

УДК 533.6.011

О ВНУТРЕННИХ СКАЧКАХ УПЛОТНЕНИЯ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ КОНФИГУРАЦИЙ КЛИН—ПЛАСТИНА И КОНУС—ЦИЛИНДР

Григоренко В. Л., Крайко А. Н.

Исследуется вопрос о внутренних скачках уплотнения (ВС) и причинах их возникновения при обтекании без угла атаки вязким и нетеплопроводным газом конфигураций клин — пластина (КП) и конус — цилиндр (КЦ) в случае присоединенной головной ударной волны и сверхзвукового течения за ней. Для КЦ ось цилиндра совпадает с направлением набегающего потока. Показано, что при этом в пределах справедливости изэнтропического приближения, используемого для описания течений со слабыми скачками, КП обтекается без образования ВС. С другой стороны, на исследуемых режимах достаточным условием возникновения ВС является перерасширение потока сразу за изломом — точкой стыковки образующих клина (конуса) и пластины (цилиндра). Наличие или отсутствие такого перерасширения при любой интенсивности присоединенной ударной волны (ПВ) и сверхзвуковом потоке за ней устанавливается без каких-либо дополнительных упрощений. На основе выполненных расчетов найдено, что во всем исследованном диапазоне чисел Маха набегающего потока M_∞ КЦ обтекается с ВС. В противоположность этому для КП возможны течения и с перерасширением (давление за изломом меньше давления набегающего потока), и с недорасширением, причем обе ситуации наблюдаются, в частности, для слабых ПВ и малых сверхзвуковых скоростей набегающего потока, когда в так называемом трансзвуковом приближении (ТП) за изломом всегда имеет место перерасширение (см. [1]). Отсутствие перерасширения за изломом для КП отнюдь не означает отсутствия ВС. Дело в том, что и в таких случаях изменение давления вдоль пластины может быть немонотонным. Это имеет место, например, если волны разрежения, идущие из излома, отражаются от ПВ или от некоторого ее участка, как волны сжатия. Учет последнего обстоятельства ведет к дополнительному сужению области реализации течений без ВС при полностью сверхзвуковом обтекании КП.

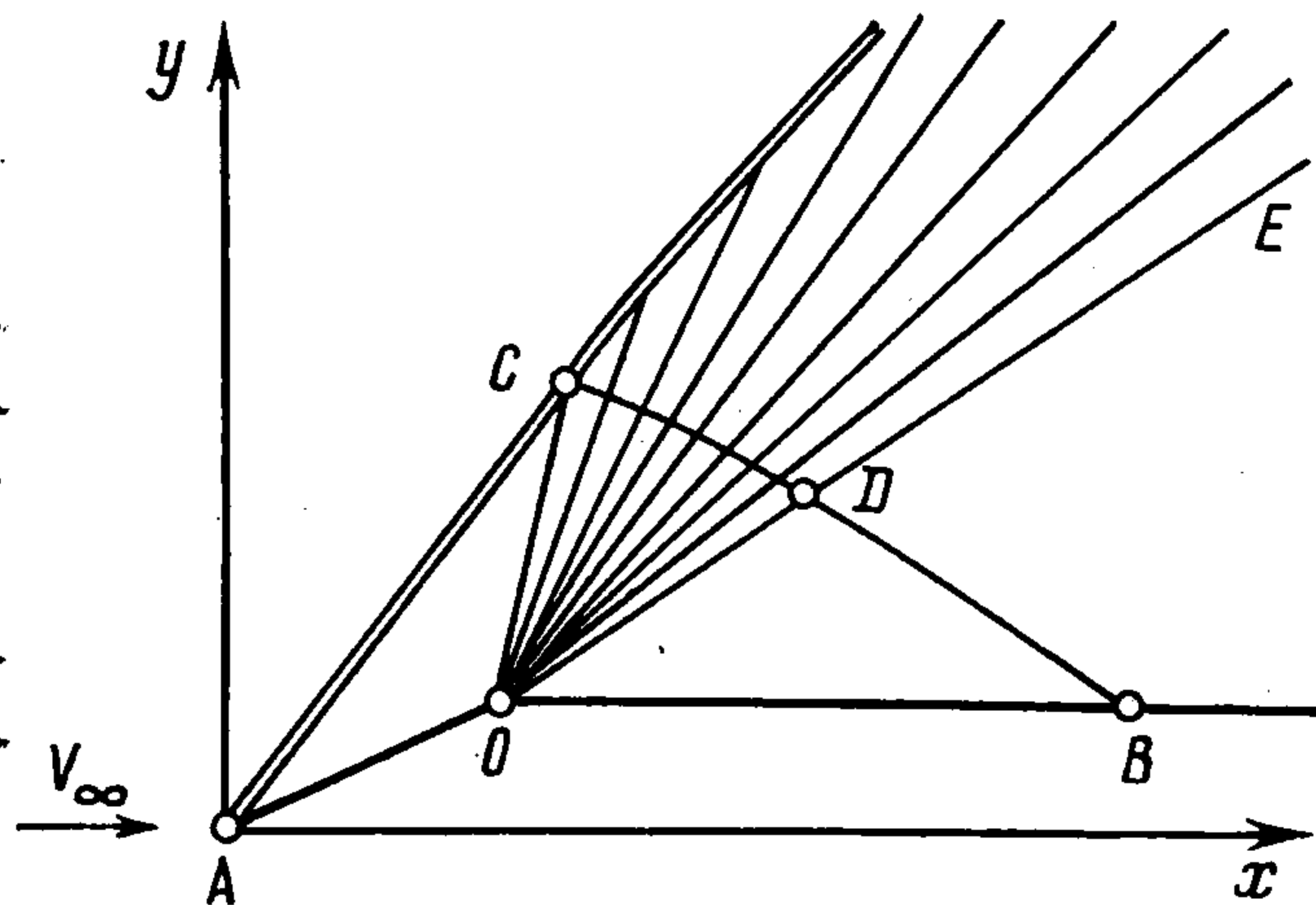
Изучаемые далее случаи полностью сверхзвукового обтекания КП и КЦ принципиально отличаются от случаев смешанного обтекания тех же конфигураций, когда на клине или конусе $M < 1$ непосредственно перед изломом поток становится звуковым и затем разгоняется в пучке волн разрежения. Последний замыкается справа ВС, который начинается сразу за изломом, имея в нем нулевую интенсивность и касаясь замыкающей характеристики пучка [2—5]. Здесь возникновение ВС обусловлено структурой течения в окрестности излома, где справедливо решение Вальо — Лаурина [6—8]. При этом для КП необходимость ВС в изэнтропическом приближении следует, согласно [1], из качественного анализа в плоскости годографа с привлечением теоремы А. А. Никольского — Г. И. Таганова [9, 10] о монотонности изменения угла наклона вектора скорости V при движении по звуковой линии.

Таким образом КЦ всегда обтекается с ВС. Для КП возможно полностью сверхзвуковое обтекание и без ВС, хотя на смешанных режимах, которые реализуются в основном с отошедшим головным скачком, ВС обязательны. Близкое положение сохраняется при замене пластины (цилиндра) клином (конусом) с углом наклона образующей, меньшим полуугла раствора ϑ_k головного клина (конуса). Кстати, затупленные по торцу пластина и цилиндр можно рассматривать как КП или КЦ с $\vartheta_k = \pi/2$. Подчеркнем, что первоначально в экспериментах (см. [11], с. 366) и расчетах [12, 13] ВС были обнаружены именно в таких случаях. Тем не менее, хотя для исследуемых конфигураций при смешанных режимах обтекания наличие ВС с неизбежностью следует из [4—5], анализ в рамках ТП полностью сверхзвукового обтекания КП слегка сверхзвуковым потоком нередко рассматривается как доказательство необходимости ВС на всех режимах их обтекания с $M_\infty > 1$.

Заметим, наконец, что вязкость и теплопроводность газа могут вносить существенные коррективы в решение вопроса о ВС. Так, даже в случаях, когда в идеальном

газе ВС отсутствует, обтекание излома завихренным в пограничном слое потоком может сопровождаться появлением зоны «обратного градиента давления» [14] и связанного с ней ВС. С другой стороны, обтекание по [6—8] в идеальном приближении изломов: достаточно большой величины (например, при $\vartheta_k = \pi/2$) связано со значительными перерасширениями потока и последующим резким возрастанием давления вдоль стенки (сразу за изломом соответствующая производная обращается в бесконечность). В таких ситуациях реально существующая вязкость ведет к образованию примыкающей к излому отрывной зоны и перемещению ВС вниз по потоку [11].

1. Схема полностью сверхзвукового обтекания комбинаций КП и КЦ приведена на фиг. 1, где x, y — оси декартовой или цилиндрической



Фиг. 1

систем координат. На фиг. 1 кроме контура тела AOB нарисованы ПВ (двойная линия), c^+ -характеристики, идущие из излома; и c^- -характеристика CB . Покажем, что в изэнтропическом приближении, т. е. для ПВ «достаточно малой» интенсивности, в плоском случае все c^+ -характеристики — отрезки прямых, а течение справа от замыкающей c^+ -характеристики OE пучка COE тождественно набегающему потоку.

Прежде чем сделать это, заметим, что если $z \equiv (p_+ - p_-)/p_-$, где p — давление, а индекс минус (плюс) приписан параметрам до (после) скачка, то, вопреки часто встречающемуся мнению, условие достаточно малой интенсивности ПВ (здесь $p_- \equiv p_\infty$) отнюдь не эквивалентно требованию $z \ll 1$. Действительно, для совершенного газа с газовой постоянной R и показателем адиабаты κ при $z = 0,5; 1$ и 2 приращение $\Delta s \equiv (s_+ - s_-)/(\kappa R)$ удельной энтропии s для $\kappa = 1,4$ не превышает $0,005; 0,025$ и $0,094$ соответственно. Эти значения Δs дают $0,0027; 0,014$ и $0,057$ в относительных приращениях $\Delta S \equiv (S_+ - S_-)/S_-$ энтропийной функции $S = p\rho^{-\kappa}$ (ρ — плотность), причем при $z = 2$ нормальная к ПВ составляющая числа Маха набегающего потока $M_{n\infty} \equiv M_{n-}$ превышает $1,6$, т. е. скачок не является слабым. Приведенные выше значения Δs и ΔS вычислены по точным соотношениям на скачке. В то же время первый член разложения Δs по степеням z

$$(1.1) \quad \Delta s = (\kappa + 1) z^3 / (12\kappa^3),$$

завышает Δs для тех же z в $1,9; 3$ и $6,2$ раза соответственно. Следовательно, для (1.1) $z = 0,5$ является уже слишком большим.

В сверхзвуковом плоскопараллельном изоэнергетическом и изэнтропическом потоке на характеристиках постоянны инварианты

$$I^\pm = \vartheta \pm \Phi(p), \quad \Phi(p) = \int_{p_*}^p \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho V^2} dp \quad (V = |\mathbf{V}|)$$

где ϑ — угол наклона \mathbf{V} к оси x , p_* — критическое давление, отвечающее $M = 1$, а I^+ (I^-) сохраняется на c^+ (c^-)-характеристиках. Известно, что инвариант, который в подобластях непрерывности течения сохраняется на характеристиках, пересекающих скачок, на слабых скачках меняется в том же порядке, что и s . Так, в случае фиг. 1 при $z \ll 1$ на ПВ аналогично (1.1) $I_+^- - I_-^- = O(z^3)$. Благодаря этому в рамках применимости изэнтропического приближения справа от ПВ

$$(1.2) \quad I^- \equiv \vartheta - \Phi(p) = I_\infty^- = -\Phi(p_\infty)$$

и реализуется течение типа простой волны с прямолинейными c^+ -характеристиками и равномерным (тождественным набегающему) потоком за

замыкающей характеристикой пучка. Следовательно, если КП обтекает-ся с ПВ, интенсивность которой мала, то независимо от величины M_∞ в изэнтропическом приближении ВС в потоке отсутствуют. Важно подчеркнуть, что по z диапазоны малости Δs и справедливости (1.2) весьма близки. Заметим также, что приведенные соображения широко используются при анализе стационарных и нестационарных течений со слабыми скачками, в частности при выводе законов их затухания [15]. Столь же хорошо известен факт близости до $O(z^2)$ включительно при $M_+ \geq 1$ уравнений ударной поляры и изэнтропической волны сжатия (1.2) или для совершенного газа — эциклоиды

$$(1.3) \quad \vartheta + \alpha + \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) - \frac{\pi}{2} = \text{const}$$

где α — угол Маха ($\sin \alpha = 1/M$).

Так как погрешности изэнтропического приближения и отличие уравнений ударной поляры и (1.2) или (1.3) — величины одного порядка, то основанные на сравнении этих уравнений выводы о ВС, интенсивность которого вне зависимости от M_∞ оказывается того же порядка, т. е. $O(z^3)$, незаконны. Естественно, что тот же результат о внепорядковой величине интенсивности ВС следует и непосредственно из формул ТП.

Действительно, пусть $\eta = (\kappa + 1)^{1/2} (V - 1)$, где V отнесено к критической скорости. Тогда, приписав индексы «1» и «2» параметрам в АОС и в DOB, найдем, что в указанном приближении [1]

$$(1.4) \quad \vartheta_1 = (\eta_\infty + \eta_1)^{1/2} (\eta_\infty - \eta_1) / \sqrt{2}, \quad \vartheta_1 + 2\eta_1^{3/2}/3 = 2\eta_2^{3/2}/3$$

Здесь первое уравнение описывает в ТП ударную волну, а второе — пучок волн разрежения COE.

Введем величины $\varepsilon = (\eta_\infty - \eta_1)/\eta_\infty \geq 0$ и $\delta = (\eta_\infty - \eta_2)/\eta_\infty$, которые характеризуют интенсивность ПВ и отличие параметров невозмущенного потока и потока в DOB. Нетрудно показать, что в рассматриваемом приближении $(p_1 - p_\infty)/p_\infty = k\varepsilon$, а $(p_2 - p_\infty)/p_\infty = k\delta$ с $k > 0$. В силу (1.4) для $\varepsilon \leq 1$ и $|\delta| \leq 1$ имеет место равенство

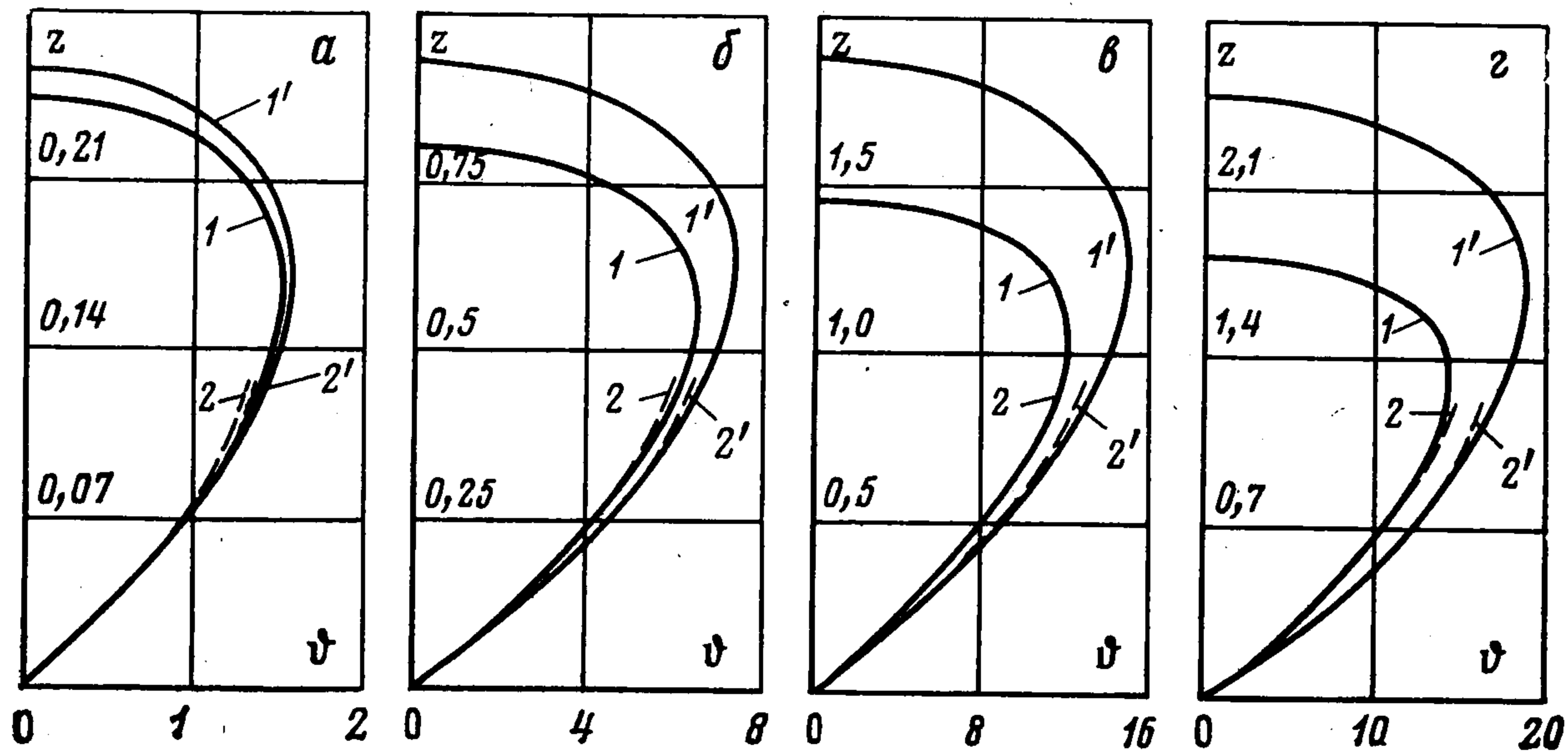
$$(1.5) \quad \delta = -\frac{\varepsilon^3}{96} - \frac{\varepsilon^4}{128} - \frac{11}{2048} \varepsilon^5 + o(\varepsilon^5) + O(\Delta s)$$

последнее слагаемое которого характеризует погрешность ТП.

С одной стороны, (1.5) без $O(\Delta s)$ в согласии с [1] показывает, что при полностью сверхзвуковом обтекании КП, когда $0 \leq \eta_1 < \eta_\infty$, а $\varepsilon > 0$, δ отрицательно, т. е. $p_2 < p_\infty$ и за изломом в рамках приближения (1.4) наблюдается перерасширение потока, ведущее к возникновению ВС. С другой стороны, поскольку в силу (1.5) $p_2 - p_\infty = O(\varepsilon^3) = O(z^3)$, где $z = (p_1 - p_\infty)/p_\infty$, а приращение энтропии Δs в скачке, с точностью до которого справедливо первое равенство (1.4), также есть $O(z^3)$, то величина указанного перерасширения является «внепорядковой» (лежит вне границ справедливости ТП). Это делает незаконным вытекающий из (1.5) вывод об обязательном присутствии ВС справа от OE.

Иллюстрацией близости ударной поляры и эциклоиды, описывающей при умеренных $M_- \equiv M_\infty$ и $M_+ \equiv M_1 \geq 1$ волну сжатия, служит фиг. 2. На ней для четырех значений M_∞ нарисованы половинки точной и «трансзвуковой» поляры, эциклоиды (1.3) и ее аналога из (1.4), где во втором равенстве следует положить: $\vartheta_1 \equiv \vartheta_+ \geq 0$ и $\eta_2 \equiv \eta_\infty$. Перечисленные кривые помечены цифрами 1, 1', 2 и 2'; сплошные кривые — поляры, штриховые — эциклоиды; фиг. 2, а—г отвечают $M_\infty = 1,1; 1,3; 1,5$ и $1,6$; угол $\vartheta \equiv \vartheta_+$ дан в градусах. Эти и последующие результаты относятся к $\kappa = 1,4$.

Переход от η_{\pm} к p_{\pm} для трансзвуковых поляр и эпициклоид проводился по точным изэнтропическим соотношениям. Для всех четырех M_{∞} отличие точных и трансзвуковых поляр почти всюду больше, чем трансзвуковых поляр и эпициклоид (исключение, и то лишь для $M_{\infty} = 1,1$, — окрестность верхней точки эпициклоиды, где $M_+ = 1$). К тому же точные поляры и эпициклоиды различаются меньше, чем трансзвуковые, а для $M_{\infty} = 1,5$ они в пределах точности графического представления на фиг. 2 совпадают. Наконец, для $M_{\infty} = 1,6$ точная эпициклоида располагается заведомо вне точной поляры при не зависящем от M_{∞} взаимном расположении их трансзвуковых аналогов (эпициклоида внутри поляры). Чтобы показать это принципиальное отличие, для



Фиг. 2

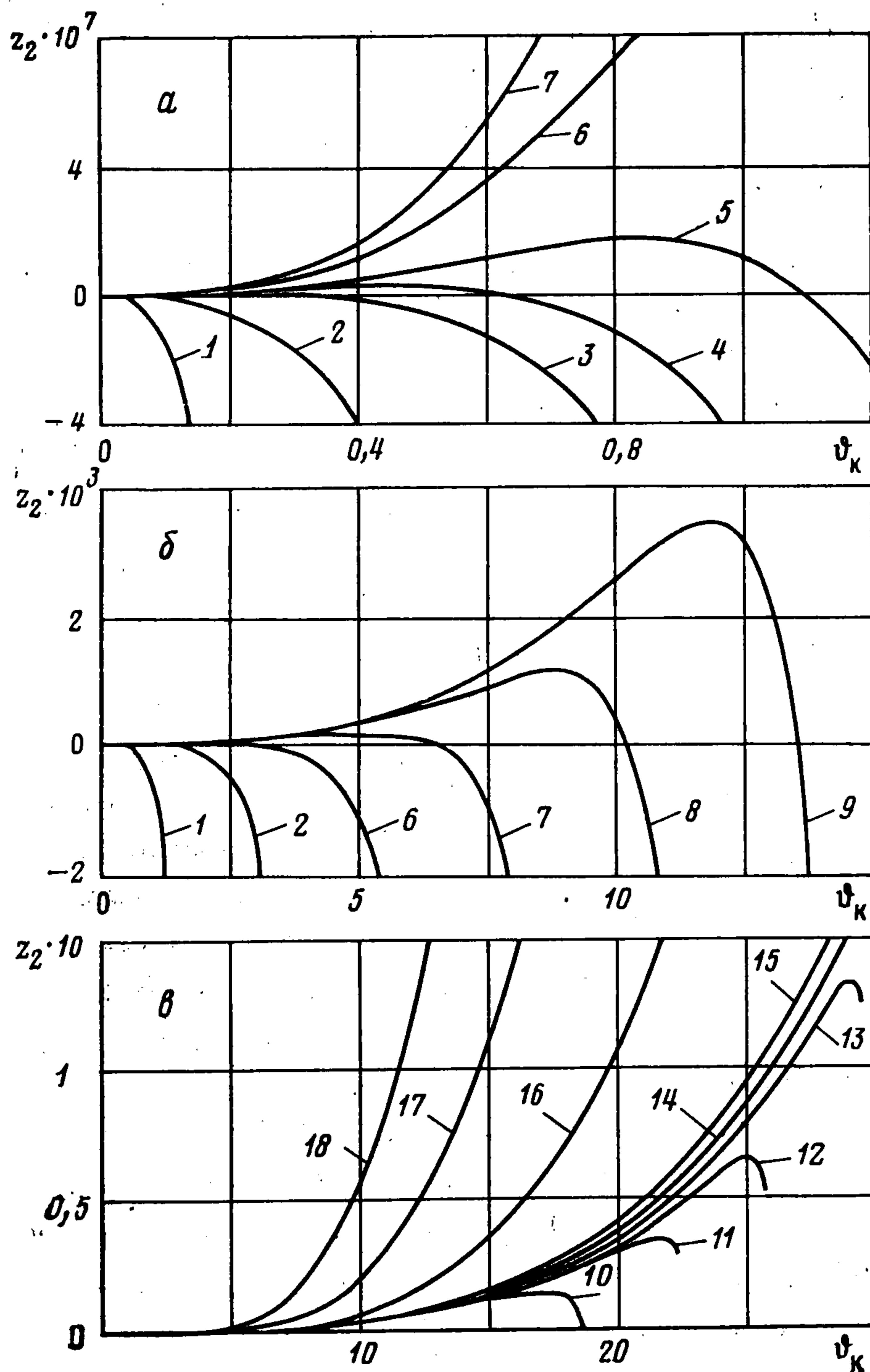
$M_{\infty} = 1,5$ и $1,6$ на фиг. 2, в и г даны кривые $1'$ и $2'$, хотя ТП для таких M_{∞} слишком грубо. В то же время одинаковое взаимное расположение трансзвуковых и точных поляр и эпициклоид при M_{∞} , достаточно близких к единице (фиг. 2, а и б), показывает, что, несмотря на принципиальную незаконность выводов ТП о ВС для полностью сверхзвукового обтекания КП, при таких M_{∞} эти выводы могут быть правильными. Последнее подтверждают и точные результаты следующего пункта.

2. При полностью сверхзвуковом обтекании рассматриваемых конфигураций совершенным газом p_2/p_{∞} — функция M_{∞} , κ и ϑ_k . Зависимость p_2/p_{∞} или $z_2 \equiv (p_2 - p_{\infty})/p_{\infty}$ от перечисленных параметров можно рассчитать точно, воспользовавшись условием постоянства I^- в точке излома O . Если α_k — угол Маха на AO , то это условие для совершенного газа с учетом (1.3) записывается в виде

$$(2.1) \quad f(\alpha_2) = f(\alpha_k) + \vartheta_k, \quad f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right)$$

На AO все параметры, в частности α_k и p_k , известны из решения задачи обтекания клина или конуса. Поэтому, найдя α_2 из (2.1), нетрудно по α_k и p_k определить p_2/p_k , а затем — $p_2/p_{\infty} = (p_2/p_k)(p_k/p_{\infty})$ и z_2 .

Результаты, полученные описанным способом для КП, приведены на фиг. 3, а—в, где угол ϑ_k дан в градусах; кривые 1, ... отвечают разным M_{∞} ; каждая кривая либо уходит за пределы графика, либо заканчивается тем ϑ_k , при котором $M_k = 1$, т. е. $\alpha_k = \pi/2$; между номерами кривых и числами Маха M_{∞} имеет место такое соответствие (в скобках — M_{∞}): 1 (1,1), 2 (1,2), 3 (1,25), 4 (1,26), 5 (1,27), 6 (1,3), 7 (1,4), 8 (1,5), 9 (1,6), 10 (1,8), 11 (2,0), 12 (2,2), 13 (2,5), 14 (2,75), 15 (3,0), 16 (5,0), 17 (7,5), 18 (10). Если учесть, что масштаб по z_2 на фиг. 3, а и б отличается почти в 10^4 раз, а на фиг. 3, б и в — более, чем в 10^2 раз, то малость z_2 на фиг. 3 еще в большей степени, чем фиг. 2, свидетельствует о близости точных уравнений ударной поляры и эпициклоиды. О том же говорят значения ($-z_2$), отвечающие $M_k = 1$. Для $M_{\infty} = 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8$ и $1,9$ они равны $4,5 \cdot 10^{-3}; 8,7 \cdot 10^{-3}; 1,2 \cdot 10^{-2}; 1,4 \cdot 10^{-2}; 1,5 \cdot 10^{-2}; 1,2 \cdot 10^{-2}; 9,4 \cdot 10^{-3}; 2,3 \cdot 10^{-3}$ и $-6,5 \cdot 10^{-3}$.



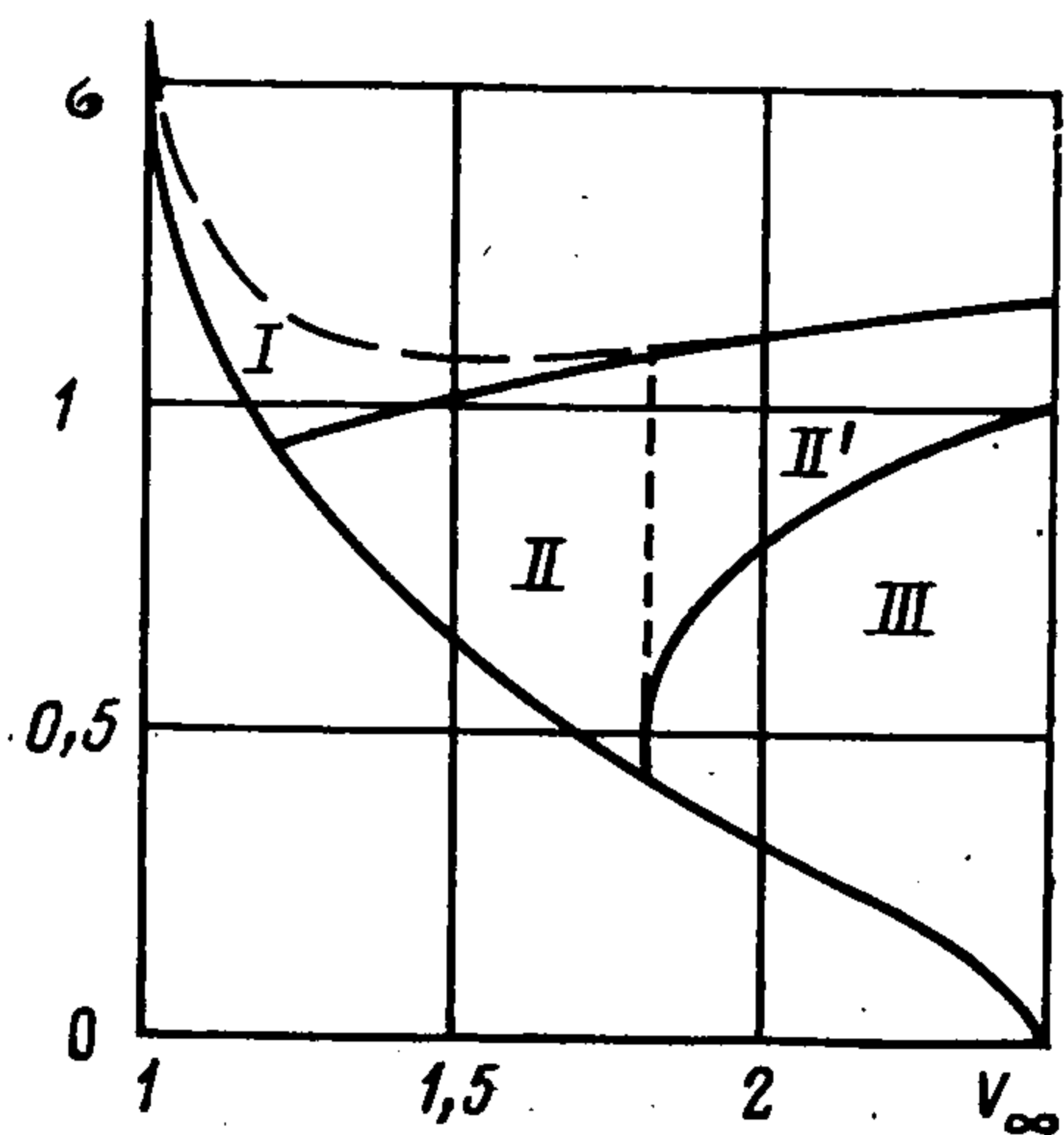
Фиг. 3

Как следует из фиг. 3, при обтекании КП реализуются и течение с перерасширением ($z_2 < 0, p_2 < p_\infty$), когда ВС обязателен, и с недорасширением ($z_2 > 0, p_2 > p_\infty$). С ростом M_∞ вторая возможность становится преобладающей. Это коррелирует с результатами работ [16, 17], где показано, что для гиперзвуковых скоростей обтекания конечного клина даже донное давление, соответствующее $\vartheta_2 < 0$, превышает p_∞ .

Так как при удалении по пластине вправо $p \rightarrow p_\infty$, то при $p_2 < p_\infty$ на ней, согласно [1] и сказанному ранее, неизбежно торможение потока и, как следствие, — возникновение ВС. В противоположность этому при $p_2 > p_\infty$ газ, двигаясь вдоль пластины, «в среднем» разгоняется. Однако и здесь изменение p может быть немонотонным, что, в первую очередь, обусловлено характером отражения волн разрежения, образующих пучок COE , от ПВ (в обсуждавшемся выше изэнтропическом приближении указанное отражение отсутствовало). Известно (например, [18], с. 336—338), что при каждом M_∞ или V_∞ знак λ — коэффициента отражения возмущений, приходящих на скачок вдоль s^+ -характеристик, зависит от угла наклона скачка σ . Реализующиеся при этом возможности поясняет фиг. 4. На ней в плоскости $V_\infty \sigma$, где V_∞ отнесено к критической скорости, сверхзвуковым скоростям потока за скачком отвечает область между верхней штриховой линией, соответствующей звуковой скорости за скачком, и нижней сплошной кривой — характеристикой: $\sigma =$

$= \arcsin(1/M_\infty)$. На характеристике $\lambda = 0$, как и на двух других сплошных кривых, которые в отличие от характеристики дают «нетривиальные» решения уравнения $\lambda(V_\infty, \sigma) = 0$.

В областях I и III $\lambda < 0$ и волны разрежения отражаются от скачка как волны сжатия. В областях II и II', граничащих одна с другой по отрезку вертикали, данной на фиг. 4 штрихами, $\lambda > 0$. Для V_∞^* и σ из II и II' волны разрежения отражаются от скачка как волны разрежения. Точке C на фиг. 1 отвечает некоторая точка c на фиг. 4, принадлежащая одной из областей I, II, II' или III. Всей ПВ справа от C соответствует на фиг. 4



Фиг. 4

отрезок вертикали, соединяющей c с нижней сплошной кривой — c^+ -характеристикой, в которую вырождается ПВ на бесконечности. Для точек c из II волны разрежения пучка отражаются от всей ПВ как волны разрежения. Во всех прочих случаях хотя бы часть волн разрежения пучка отражается от ПВ как волны сжатия. В таких ситуациях ВС в принципе может возникнуть уже из-за пересечения отраженных c^- -характеристик. Однако если этого и не произойдет, то после отражения от пластины волны сжатия из c^+ -характеристик, имеющих бесконечную протя-

женность, пересекутся обязательно. Следовательно, даже при $p_2 > p_\infty$ течение без ВС при сверхзвуковом обтекании КП возможно лишь для точек c из II. Заметим, кстати, что для слабых ПВ возможность недорасширения потока ($p_2 > p_\infty$ или $z_2 > 0$) свидетельствует о важности слагаемого $O(\Delta s)$ в (1.5). Действительно, можно показать, что для малых δ и Δs

$$z_2 = \frac{\kappa(V_\infty - 1)M_\infty^2}{V_\infty} \delta - \frac{\Delta s}{R}$$

где, как и ранее, $\delta = (\eta_\infty - \eta_2)/\eta_\infty = (V_\infty - V_2)/(V_\infty - 1)$. Отсюда и из (1.5) следует, что в отсутствие слагаемого $O(\Delta s)$ в (1.5) z_2 всегда отрицательно. Последнее противоречит точным результатам, представленным на фиг. 3.

Расчеты, аналогичные выполненным для КП, были проведены для КЦ. Они показали, что при полностью сверхзвуковом обтекании заостренного цилиндра для M_∞ и ϑ_k из области значений, перекрывающей диапазон указанных параметров из таблиц обтекания круговых конусов [19], за изломом имеет место перерасширение потока ($z_2 < 0$, $p_2 < p_\infty$). Более того, производная $(dp/dx)_2$ вдоль OB в точке O , вычисленная с использованием подхода и результатов [20] для $\vartheta_k = 10, 15, 20$ и 25° при $M_\infty = 1,6; 2,0; 2,4; 3,0; 4,1$ и $5,2$, а для $\vartheta_k = 10^\circ$ еще при $M_\infty = 1,2$, во всех перечисленных случаях положительна. Таким образом, здесь в отличие от КП, где в DOB реализуется равномерный поток, торможение газа начинается сразу за изломом. Следовательно, сверхзвуковое обтекание заостренного цилиндра, по крайней мере во всех исследованных случаях, сопровождается возникновением ВС.

Как уже отмечалось, выполненный анализ в основном переносится и на конфигурации, получающиеся заменой пластины (цилиндра) клином (конусом) с положительным углом наклона образующей $\vartheta_2 < \vartheta_k$. В частности, расчеты, выполненные с использованием результатов [20] для перечисленных выше значений ϑ_k и M_∞ , показали следующее. Во всех рассчитанных случаях, кроме $M_\infty = 4,1$ при $\vartheta_k = 25^\circ$ и $17^\circ \lesssim \vartheta_2 < 25^\circ$ и $M_\infty = 5,2$ при $\vartheta_k = 20^\circ$ и $11^\circ \lesssim \vartheta_2 < 20^\circ$ и при $\vartheta_k = 25^\circ$ и $10^\circ \lesssim \vartheta_2 <$

$< 25^\circ$, производная $(dp/dx)_2$ положительна (разумеется, $(dp/dx)_2 = 0$ при $\vartheta_2 = \vartheta_k$). С другой стороны, при $\vartheta_2 > 0$ и в плоском, и в осесимметричном случаях условия для образования ВС менее благоприятны по двум причинам. Во-первых, при $\vartheta_2 > 0$ конечна протяженность c^+ -характеристик, идущих от тела (все они в отличие от случая $\vartheta_2 = 0$ приходят на ПВ). Во-вторых, поскольку ПВ при $\vartheta_2 > 0$ не вырождается в характеристику, то отражение волн разрежения от ПВ без изменения их знака, начиная с некоторого ϑ_2 , может стать возможным и для точек s из области II' фиг. 4. Отмеченные обстоятельства расширяют диапазон параметров, при которых для рассматриваемых конфигураций реализуется течение без ВС. При этом в предельном случае $\vartheta_2 = \vartheta_k$ получаются тривиальные примеры (обтекание бесконечного клина и конуса с присоединенным скачком) сверхзвуковых течений без ВС. Несмотря на такие тривиальные и нетривиальные примеры, обсуждавшиеся выше (прежде всего, КП с точкой s из II), проведенный анализ в согласии с результатами работ [1—5, 11—14] подтверждает, что не содержащие ВС сверхзвуковые течения в полуограниченных областях являются скорее исключением, чем правилом. Последнее естественно для решений квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Авторы благодарят О. С. Рыжова за полезные советы и В. А. Вострцову — за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Э. Г. Образование «висячего» скачка уплотнения при обтекании профиля с изломом образующей. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, с. 1159—1167.
2. Шифрин Э. Г. О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5, с. 43—48.
3. Бойченко В. С., Лифшиц Ю. Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла. — Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2, с. 8—16.
4. Есин А. И., Чернов И. А. О скачке уплотнения при обтекании выпуклого угла. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 292—297.
5. Есин А. И., Чернов И. А. К вопросу о локальном течении вблизи выпуклого угла. — Аэродинамика: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1978, вып. 6 (9), с. 17—32.
6. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner — J. Fluid Mech., 1960, v. 9, pt. 1, p. 81—103.
7. Friedman M. P. Two-dimensional and axisymmetric rotational flows past a transonic corner. — J. Aerospace Sci., 1962, v. 29, No. 4, p. 503—504.
8. Есин А. И., Чернов И. А. О построении равномерно пригодного решения в окрестности звукового излома образующей тела вращения. — Аэродинамика: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975, вып. 4 (7), с. 36—46.
9. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. — ПММ, 1946, т. 10, вып. 4, с. 481—502.
10. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики: М.: Наука, 1981. 368 с.
11. Общая теория аэродинамики больших скоростей/Под ред. У. Р. Сирса. М.: Воениздат, 1962. 667 с.
12. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследование. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 400 с.
13. Belotserkovski O. M. Investigation of transsonic gas flows. — Успехи механики, 1980, т. 3, вып. 2, с. 5—46.
14. Ашратов Э. А., Соркин Л. И. Обтекание внешнего угла вязким сверхзвуковым потоком. — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 165—168.
15. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
16. Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я., Соколов Л. А. О донном давлении за клином в сверхзвуковом потоке. — Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2, с. 362—366.
17. Нейланд В. Я., Соколов Л. А. Донное давление за клином под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа. — Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2, с. 247—250.
18. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 448 с.
19. Kora l Z. Tables of supersonic flow around cones. Cambridge: Mass. Inst. Technol., 1947. 555 p.
20. Шмыглевский Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. — В кн.: Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957, с. 89—115.

Москва

Поступила в редакцию
29.III.1985