

УДК 533.6.011

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В МНОГОСКОРОСТНЫХ И МНОГОТЕМПЕРАТУРНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ

Струминский В. В., Шавалиев М. Ш.

Дается физический анализ, указываются математические свойства и условия применимости уравнений гидродинамики многотемпературной и многоскоростной смеси газов [1, 2]. Приводятся уравнения количества движения и энергии смеси в целом и уравнения, описывающие скоростное и температурное разделение компонентов смеси. Из системы уравнений Больцмана получаются и исследуются уравнения баланса энтропии и выражения для плотности и энтропии, потока энтропии и источника энтропии в многоскоростной и многотемпературной смеси. Показано, что в линейных законах переноса кинетические коэффициенты удовлетворяют соотношениям взаимности Онсагера.

Для вывода макроскопических уравнений движения газовых смесей из системы уравнений Больцмана известны два подхода. Первый подход, основанный на методе Чепмена — Энскога решения уравнений Больцмана [3], приводит к уравнениям Эйлера, Навье — Стокса, Барнетта и т. д. Описание всех компонентов смеси одной температурой и одной среднemasсовой скоростью предполагает, что из-за процессов перемешивания молекул компонентов в фазовом пространстве состояние смеси близко к равновесному. Вторым подход, предложенный в [1], описывает ситуации, когда процессы перемешивания не завершены и состояние смеси далеко от равновесного. Он приводит к уравнениям гидродинамики многоскоростной и многотемпературной смеси. Имеются также разные варианты моментных уравнений для такой смеси [4—6].

В последние годы появился ряд работ, посвященных уравнениям [1, 2], в которых установлен полный набор законов сохранения (дивергентных форм) [7], получено и исследовано уравнение баланса энтропии (для случая бинарной смеси) [8], вычислены дополнительные члены в уравнениях, содержащие более высокие степени от разностей скоростей и температур компонентов смеси [9], проведено обобщение на плотные газы [10], даны применения к решению конкретных задач [11]. Тем не менее в этой области остается еще ряд нерешенных проблем, некоторые из них рассматриваются ниже.

1. Гидродинамические уравнения. Гидродинамические уравнения многотемпературной и многоскоростной смеси [1, 2], соответствующие навье-стоксовскому приближению в обычных смесях, можно преобразовать к виду, удобному для физического анализа. Так, уравнения нулевого приближения имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$(1.2) \quad \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial t} u_{i\alpha} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla u_{i\alpha} \right) = - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} p_i - \sum_{j(\neq i)} F_{ij\alpha}^{(0)}$$

$$(1.3) \quad \frac{3}{2} n_i k \left(\frac{\partial}{\partial t} T_i + \mathbf{u}_i \cdot \nabla T_i \right) = - p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i - \sum_{j(\neq i)} \beta_{ij} F_{ij}^{(0)} \cdot \mathbf{u}_{ij}$$

$$(1.4) \quad \mathbf{F}_{ij}^{(0)} = \frac{16\rho_i\rho_j}{3(m_i+m_j)} \Omega_{ij}^{(1,1)} \mathbf{u}_{ij}, \quad \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$$

$$(1.5) \quad Q_{ij}^{(0)} = \frac{16\rho_i\rho_j k T_{ij}}{(m_i+m_j)^2} \left(\Omega_{ij}^{(1,1)} + u_{ij}^2 \frac{\frac{2}{3} \Omega_{ij}^{(1,2)} - \Omega_{ij}^{(1,1)}}{v_{iT}^2 + v_{jT}^2} \right), \quad T_{ij} = T_i - T_j$$

$$(1.6) \quad p_i = n_i k T_i, \quad \beta_{ij} = \frac{v_{iT}^2}{v_{iT}^2 + v_{jT}^2}, \quad v_{iT}^2 = \frac{2kT_i}{m_i}$$

(здесь и далее индексы из латинских букв означают компоненты смеси, индексы из греческих букв — компоненты векторов и тензоров).

В следующем приближении в правые части уравнений импульса (1.2) и энергии (1.3) добавятся, соответственно, слагаемые (1.7) и (1.8)

$$(1.7) \quad -\frac{\partial}{\partial r_\beta} p_{i\alpha\beta} - \sum_{j(\neq i)} F_{ij\alpha}^{(1)}$$

$$(1.8) \quad -\nabla \cdot \mathbf{q}_i - p_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_{i\alpha}}{\partial r_\beta} + \sum_{j(\neq i)} \beta_{ij} \mathbf{F}_{ij}^{(1)} \cdot \mathbf{u}_{ij}$$

$$(1.9) \quad p_{i\alpha\beta} = -2\mu_i (e_{i\alpha\beta} - \sum_{j(\neq i)} E_{ij} \langle u_{ij\alpha} u_{ij\beta} \rangle)$$

$$(1.10) \quad \mathbf{q}_i = -\lambda_i (\nabla T_i - \sum_{j(\neq i)} H_{ij} \mathbf{u}_{ij})$$

$$(1.11) \quad \mathbf{F}_{ij}^{(1)} = \frac{64\alpha_{ij}}{15(m_i + m_j)(v_{iT}^2 + v_{jT}^2)} (\rho_j \mathbf{q}_i - \rho_i \mathbf{q}_j)$$

$$\langle \Gamma_{\alpha\beta} \rangle \equiv \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\gamma}, \quad e_{i\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial u_{i\alpha}}{\partial r_\beta} \right\rangle$$

$$(1.12) \quad E_{ij} = \frac{8n_j m_i m_j}{3kT_i} \left(\beta_{ij} \Omega_{ij}^{(1,1)} - \frac{4kT_{ij}}{(m_i + m_j)(v_{iT}^2 + v_{jT}^2)} \Omega_{ij}^{(1,2)} - \frac{3m_j}{5(m_i + m_j)} \Omega_{ij}^{(2,2)} \right)$$

$$(1.13) \quad H_{ij} = \frac{32n_j m_i m_j}{15k(m_i + m_j)} \left[\frac{5}{2} \beta_{ij} \left(1 + \frac{2m_i}{m_i + m_j} \frac{T_{ij}}{T_i} \right) \Omega_{ij}^{(1,1)} - \frac{1}{\beta_{ij}} \left(\frac{m_j}{m_i + m_j} \right)^2 \left(1 + \frac{12k^2 T_{ij}^2}{m_j^2 (v_{iT}^2 + v_{jT}^2)} \right) \Omega_{ij}^{(1,2)} - \frac{2m_i m_j}{(m_i + m_j)^2} \frac{T_{ij}}{T_i} \Omega_{ij}^{(2,2)} \right]$$

Здесь F_{ij} — сила взаимодействия между i -м и j -м компонентами смеси — включает обмен количеством движения между компонентами вследствие несовпадения скоростей компонентов и термосилы, создаваемой градиентами парциальных температур. Термосилы исчезают в газе из максвелловских молекул и имеют разные знаки для жестких и мягких потенциалов межмолекулярного взаимодействия, что описывается множителем

$$(1.14) \quad \alpha_{ij} = \Omega_{ij}^{(1,2)} - \frac{5}{2} \Omega_{ij}^{(1,1)}$$

в (1.11), Q_{ij} — теплообмен между компонентами вследствие несовпадения их температур, $\mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij}$ — работа силы взаимодействия, β_{ij} — ее доля, переходящая во внутреннюю энергию i -го компонента ($\beta_{ij} < 1$, $\beta_{ij} + \beta_{ji} = 1$), $p_{i\alpha\beta}$, \mathbf{q}_i — парциальные тензор напряжений и тепловой поток, μ_i , λ_i — коэффициенты вязкости и теплопроводности чистого газа сорта i . В силу условия (1.15) в уравнениях опущен ряд членов ($\sim u_{ij}^3$, $p_{i\alpha\beta} u_{ij\beta}$). Вывод уравнений (1.1) — (1.13) и вычисление коэффициентов в них проведены для произвольного потенциала взаимодействия молекул в первом приближении по полиномам Сонина. Учет следующих членов в разложениях по полиномам Сонина не изменяет структуры и физического смысла членов в (1.1) — (1.13), а приводит лишь к уточнению коэффициентов.

Ниже сформулированы некоторые свойства полученных гидродинамических уравнений.

Уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея, вращений и отражения относительно начала координат.

Система уравнений нулевого приближения является гиперболической (характеристическое уравнение имеет десять различных действительных корней), так что задача Коши для нее корректна.

Система уравнений нулевого приближения имеет 14 линейно-независимых дивергентных форм [7].

Уравнения нулевого приближения (в отличие от аналогичных уравнений метод Чепмена — Энскога) необратимы из-за релаксационных членов $F_{ij}^{(0)}$, $Q_{ij}^{(0)}$ в уравнениях количества движения и энергии.]

Уравнения описывают течения с произвольным отношением температур компонентов смеси и с относительными скоростями

$$(1.15) \quad u_{ij} \ll \max(\sqrt{2kT_i/m_i}, \sqrt{2kT_j/m_j})$$

При этом, однако, скорости u_{ij} по порядку величины могут быть равны скоростям компонентов u_i , u_j и меньшей из тепловых скоростей.

Ограничение (1.15) на величину u_{ij} требуется при вычислении моментов от интегралов столкновений I_{ij} ($j \neq i$)

$$(1.16) \quad \int \psi(v_i) I_{ij}(f_i^{(0)}, f_j^{(n)}) dv_i, \quad \psi(v_i) = \left\{ m_i v_i, \frac{m_i}{2} (v_i - u_i)^2, \right. \\ \left. \langle (v_i - u_i)_\alpha (v_i - u_i)_\beta \rangle, (v_i - u_i) (v_i - u_i)^2 \right\}$$

входящих в гидродинамические уравнения и функцию распределения $f_i^{(n)} = f_i^{(0)} \Phi_i^{(n)}$. На основе свойств симметрии интегралов столкновений (1.16) записывается в виде

$$\int f_i^{(0)} f_j^{(0)} \Phi_j^{(n)} [\psi(v_i') - \psi(v_i)] g_{ij} b db d\varepsilon dv_j dv_i$$

Здесь вначале скорости v_i , v_j выражаются через скорость центра масс $G_{ij} = (m_i v_i + m_j v_j) (m_i + m_j)^{-1}$ и относительную скорость $g_{ij} = v_i - v_j$ и выполняется интегрирование по ε и b . Далее сумма показателей экспонент в $f_i^{(0)} f_j^{(0)}$ преобразуется к виду, в котором выделена зависимость от u_{ij} (см., например [9])

$$\frac{(v_i - u_i)^2}{v_{iT}^2} + \frac{(v_j - u_j)^2}{v_{jT}^2} = \bar{G}_{ij}^2 \left(\frac{1}{v_{iT}^2} + \frac{1}{v_{jT}^2} \right) + \frac{(g_{ij} - u_{ij})^2}{v_{iT}^2 + v_{jT}^2} \\ \bar{G}_{ij} = G_{ij} - g_{ij} \frac{2k(T_i - T_j)}{(m_i + m_j)(v_{iT}^2 + v_{jT}^2)} - (\beta_{ji} u_i + \beta_{ij} u_j)$$

Затем на основе условия (1.15) проводится разложение $\exp[-(g_{ij} - u_{ij})^2 (v_{iT}^2 + v_{jT}^2)^{-1}]$ в ряд по u_{ij} и после перехода в подынтегральном выражении от переменных G_{ij} , g_{ij} к \bar{G}_{ij} , g_{ij} выполняется интегрирование по ним.

Аналогичные уравнения ранее были получены для плазмы [12]. Однако использование при выводе уравнений ряда специфических для плазмы предположений (квазинейтральность, большая разница масс и температур электронов и ионов, интеграл столкновений Ландау и др.) делает невозможным перенос уравнений [12] на смеси нейтральных газов.

В некоторых случаях может оказаться более удобным описывать смесь общими для всей смеси скоростью и температурой, определяемыми соотношениями

$$(1.17) \quad \rho u = \sum_i \rho_i u_i, \quad \frac{3}{2} nkT = \frac{3}{2} \sum_i n_i kT_i + \frac{1}{2} \sum_i \rho_i V_i^2$$

где $\mathbf{V}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u} = \rho^{-1} \sum_j \rho_j \mathbf{u}_{ij}$ — диффузионная скорость i -компонента, и разностями скоростей и температур компонентов

$$(1.18) \quad \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \quad T_{ij} = T_i - T_j$$

Парциальные скорости и температуры выражаются через них так:

$$(1.19) \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \mathbf{V}_i, \quad T_i = T + \frac{1}{n} \sum_j n_j T_{ij} - \frac{1}{3kn} \sum_j \rho_j V_j^2$$

Сложение и попарное вычитание уравнений (1.2) дают, соответственно, уравнение количества движения смеси в целом и уравнения для разностей скоростей компонентов смеси. При помощи (1.17) — (1.19) они могут быть записаны так:

$$(1.20) \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\alpha \right) = - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} p - \frac{\partial}{\partial r_\beta} p_{\alpha\beta}$$

$$(1.21) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{ij\alpha} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_{ij\alpha} = - \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla u_\alpha - (\mathbf{V}_i \cdot \nabla V_{i\alpha} - \mathbf{V}_j \cdot \nabla V_{j\alpha}) - \\ - \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial r_\beta} p_{i\alpha\beta} - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial r_\beta} p_{j\alpha\beta} \right) - \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} p_i - \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} p_j \right) - \sum_k \left(\frac{1}{\rho_i} F_{ik\alpha} - \frac{1}{\rho_j} F_{jk\alpha} \right) \quad p = nkT \\ p_{\alpha\beta} = \sum_i p_{i\alpha\beta} + \sum_i \rho_i \langle V_{i\alpha} V_{i\beta} \rangle$$

Компоненты тензора напряжений смеси $p_{\alpha\beta}$ дополнительно к навье-стоксовским напряжениям содержат напряжения Кармана и ряд барнеттовских членов [13].

Аналогично из уравнений (1.3) получаются уравнение энергии смеси и уравнения для разностей температур компонентов

$$(1.22) \quad \frac{3}{2} kn \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = - p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} - p_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \\ + \frac{3}{2} kT \nabla \cdot \left(\sum_i n_i \mathbf{V}_i \right) - \frac{5}{2} k \sum_i \sum_j \nabla \cdot \left(\frac{n_i n_j}{n} T_{ij} \mathbf{V}_i \right) + \dots$$

$$\mathbf{q} = \sum_i \mathbf{q}_i + \frac{5}{2} kT \sum_i n_i \mathbf{V}_i$$

$$(1.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} T_{ij} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_{ij} = - \frac{2}{3} T_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2}{3} T \nabla \cdot \mathbf{u}_{ij} - \mathbf{u}_{ij} \cdot \nabla T - \\ - k \sum_k \left[\mathbf{V}_i \cdot \nabla \left(\frac{n_k}{n} T_{ik} \right) - \mathbf{V}_j \cdot \nabla \left(\frac{n_k}{n} T_{jk} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{n_k}{n} (T_{ik} \nabla \cdot \mathbf{V}_i - T_{jk} \nabla \cdot \mathbf{V}_j) \right] - \left(\frac{1}{n_i} \nabla \cdot \mathbf{q}_i - \frac{1}{n_j} \nabla \cdot \mathbf{q}_j \right) - \\ - \left(\frac{1}{n_i} p_{i\alpha\beta} - \frac{1}{n_j} p_{j\alpha\beta} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} - \sum_k \left(\frac{Q_{ik}}{n_i} - \frac{Q_{jk}}{n_j} \right) + \\ + \sum_k \left(\frac{\beta_{ik}}{n_i} \mathbf{F}_{ik} \cdot \mathbf{u}_{ik} - \frac{\beta_{jk}}{n_j} \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{u}_{jk} \right) + \dots$$

Здесь многоточием обозначены члены $\sim u_{ij}^3, p_{i\alpha\beta} u_{ij\beta}$. Они не выписаны, так как члены такого порядка были отброшены еще при выводе исходных уравнений (1.1) — (1.13). В случае бинарной смеси из максвелловских молекул (1.21), (1.23) совпадают с аналогичными уравнениями из [5], если в последних исключены члены $\sim u_{ij}^3, p_{i\alpha\beta} u_{ij\beta}$.

В предположении малости времен релаксации u_{ij} и T_{ij} по сравнению с характерным гидродинамическим временем, следуя [5], можно показать, что в первом приближении из (1.21) получается соотношение

$$-\frac{1}{\rho_i} \nabla (n_i kT) + \frac{1}{\rho_j} \nabla (n_j kT) = \sum_k \left(\frac{1}{\rho_i} \mathbf{F}_{ik} - \frac{1}{\rho_j} \mathbf{F}_{jk} \right)$$

для определения u_{ij} , а T_{ij} оказываются величинами второго порядка по градиентам макроскопических величин. Разрешая эти соотношения относительно u_{ij} , можно получить выражения для диффузионных скоростей. Термодиффузионный член в диффузионной скорости определяется термосилами в \mathbf{F}_{ij} , а диффузионный термоэффект в тепловом потоке — членами $\sim u_{ij}$ в \mathbf{q}_i . После этого уравнения (1.20) переходят в уравнения Навье — Стокса, а (1.22) — в уравнение энергии обычной смеси. Однако коэффициенты вязкости и теплопроводности в них являются суммами коэффициентов вязкости и теплопроводности компонентов смеси.

2. Уравнение баланса энтропии. Введя определение удельной энтропии

$$(2.1) \quad \rho s = \sum_i \rho_i s_i = -k \sum_i \int f_i (\ln f_i - 1) d\mathbf{v}_i$$

стандартным путем [14] можно получить уравнение баланса энтропии вида (\mathbf{J}_s — поток энтропии, σ — источник энтропии)

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho s = -\nabla \cdot \left(\sum_i \rho_i s_i \mathbf{u}_i + \mathbf{J}_s \right) + \sigma$$

$$\mathbf{J}_s = -k \sum_i \int (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) f_i (\ln f_i - 1) d\mathbf{v}_i$$

$$\sigma = -k \sum_i \sum_j \int I_{ij}(f_i, f_j) \ln f_i d\mathbf{v}_i \geq 0$$

В методе [1] решения уравнений Больцмана предполагается, что перекрестные интегралы столкновений

$$(2.3) \quad I_{ij}(f_i, f_j) \sim KI_{ii}(f_i, f_i)$$

а функции распределения представляются в виде рядов по числу Кнудсена K

$$(2.4) \quad f_i(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = f_i^{(0)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \Phi_i^{(n)} \right)$$

$$f_i^{(0)} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i)^2}{2kT_i} \right]$$

При помощи (2.3), (2.4) величины ρs , \mathbf{J}_s , σ также можно записать в виде рядов по K , первые два члена которых таковы:

$$(2.5) \quad \rho s^{(0)} = -k \sum_i \int f_i^{(0)} (\ln f_i^{(0)} - 1) d\mathbf{v}_i =$$

$$= k \sum_i \left[\frac{3}{2} n_i - n_i \ln \left(\frac{n_i}{e} \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \right) \right]$$

$$\rho s^{(1)} = -k \sum_i \int f_i^{(0)} \Phi_i^{(1)} \ln f_i^{(0)} d\mathbf{v}_i = 0$$

$$\mathbf{J}_s^{(0)} = -k \sum_i \int (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) f_i^{(0)} (\ln f_i^{(0)} - 1) d\mathbf{v}_i = 0$$

$$\mathbf{J}_s^{(1)} = -k \sum_i \int (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i) f_i^{(0)} \Phi_i^{(1)} \ln f_i^{(0)} d\mathbf{v}_i = \sum_i \frac{\mathbf{q}_i^{(1)}}{T_i}$$

$$\sigma^{(0)} = -k \sum_{i \neq j} \int I_{ij}(f_i^{(0)}, f_j^{(0)}) \ln f_i^{(0)} d\mathbf{v}_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} = & -k \sum_i \int \Phi_i^{(1)} [I_{ii}(f_i^{(1)}, f_i^{(0)}) + I_{ii}(f_i^{(0)}, f_i^{(1)})] dv_i - \\ & - k \sum_{i \neq j} \int \{ \Phi_j^{(1)} I_{ij}(f_i^{(0)}, f_j^{(0)}) + [I_{ij}(f_i^{(0)}, f_j^{(1)}) + I_{ij}(f_i^{(1)}, f_j^{(0)})] \ln f_i^{(0)} \} dv_i \end{aligned}$$

При выводе второго и четвертого соотношений в (2.5) использованы условия единственности $f_i^{(1)}$ и определения тепловых потоков [1].

В первом приближении по K плотность энтропии вследствие определения (2.1) представляется в виде суммы парциальных энтропий, являющихся такими функциями локальных T_i и n_i , как если бы каждый компонент находился в равновесном состоянии с собственной температурой T_i . Поток энтропии определяется парциальными потоками тепла. Отметим, что, в отличие от обычных смесей, здесь источник энтропии в нулевом приближении отличен от нуля из-за процессов релаксации скоростей и температур компонентов смеси. Это указывает на необратимость гидродинамических уравнений нулевого приближения.

Используя интегральные уравнения для $\Phi_i^{(1)}$ и определения величин Q_{ij} , F_{ij} , q_i и $p_{i\alpha\beta}$ [1], выражение для источника энтропии можно записать в виде суммы произведений потоков на сопряженные к ним термодинамические силы, как это принято в термодинамике необратимых процессов

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} = & \sum_{i < j} \sum Q_{ij} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right) + \\ & + \sum_{i < j} \sum F_{ij} \cdot \left(\frac{\beta_{ij}}{T_i} + \frac{\beta_{ji}}{T_j} \right) u_{ij} + \sum_i q_i \cdot \nabla \frac{1}{T_i} - \sum_i p_{i\alpha\beta} \frac{e_{i\alpha\beta}}{T_i} \end{aligned}$$

Здесь Q_{ij} , F_{ij} , q_i , $p_{i\alpha\beta}$ — потоки, $(T_j^{-1} - T_i^{-1})$, $(T_i^{-1}\beta_{ij} + T_j^{-1}\beta_{ji}) u_{ij}$, ∇T_i^{-1} , $-T_i^{-1}e_{i\alpha\beta}$ — сопряженные термодинамические силы.

Линейные законы, связывающие потоки и силы, можно получить из (1.4), (1.5), (1.9) — (1.13) при условии $|T_i - T_j| \ll (T_i + T_j)$ (малость остальных сил была принята еще при выводе гидродинамических уравнений). Они имеют вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Q_{ij} = & L_{Q_{ij}Q_{ij}} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right), \quad F_{ij} = L_{F_{ij}F_{ij}} \frac{1}{T} u_{ij} + \\ & + \sum_{k(\neq i, j)} \left(L_{F_{ij}F_{ik}} \frac{1}{T} u_{ik} + L_{F_{ij}F_{kj}} \frac{1}{T} u_{kj} \right) + \\ & + L_{F_{ij}q_i} \nabla \frac{1}{T_i} + L_{F_{ij}q_j} \nabla \frac{1}{T_j} \\ q_i = & L_{q_i q_i} \nabla \frac{1}{T_i} + \sum_{j(\neq i)} L_{q_i F_{ij}} \frac{1}{T} u_{ij}, \quad p_{i\alpha\beta} = -L_{p_i p_i} \frac{1}{T} e_{i\alpha\beta} \end{aligned}$$

При малых разностях скоростей и температур компонентов смеси может возникнуть сомнение в справедливости многоскоростного и многотемпературного описания смеси. Однако в методе Чепмена — Энскога, приводящем к односкоростному и однотемпературному описанию, u_{ij} — диффузионная скорость $\sim Kc_0$ (c_0 — скорость звука смеси), а разность температур $\sim u_{ij}^2 \sim K^2 c_0^2$ (см. (1.19)). Поэтому выше подразумевается, что $\max(v_{iT}, v_{jT}) \gg |u_{ij}| \gg Kc_0$ и $(T_i + T_j) \gg |T_i - T_j| \gg K^2 (T_i + T_j)$.

В случае векторных явлений переноса (взаимодействие между компонентами и теплопроводность) имеются перекрестные эффекты, а соответствующие коэффициенты удовлетворяют соотношениям взаимности Онсагера — Казимира

$$(2.8) \quad L_{F_{ij}q_i} = -L_{q_i F_{ij}} = 32 \frac{m_i m_j \rho_j T \lambda_i \alpha_{ij}}{(m_i + m_j)^2}, \quad L_{F_{ij}q_j} = -L_{q_j F_{ij}}$$

(так как сила ∇T_i^{-1} — четная функция молекулярных скоростей, а $T^{-1}u_{ij}$ — нечетная функция). В многокомпонентных смесях, в отличие от бинарных [8], сила F_{ij} зависит не только от u_{ij} , но и от u_{ik} и u_{jk} ($k \neq i, j$), являющихся силами, сопряженными к F_{ik} и F_{jk} . Между соответствующими коэффициентами выполняются соотношения взаимности Онсагера

$$(2.9) \quad L_{F_{ij}F_{ik}} = L_{F_{ik}F_{ij}} = - \left(\frac{32}{15} \right)^2 \frac{m_i^2 m_j m_k \rho_j \rho_k \lambda_i \alpha_{ij} \alpha_{ik}}{k^2 (m_i + m_j)^2 (m_i + m_k)^2}$$

$$L_{F_{ij}F_{kj}} = L_{F_{kj}F_{ij}}$$

$L_{F_{ij}q_i}$, $L_{F_{ij}F_{kj}}$ получаются из $L_{F_{ij}q_i}$, $L_{F_{ij}F_{ik}}$ взаимной заменой индексов i, j . Остальные коэффициенты в (2.7) определяются соотношениями

$$(2.10) \quad L_{Q_{ij}Q_{ij}} = \frac{16\rho_i\rho_j kT^2}{(m_i + m_j)^2} \Omega_{ij}^{(1,1)}, \quad L_{F_{ij}F_{ij}} = L_{F_{ij}F_{ij}}^{(0)} + L_{F_{ij}F_{ij}}^{(1)} =$$

$$= \frac{16\rho_i\rho_j T}{3(m_i + m_j)} \Omega_{ij}^{(1,1)} - \left(\frac{32}{15} \right)^2 \frac{m_i^2 m_j^2 (\rho_j^2 \lambda_i + \rho_i^2 \lambda_j) \alpha_{ij}}{k^2 (m_i + m_j)^4}$$

$$L_{q_i q_i} = \lambda_i T^2, \quad L_{p_i p_i} = 2\mu_i T$$

Чтобы источник энтропии (2.13) всегда оставался положительным, матрица кинетических коэффициентов L_{nm} ($n, m = Q_{ij}, F_{ij}, q_i, p_i$) должна удовлетворять определенным условиям [14]

$$(2.11) \quad L_{nm} \geq 0, \quad \left\| \begin{array}{cc} L_{F_{ij}F_{ij}} & L_{F_{ij}q_i} \\ L_{q_i F_{ij}} & L_{q_i q_i} \end{array} \right\| = L_{q_i q_i} L_{F_{ij}F_{ij}}^{(0)} \left(1 - \frac{L_{F_{ij}F_{ij}}^{(1)}}{L_{F_{ij}F_{ij}}^{(0)}} \right) + L_{q_i F_{ij}}^2 \geq 0$$

Неотрицательность $L_{F_{ij}F_{ij}}$ следует из неравенства

$$(2.12) \quad \frac{L_{F_{ij}F_{ij}}^{(1)}}{L_{F_{ij}F_{ij}}^{(0)}} =$$

$$= 2 \left(\frac{\alpha_{ij}}{\Omega_{ij}^{(1,1)}} \right)^2 \left[\frac{n_j \Omega_{ij}^{(1,1)}}{n_i \Omega_i^{(2,2)}} \left(\frac{m_i}{m_i + m_j} \right)^3 + \frac{n_j \Omega_{ij}^{(1,1)}}{n_j \Omega_j^{(2,2)}} \left(\frac{m_j}{m_i + m_j} \right)^3 \right] < 1$$

Оно выполняется в силу условия $n_j \Omega_{ij} \ll n_i \Omega_i$ (следствие исходного предположения (2.3)) и $\alpha_{ij} (\Omega_{ij}^{(1,1)})^{-1} < 1$. Неотрицательность остальных коэффициентов L_{nm} очевидна из (2.10). При неравенстве (2.11) удовлетворяется также и второе из условий (2.11).

Здесь соотношения взаимности (2.8), (2.9) и неравенства (2.11) установлены на основе коэффициентов переноса, вычисленных в первом приближении по полиномам Сонина. Можно показать, однако, что они остаются в силе и для точных выражений для коэффициентов переноса.

Выражение (2.6) для источника энтропии выведено при тех же предположениях, что и гидродинамические уравнения, т. е. при произвольных разностях температур компонентов смеси и ограничении (1.15) на u_{ij} . Однако соотношения взаимности Онсагера выполняются только при малых разностях температур и скоростей компонентов. Таким образом, для выполнения законов термодинамики необратимых процессов в рассмотренной системе требуется локальное равновесие не только внутри каждого компонента.

Авторы благодарят Ю. Н. Савченко за обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струминский В. В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 203—210.
2. Struminski V. V. On the kinetic theory of gas mixtures. — In: Rarefied Gas Dynamics. P.: CEA, 1979, v. 2, 735—742.

3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
4. Goldman E., Sirovich L. Equations for gas mixtures.— Phys. Fluids, 1967, v. 10. No. 9, p. 1928—1940.
5. Goebel C. J., Harris S. M., Johnson E. A. Two-temperature disparate-mass gas mixtures: A thirteen moment description.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, 627—635.
6. Курочкин В. И., Маркеев Б. М. К вопросу об уравнениях переноса для многокомпонентной газовой смеси.— Ж. техн. физ., 1979, т. 49, вып. 8, с. 1772—1774.
7. Рув Г. А., Рождественский Б. Л., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Законы сохранения систем уравнений двухфазных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 2, с. 288—293.
8. Шавалиев М. Ш. Уравнение баланса энтропии в двухскоростных и двухтемпературных газовых средах.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, т. 13, № 6, с. 145—152.
9. Великодный В. Ю., Маркеев Б. М. Об уравнениях переноса для неравновесных газовых смесей.— Ж. техн. физ., 1981, т. 51, № 1, с. 194—196.
10. Курочкин В. И. К кинетической теории плотных газовых смесей из твердых сфер.— В кн.: Аэродинамика в технологических процессах. М.: Наука, 1981, с. 174—184.
11. Савченко Ю. Н. Применение кинетической теории для описания дисперсных сред.— В кн.: Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982, с. 169—175.
12. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме.— Вопросы теории плазмы: Сб. статей. М.: Госатомиздат, 1963, вып. 1, с. 183—272.
13. Шавалиев М. Ш. Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1, с. 126—137.
14. Де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964, 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1985