба на адиабате Гюгонио может приводить к нарушению свойства В. Это согласуется с рассмотрениями данной работы (см. лемму 3), которая, в основном, посвящена описанию класса двухпараметрических сред с «нормальными» свойствами ударных поляр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
3. *Smith R. G.* The Riemann problem in gas dynamics.— Trans. AMS, 1979, v. 249, No. 1, p. 1—50.
4. *Тешуков В. М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 225—234.
5. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
6. *Егорушкин С. А.* Распад плоской ударной волны в двупараметрической среде с произвольным уравнением состояния.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 147—153.

Новосибирск

Поступила в редакцию 27.V.1985