Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.38

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ГИРОСТАТА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГЛАВНОЙ ОСИ НА АБСОЛЮТНО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Беликов С. А.

Рассматривается движение гиростата на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Получена функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения. Последние допускают частные решения — равномерные вращения гиростата вокруг вертикальной главной оси, совпадающей с осью равномерных вращений ротора. Осуществлен переход к приведенной системе с двумя степенями свободы и получено разложение гамильтониана в окрестности соответствующего положения равновесия с точностью до членов четвертого порядка. В области допустимых значений параметров рассмотрены область необходимых условий устойчивости и области знакоопределенности и знакопеременности функции Гамильтона. В случаях, когда гамильтониан не является знакоопределенным, произведена его нормализация, причем рассмотрены как нерезонансная ситуация, так и резонансы первого, второго, четвертого порядков. Получены достаточные условия устойчивости равномерных вращений гиростата в терминах ограничений на коэффициенты нормальных форм. Для наглядной интерпретации результатов рассмотрены частные случаи, когда фиксированы значения всех параметров, кроме двух. Построены плоская область необходимых условий устойчивости и резонансные кривые, с использованием ЭВМ исследована устойчивость на них.

Устойчивость равномерных вращений тяжелого твердого тела вокруг вертикальных главной и неглавных осей на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, а также на плоскости с вязким трением исследована в работах [1—4]. Устойчивость равномерных вращений гиростата вокруг вертикальной главной оси на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости исследована в [5, 6]. Исследование движения твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости, возмущенного по отношению к вращениям вокруг главной оси (в частности, к устойчивому положению равновесия), проведено в [7, 8]. Устойчивость двух типов движения однородного эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, в частности устойчивость равномерных вращений эллипсоида вокруг вертикальной главной оси, исследована в работе [9].

1. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела под действием силы тяжести на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. Пусть тело (корпус) имеет полость и с корпусом жестко связана ось вращения симметричного гироскопа, который без трения вращается в полости с постоянной относительно корпуса произвольной угловой скоростью ω_2°. Предполагаем, что поверхность, ограничивающая тело, является выпуклой, так что она соприкасается с горизонтальной плоскостью только одной своей точкой, в которой поверхность имеет определенную касательную плоскость. Введем неподвижную прямоугольную систему координат $OXYZ$ с началом в точке O опорной плоскости $Z = 0$ и жестко связанную с корпусом систему координат $S\xi'\eta'\zeta'$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции гиростата (системы корпус — гироскоп). Предполагаем, что ось вращения гироскопа совпадает с осью $S\eta'$. Положение корпуса будем задавать координатами X_s, Y_s точки S и углами Эйлера θ, φ, ψ, ориентирующими систему координат $S\xi'\eta'\zeta'$ по отношению к $OXYZ$. Функция Гамильтона, задающая канонические уравнения движения ги-

ростата, имеет вид

$$H = \frac{1}{2\Delta}(\Phi(p_\theta-\alpha)^2 - 2\Psi(p_\theta-\alpha)(p_\varphi-\beta) + \Theta(p_\varphi-\beta)^2) - \tag{1.1}$$
$$-\gamma + \frac{1}{2M}(p^2+q^2)$$
$$\Delta = \Theta\Phi - \Psi^2, \quad \Theta = I_{22} - I_{23}^2 I_{33}^{-1} + M\varkappa^2$$
$$\Phi = (I_{11} - I_{13}^2 I_{33}^{-1} + M\chi_2^2)\sin^2\theta$$
$$\Psi = (I_{12} - I_{13}I_{22}I_{33}^{-1} + M\varkappa\chi_2)\sin\theta$$
$$\alpha = \Lambda I_{23}I_{33}^{-1} - D\omega_2^\circ\sin\varphi, \qquad \beta = \Lambda(I_{33}\cos\theta + I_{13}\sin\theta)I_{33}^{-1}$$
$$\gamma = -\frac{1}{2}\Lambda^2 I_{33}^{-1} + Mg(\chi_1\sin\theta + \zeta'\cos\theta)\,\Lambda =$$
$$= p_\psi - D\omega_2^\circ\sin\theta\cos\varphi, \quad \varkappa = \chi_1\cos\theta - \zeta'\sin\theta\,\chi_1 =$$
$$= \xi'\sin\varphi + \eta'\cos\varphi, \quad \chi_2 = \xi'\cos\varphi - \eta'\sin\varphi$$
$$I_{11} = (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\cos^2\theta + C\sin^2\theta, \quad I_{22} =$$
$$= A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi, \quad I_{33} = (A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta +$$
$$+ C\cos^2\theta, \quad I_{12} = -(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, \quad I_{13} = -(A\sin^2\varphi +$$
$$+ B\cos^2\varphi - C)\sin\theta\cos\theta, \quad I_{23} = (A-B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta)$$

Здесь p, q, p_θ, p_φ, p_ψ — обобщенные импульсы, соответствующие координатам X_s, Y_s, θ, φ, ψ, M — масса гиростата, g — ускорение силы тяжести, ξ', η', ζ' — координаты точки касания тела с плоскостью в системе $S\xi'\eta'\zeta'$, являющиеся функциями θ и φ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую корпус поверхность, причем

$$(\xi^{\cdot\prime}\sin\varphi + \eta^{\cdot\prime}\cos\varphi)\sin\theta + \zeta^{\cdot\prime}\cos\theta \equiv 0$$

где точка означает дифференцирование по θ или φ; I_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — компоненты тензора инерции гиростата по отношению к правой ортогональной системе координат $SX'Y'Z'$, ось SZ' которой направлена вертикально вверх, SY' — по линии узлов в сторону, откуда поворот оси SZ' на угол θ до совмещения с осью $S\zeta'$ происходит против часовой стрелки; A, B, C — главные центральные моменты инерции гиростата, D — осевой момент инерции гироскопа.

2. Канонические уравнения движения гиростата с функцией Гамильтона (1.1) допускают частное решение

$$p = p_0, \ q = q_0, \ p_\theta = p_\varphi = 0 \tag{2.1}$$
$$p_\psi = B\omega_1^\circ + D\omega_2^\circ, \quad X_s = M^{-1}p_\theta t + X_s^\circ$$
$$Y_s = M^{-1}q_0 t + Y_s^\circ, \ \theta = \pi/2, \ \varphi = 0, \ \psi = \omega_1^\circ t + \psi_0$$

отвечающее равномерному вращению корпуса с произвольной угловой скоростью ω_1° вокруг оси $S\eta'$, занимающей вертикальное положение. Центр масс S гиростата движется при этом с постоянной скоростью вдоль горизонтальной прямой. Не ограничивая общности, можно считать его неподвижным. Координаты X_s, Y_s, ψ — циклические, поэтому приведенная система имеет две степени свободы.

Рассматриваем возмущения

$$p_\theta = x_1', \quad p_\varphi = x_2', \quad \theta = \pi/2 + y_1', \quad \varphi = y_2'$$

и находим разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности положения равновесия, соответствующего стационарному движению (2.1), с точностью до членов четвертого порядка относительно x_1', x_2', y_1', y_2'. Пусть h — расстояние от центра масс S до точки контакта гиростата и плоскости на невозмущенном движении (2.1), $\nu' = h + \eta'$.

Вводим новые безразмерные переменные x_1, x_2, y_1, y_2, время τ, безразмерные координаты ξ, ν, ζ, угловые скорости ω_1, ω_2 и параметры a, b, n по формулам

$$x_i' = (BMgh)^{1/2} x_i, \quad y_i' = y_i, \quad i = 1, 2; \quad \tau = \left(\frac{Mgh}{B}\right)^{1/2} t$$

$$\xi = \frac{\xi'}{h}, \quad \nu = \frac{\nu'}{h} = 1 + \frac{\eta'}{h} = 1 + \eta, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{h}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{B}{Mgh}\right)^{1/2} \omega_1^\circ, \quad \omega_2 = \frac{D}{(BMgh)^{1/2}} \omega_2^\circ$$

$$a = \frac{B}{A}, \quad b = \frac{B}{C}, \quad n = \frac{Mh^2}{A}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
(2.2)\qquad 2H = {} & ax_1^2 + 2\Omega x_1 y_2 + bx_2^2 + 2\omega_1 x_2 y_1 + \omega_1(\omega_1 + \omega_2) y_1^2 + \\
& + \Omega(\omega_1 + \omega_2) y_2^2 - anx_1^2 y_1^2 - (a-1) x_1^2 y_2^2 + \\
& + 2(a - 1 - bn) x_1 x_2 y_1 y_2 + (\Omega - \omega_2 - 2a(\omega_1 + \omega_2) n) x_1 y_1^2 y_2 - \\
& - \left(\frac{4}{3}(a-1)\omega_1 + \left(\frac{4}{3}a - 1\right)\omega_2\right) x_1 y_2^3 + x_2^2 y_1^2 - \frac{b^2}{a} n x_2^2 y_2^2 + \\
& + \left(\frac{5}{3}\omega_1 + \omega_2\right) x_2 y_1^3 + (2\Omega - \omega_2 - 2b(\omega_1 + \omega_2) n) x_2 y_1 y_2^2 + \\
& + \left(\frac{2}{3}\omega_1^2 + \frac{1}{4}\omega_2\left(\frac{11}{3}\omega_1 + \omega_2\right)\right) y_1^4 + h_{22} y_1^2 y_2^2 + h_{04} y_2^4 + \\
& + n\left(ax_1^2 + 2\Omega x_1 y_2 + \frac{1}{a}\Omega^2 y_2^2\right)(2\zeta y_1 - \zeta^2) + \\
& + 2n\left(bx_1 x_2 + \frac{b}{a}\Omega x_2 y_2 + \omega_1 x_1 y_1 + \frac{1}{a}\omega_1 \Omega y_1 y_2\right)(-\xi y_1 + \zeta y_2 + \xi\zeta) - \\
& - \frac{b}{a} n\left(bx_2^2 + 2\omega_1 x_2 y_1 + \frac{\omega_1^2}{b} y_1^2\right)(2\xi y_2 + \xi^2) + \\
& + \left(-2y_2 + y_1^2 y_2 + \frac{y_2^3}{3}\right)\xi - y_1^2 - y_2^2 + \frac{y_1^4}{12} + \frac{y_1^2 y_2^2}{2} + \\
& + \frac{y_2^4}{12} + (-2 + y_1^2 + y_2^2)\nu + \left(2y_1 - \frac{y_1^3}{3}\right)\zeta
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Omega = {} & (a-1)\omega_1 + a\omega_2, \quad h_{22} = \frac{1}{a}(a-1)\Omega(\omega_1 + \omega_2) + \\
& + \frac{b}{a}(2\Omega - a\omega_2)\omega_1 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{2}{b}\right)\omega_1^2 + \\
& + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 - \frac{1}{a}(\omega_1^2 + \Omega(\Omega - 2\omega_1)) n \\
h_{04} = {} & -\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{a}\right)\Omega\omega_1 - \frac{1}{3}\Omega\omega_2 + \\
& + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{11}{3} - \frac{4}{a}\right)\omega_1 + \omega_2\right)\omega_2 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{a}\right)\omega_1^2
\end{aligned}$$

Исследуем устойчивость равномерных вращений (2.1) гиростата относительно p_θ, p_φ, θ, φ, p_ψ при параметрических возмущениях [10] конструктивных параметров гиростата.

3. В дальнейшем будем считать, что в малой окрестности точки контакта гиростата и плоскости на стационарном движении (2.1) поверхность корпуса, задаваемая уравнением

$$(3.1)\qquad f(\xi', \eta', \zeta') = 0 \quad (f(0, -h, 0) = 0)$$

близка к эллипсоиду, одна из осей которого лежит на оси $S\eta'$, так что

$$\begin{aligned}
(3.2)\qquad f(\xi', \eta', \zeta') = {} & -\eta' - h + \frac{1}{2}(P\xi'^2 - 2Q\xi'\zeta' + R\zeta'^2) + \\
& + \frac{1}{8h}(P\xi'^2 - 2Q\xi'\zeta' + R\zeta'^2)^2
\end{aligned}$$

$$P=\frac{\cos^2\varepsilon}{r_1}+\frac{\sin^2\varepsilon}{r_2},\quad Q=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$R=\frac{\sin^2\varepsilon}{r_1}+\frac{\cos^2\varepsilon}{r_2}$$

Здесь r_1, r_2 — главные радиусы кривизны поверхности (3.1) в точке $(0, -h, 0)$, ε — угол между осью $S\zeta'$ и направлением главной кривизны, соответствующей r_2, который отсчитывается от оси $S\zeta'$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси $S\eta'$, направленной вертикально вверх на невозмущенном движении (2.1).

Введем безразмерные величины

$$l=\frac{r_1r_2Q}{h},\quad l_1=\frac{r_1r_2P}{h},\quad l_2=\frac{r_1r_2R}{h}$$

Тогда с учетом (3.2) получим следующие выражения безразмерных координат ξ, η, ζ через безразмерные возмущения y_1, y_2 с точностью до членов четвертого порядка относительно возмущений:

$$(3.3)\qquad \begin{aligned}\xi&=ly_1-l_2y_2+\frac{1}{2}\Big\{-l\left(l_1-\frac{2}{3}\right)y_1^3+\\&+(l_1l_2+2l^2)y_1^2y_2-l(3l_2-1)y_1y_2^2+l_2\left(l_2-\frac{2}{3}\right)y_2^3\Big\}\\ \eta&=-1+\frac{1}{2}(l_1y_1^2-2ly_1y_2+l_2y_2^2)+\frac{1}{8}\Big\{-l_1\left(3l_1-\frac{8}{3}\right)y_1^4+\\&+l\left(12l_1-\frac{8}{3}\right)y_1^3y_2-(6(l_1l_2+2l^2)-4l_1)y_1^2y_2^2+\\&+l\left(12l_2-\frac{20}{3}\right)y_1y_2^3-l_2\left(3l_2-\frac{8}{3}\right)y_2^4\Big\}\\ \zeta&=l_1y_1-ly_2+\frac{1}{2}\Big\{-l_1\left(l_1-\frac{2}{3}\right)y_1^3+3ll_1y_1^2y_2-\\&-(l_1l_2+2l^2-l_1)y_1y_2^2+l\left(l_2-\frac{2}{3}\right)y_2^3\Big\}\end{aligned}$$

Подставим формулы (3.3) в (2.2). Получаем окончательное разложение функции Гамильтона приведенной системы с точностью до членов четвертого порядка

$$(3.4)\qquad \begin{aligned}H&=H_2+H_4+\ldots\\ H_k&=\sum_{|\nu|=k}h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}y_1^{\nu_3}y_2^{\nu_4}\end{aligned}$$

где ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — целые неотрицательные числа, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4$, $k=2, 4$. Отличные от нуля коэффициенты $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ имеют вид

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}&2h_{2000}=a,\ h_{1001}=\Omega,\ 2h_{0200}=b,\ h_{0110}=\omega,\\ &2h_{0020}=\omega_1(\omega_1+\omega_2)-(1-l_1),\quad 2h_{0002}=\Omega(\omega_1+\omega_2)-\\&-(1-l_2)\\ &h_{0011}=-l,\ 2h_{2020}=an(l_1(2-l_1)-1)\\ &h_{2011}=-anl(1-l_1),\ 2h_{2002}=-(a-1)-anl^2\\ &h_{1120}=-bnl(1-l_1),\ h_{1111}=a-1-bn(1+l^2+l_1l_2-\\&-l_1-l_2),\ h_{1102}=-bnl(1-l_2),\ h_{1030}=-\omega_1nl(1-l_1)\\ &2h_{1021}=\Omega-\omega_2-2(a(\omega_1+\omega_2)-\Omega l_1(2-l_1)+\\&+\omega_1(l^2+l_1l_2-l_1-l_2))n,\quad h_{1012}=-(2\Omega l(1-l_1)+\\&+\omega_1l(1-l_2))n,\quad 2h_{1003}=-\left(\frac{4}{3}\Omega-\omega_2+2\Omega l^2n\right)\\ &2h_{0220}=1-\frac{b^2}{a}nl^2,\quad h_{0211}=-\frac{b^2}{a}nl(1-l_2)\end{aligned}$$

$$2h_{0202} = -\frac{b^2}{a} n (1 - l_2 (2 - l_2)), \quad 2h_{0130} = \frac{5}{3}\omega_1 + \omega_2 -$$
$$-2\frac{b}{a}\omega_1 n l^2, \quad h_{0121} = -\frac{b}{a} nl (\Omega (1 - l_1) + 2\omega_1 (1 - l_2))$$
$$2h_{0112} = 2\Omega - \omega_2 - 2b (\omega_1 + \omega_2) n - 2\frac{b}{a} (\Omega (l^2 + l_1 l_2 - l_1 - l_2) -$$
$$- \omega_1 l_2 (2 - l_2)) n, \quad h_{0103} = -\frac{b}{a} \Omega n l (1 - l_2)$$
$$2h_{0040} = \frac{2}{3}\omega_1^2 + \frac{1}{4}\omega_2 \left(\frac{11}{3}\omega_1 + \omega_2\right) - \frac{1}{a}\omega_1^2 n l^2 - \frac{l_1^2}{4} +$$
$$+ \frac{l_1}{6} + \frac{1}{12}, \quad 2h_{0031} = -\frac{2}{a}\omega_1 nl (\Omega (1 - l_1) + \omega_1 (1 - l_2)) +$$
$$+ l\left(l_1 + \frac{1}{3}\right), \quad 2h_{0022} = h_{22} + \frac{1}{a} \Omega (\Omega l_1 (2 - l_1) -$$
$$- 2\omega_1 (l^2 + l_1 l_2 - l_1 - l_2)) n + \frac{1}{a}\omega_1^2 n l_2 (2 - l_2) -$$
$$- \frac{1}{2} (2l^2 + l_1 l_2) + \frac{1}{2} (l_1 - l_2 + 1), \quad 2h_{0013} =$$
$$= -\frac{2}{a} \Omega l (\Omega (1 - l_1) + \omega_1 (1 - l_2)) n + l \left(l_2 - \frac{2}{3}\right)$$
$$2h_{0004} = h_{04} - \frac{1}{a} \Omega^2 l^2 n - \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{l_2}{6} + \frac{1}{12}$$

Замечания. 3.1. Коэффициенты формы H_2 зависят от семи конструктивных параметров $\mathbf{c} = (\omega_1, \omega_2, a, b, l, l_1, l_2)$, а коэффициенты формы H_4 зависят, кроме того, от параметра n.

3.2. В работе [9] получено разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности положения равновесия, соответствующего равномерному вращению однородного эллипсоида вокруг вертикали, с точностью до членов четвертого порядка. Коэффициенты этого разложения, зависящие от трех безразмерных параметров k, δ_1, δ_2, легко получить из формул (3.5). Действительно, если на гиростат наложить ограничения, рассмотренные в [9], то параметры $\mathbf{c}$ и n следующим образом будут связаны с параметрами k, δ_1, δ_2:

$$\omega_1^2 = \omega^2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{5k}, \quad \omega_2 = 0, \quad a = \frac{\delta_1 + \delta_2}{1 + \delta_2}$$
$$b = \frac{\delta_1 + \delta_2}{1 + \delta_1}, \quad l = 0, \quad l_1 = \delta_2, \quad l_2 = \delta_1, \quad n = \frac{5}{1 + \delta_2}$$

Подставим приведенные выражения в (3.5). Учтем, что безразмерные переменные и время в названной работе вводились по формулам, отличным от формул п. 2 — это соответствует умножению коэффициентов $h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, содержащих ω^m, $m = 1, 2$ на величину $(5k/(\delta_1 + \delta_2))^{m/2}$. Тогда получим требуемое.

4. Рассмотрим область допустимых значений параметров

$$F = \{\mathbf{c} : a < b\ (a + 1),\ b < a\ (b + 1),\ a > b\ (a - 1),\ l_1 > 0,\ l_2 > 0\}$$

и область необходимых условий устойчивости решений (2.1)

$$G = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} \in F,\ Q_1 > 0,\ Q_2 > 0,\ Q_1^2 - 4Q_2 > 0\}$$

В области G рассмотрим область G_1 положительной определенности и область G_2 знакопеременности квадратичной формы H_2 гамильтониана

$$G_1 = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} \in G,\ \lambda > 0\},\quad G_2 = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} \in G,\ \lambda < 0\} \tag{4.1}$$

Здесь

$$\lambda = ((b - 1)\ \omega_1 + b\omega_2)\ \omega_1 - b\ (1 - l_1) \tag{4.2}$$
$$Q_1 = \omega_1^2 + \Omega\ ((b - 1)\ \omega_1 + b\omega_2) - a\ (1 - l_1) - b\ (1 - l_2)$$
$$Q_2 = (\Omega\omega_1 - a\ (1 - l_2))\ \lambda - abl^2$$

Частоты системы с гамильтонианом H_2 имеют вид

(4.3) $$\alpha_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1\pm\sqrt{Q_1^2-4Q_2})^{1/2}$$

В дальнейшем потребуется рассмотрение гиперповерхностей резонансов первого, второго и четвертого порядков

(4.4) $$R_1=\{\mathbf{c}:\mathbf{c}\in F,\ \alpha_2(\mathbf{c})=0\}$$
$$R_{N+1}=\{\mathbf{c}:\mathbf{c}\in F,\ \alpha_1(\mathbf{c})=N\alpha_2(\mathbf{c})\},\ N=1,3$$

Ниже будет показано, что все рассмотренные области и гиперповерхности непусты, причем R_1 и R_2 определяют в F границу области G и $G_2\cap R_4\neq\varnothing$.

Пусть $\mathbf{c}\in G_1$. Согласно теореме Рауса с дополнением Ляпунова (см., например, [11]), равномерные вращения (2.1) устойчивы. Для исследования устойчивости в случаях $\mathbf{c}\in\partial G_1$, $\mathbf{c}\in G_2\setminus R_4$, $\mathbf{c}\in G_2\cap R_4$, $\mathbf{c}\in\partial G_2$. нужно нормализовать функцию Гамильтона.

Замечания. 4.1. При исследовании устойчивости равномерных вращений тяжелого твердого тела и гиростата с закрепленной точкой вокруг вертикальной главной оси было установлено [12—14], что в этой задаче функция Q_2 представима в виде произведения двух коэффициентов устойчивости Пуанкаре. Следовательно, гиперповерхность, разделяющая области знакоопределенности и знакопеременности гамильтониана, является одновременно частью границы области G. В рассматриваемой задаче последнее верно только при $l=0$.

4.2. Исследуемая задача отличается от рассмотренных в [12—14] большим числом конструктивных параметров, поэтому детальный анализ области G можно осуществить только в частных случаях.

4.3. Величины Q_1 и Q_2 с точностью до положительного множителя и обозначений совпадают с соответствующими величинами из [6].

5. Приведем функцию Гамильтона к нормальной форме. Введем следующие обозначения:

(5.1) $$f_1(\alpha_1)=\alpha_1^2-\Omega((b-1)\omega_1+b\omega_2)+b(1-l_2)$$
$$f_2(\alpha_1)=-\Omega\alpha_1^2+\omega_1^2\Omega-a\omega_1(1-l_2)$$
$$f_3(\alpha_1)=a\alpha_1^2-b(\omega_1\Omega-a(1-l_2))$$

Для проведения линейной нормализации сделаем замену

(5.2) $$\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}s_1&c_1&t_1&d_1\\s_2&c_2&t_2&d_2\\s_3&c_3&t_3&d_3\\s_4&c_4&t_4&d_4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}p_1\\p_2\\q_1\\q_2\end{Vmatrix}$$

Пусть $\mathbf{c}\in G_2$. Тогда

(5.3) $$s_1=\alpha_1f_1(\alpha_1)g(\alpha_1),\ s_2=-\alpha_1alg(\alpha_1)$$
$$s_3=0,\ s_4=\alpha_1(b\,\Omega-a\omega_1)g(\alpha_1),\ t_1=bl\Omega g(\alpha_1)$$
$$t_2=f_2(\alpha_1)g(\alpha_1),\ t_3=f_3(\alpha_1)g(\alpha_1)$$
$$t_4=-ablg(\alpha_1),\quad \alpha_1g^2(\alpha_1)=\delta[f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_1)+$$
$$+a^2bl^2-f_2(\alpha_1)\ (b\Omega-a\omega_1)]^{-1}$$

где δ — валентность канонического преобразования (5.2). Можем взять $\delta=1$ или $\delta=-1$ из условия вещественности преобразования. Формулы для c_i, d_i ($i=1,2,3,4$) находятся, соответственно, из выражений для s_i, t_i заменой α_1 на $-\alpha_2$. Подстановка формул (4.2), (4.3), (5.1) в (5.3) дает окончательное выражение коэффициентов линейного канонического преобразования (5.2) через исходные параметры задачи.

В переменных p_1, p_2, q_1, q_2 члены четвертого порядка в разложении (3.4) запишем в виде

(5.4) $$\delta K_4 = \sum_{|\nu|=4} \delta g_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4}$$

Найдем коэффициенты $g_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, нужные для исследования устойчивости

(5.5) $$\delta g_{4000} = \sum_{|\nu|=4} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3} s_4^{\nu_4}$$

Коэффициент g_{0400} получается из g_{4000} заменой величин s_i на c_i, g_{0040} — заменой s_i на t_i, g_{0004} — заменой s_i на d_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

(5.6) $$\delta g_{2200} = \sum_{|\nu|=4} (s_{\mu_1}s_{\mu_2}c_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}c_{\mu_2}s_{\mu_3}s_{\mu_4} + s_{\mu_1}c_{\mu_2}s_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}s_{\mu_2}c_{\mu_3}s_{\mu_4} + s_{\mu_1}c_{\mu_2}c_{\mu_3}s_{\mu_4} + c_{\mu_1}s_{\mu_2}s_{\mu_3}c_{\mu_4})\, h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$$

Здесь и ниже величины μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 вычисляются по величинам ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 при помощи строк таблицы. Для получения остальных коэффициентов с ненулевыми индексами 2 и 2 нужно в правой части формулы

ν_l	ν_k	ν_j	ν_i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
4	0	0	0	l	l	l	l
3	1	0	0	l	l	l	k
2	2	0	0	l	l	k	k
2	1	1	0	l	l	k	j
1	1	1	1	l	k	j	i

(5.6) осуществить следующие подстановки:

$g_{2020} : c_i \to t_i$; g_{2002}: $c_i \to d_i$; $g_{0220} : s_i \to t_i$; g_{0202}: $s_i \to d_i$; g_{0022}: $s_i \to t_i$; $c_i \to d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

(5.7) $$\delta g_{1300} = \sum_{|\nu|=4} (s_{\mu_1}c_{\mu_2}c_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}s_{\mu_2}c_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}c_{\mu_2}s_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}c_{\mu_2}c_{\mu_3}s_{\mu_4})\, h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$$

По (5.7) $g_{1003} : c_i \to d_i$; g_{0310}: $s_i \to t_i$;

$g_{0013} : s_i \to t_i$, $c_i \to d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

(5.8) $$\delta g_{1201} = \sum_{|\nu|=4} s_{\mu_1}d_{\mu_2}c_{\mu_3}c_{\mu_4} + d_{\mu_1}s_{\mu_2}c_{\mu_3}c_{\mu_4} + s_{\mu_1}c_{\mu_2}d_{\mu_3}c_{\mu_4} + d_{\mu_1}c_{\mu_2}s_{\mu_3}c_{\mu_4} + s_{\mu_1}c_{\mu_2}c_{\mu_3}d_{\mu_4} + d_{\mu_1}c_{\mu_2}c_{\mu_3}s_{\mu_4} + c_{\mu_1}s_{\mu_2}d_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}d_{\mu_2}s_{\mu_3}c_{\mu_4} + c_{\mu_1}s_{\mu_2}c_{\mu_3}d_{\mu_4} + c_{\mu_1}d_{\mu_2}c_{\mu_3}s_{\mu_4} + c_{\mu_1}c_{\mu_2}s_{\mu_3}d_{\mu_4} + c_{\mu_1}c_{\mu_2}d_{\mu_3}s_{\mu_4})\, h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$$

По (5.8) $g_{1102} : c_i \to d_i$, $d_i \to c_i$; $g_{0211} : s_i \to t_i$

$g_{0112} : s_i \to c_i$, $c_i \to d_i$, $d_i \to t_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

Пусть $c \in G_2 \setminus R_4$. Тогда коэффициенты нормальной формы (3.4) имеют вид [15, 16]

(5.9) $$2c_{20} = 3g_{4000} + 3g_{0040} + g_{2020},\quad 2C_{02} = 3g_{0400} + 3g_{0004} + g_{0202},\quad c_{11} = g_{2200} + g_{2002} + g_{0220} + g_{0022}$$

Подстановка формул (3.5), (4.2), (4.3), (5.1), (5.3), (5.5), (5.6) в (5.9) дает окончательный вид коэффициентов. Если $D^\circ \equiv c_{20}\alpha_2^2 + c_{11}\alpha_1\alpha_2 + c_{02}\alpha_1^2 \neq 0$, то согласно теореме Арнольда — Мозера [15, 16] и распространению ее на стационарные движения [12] равномерные вращения (2.1) устойчивы.

Пусть $c \in G_2 \cap R_4$. Коэффициент при резонансном члене [17] записывается в форме

$$C_4 = (x_{1003}^2 + y_{1003}^2)^{1/2},\ 2x_{1003} = g_{1300} + g_{0013} - g_{0211} - g_{1102},\ 2y_{1003} = -g_{0310} + g_{1003} - g_{1201} + g_{0112} \tag{5.10}$$

Подстановка формул (3.5), (4.2), (4.3), (5.1), (5.3), (5.5) — (5.9) в (5.10) дает окончательный вид коэффициента C_4. Если $|D^\circ|/\alpha_2^2 - 3\sqrt{3}C_4 > 0$, то согласно теореме А. П. Маркеева [17] и распространению ее на стационарные движения [12] равномерные вращения (2.1) устойчивы. При $D^\circ|/\alpha_2^2 - 3\sqrt{3}C_4 < 0$ невозмущенные движения (3.1) неустойчивы [17].

Пусть $c \in \partial G \cap R_1$. Это означает, что $c \in \partial G_1$, или c принадлежит той части границы области G_2, которая определяется резонансным соотношением первого порядка. Нужные для исследования устойчивости коэффициенты преобразования (5.2) имеют вид

$$c_1 = bl\Omega g_1,\ c_2 = f_2(0)g_1,\ c_3 = f_3(0)g_1,\ c_4 = -ablg_1,\ g_1^2 = \delta[f_1(0)f_3(0) + a^2bl^2 - f_2(0)(b\Omega - a\omega_1)]^{-1} \tag{5.11}$$

В новых канонических переменных члены четвертого порядка в разложении (3.4) также запишем в виде (5.4), где нужный для исследования коэффициент g_{0400} дается формулой (5.5). Подстановка формул (3.5), (5.1) при $\alpha_1 = 0$ и (5.11) в (5.5) дает окончательный вид коэффициента g_{0400}. Если $g_{0400} > 0$, то равномерные вращения (2.1) устойчивы при фиксированных значениях параметров [18, 19]. Если $g_{0400} < 0$, решения (2.1) неустойчивы [18, 19].

Пусть $c \in \partial G_2 \cap R_2$. Нужные для исследования коэффициенты s_i, c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) преобразования (5.2) даются формулами (5.3), в которых величины t_i нужно заменить на c_i, а величину $g(\alpha_1)$ — на g_2. Довольно громоздкие выкладки показывают, что величина g_2 выбирается из условия

$$2\alpha_1^2 g_2^2 = \delta[f_3(\alpha_1)]^{-1} \tag{5.12}$$

Подстановка формул (4.2), $\alpha_1 = (Q_1/2)^{1/2}$, (5.1), (5.12) в (5.3) дает окончательные выражения для коэффициентов s_i, c_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

В новых канонических переменных члены четвертого порядка из (3.4) запишем в виде (5.4), где нужные для исследования устойчивости коэффициенты g_{4000}, g_{0400}, g_{2200} даются формулами (5.5), (5.6). Обозначим

$$E = 3g_{4000} + 3g_{0400} + g_{2200} \tag{5.13}$$

Подстановка формул (3.5), (4.2), $\alpha_1 = (Q_1/2)^{1/2}$, (5.1), (5.12), (5.3), (5.5), (5.6) в (5.13) приводит к окончательному виду коэффициент E. Если $E > 0$, равномерные вращения (2.1) устойчивы [20, 21], при $E < 0$ стационарные движения (2.1) неустойчивы [17].

Замечания. 5.1. В случаях $c \in \partial G$ определяющая матрица системы с гамильтонианом H_2 имеет непростые элементарные делители.

5.2. В задачах, исследованных в [12—14], число параметров, от которых зависят коэффициенты форм H_k, совпадает для H_2 и H_4. В исследуемой задаче коэффициенты H_4 зависят от дополнительного параметра n. Это означает, что равномерные вращения гиростата на плоскости обладают следующей особенностью. Если $c \in G_1$, то на устойчивость вращений гиростатов, параметры которых представляет точка c, не может повлиять изменение параметра n. Если $c \in G_2$, то изменение n может вызвать, вообще говоря, обращение в нуль величины D°, тогда для исследования устойчивости вращения соответствующего гиростата нужно привлекать в разложении H члены выше четвертого порядка. Если c принадлежит резонансной гиперповерхности, то изменение n может вызвать, вообще говоря, смену устойчивости соответствующего вращения на неустойчивость или наоборот.

Проведено исследование устойчивости равномерных вращений (2.1) гиростата на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости в случае, когда в малой окрестности точки контакта поверхность корпуса задается уравнениями (3.1), (3.2). Отметим, что, пользуясь разложением (2.2) функции Гамильтона, можно исследовать устойчивость гиростата с поверхностью, отличной от (3.1), (3.2). При этом изменяются коэффициенты гамильтониана в формулах (3.4), (3.5), но формулы (5.5)—(5.10), (5.13) остаются в силе.

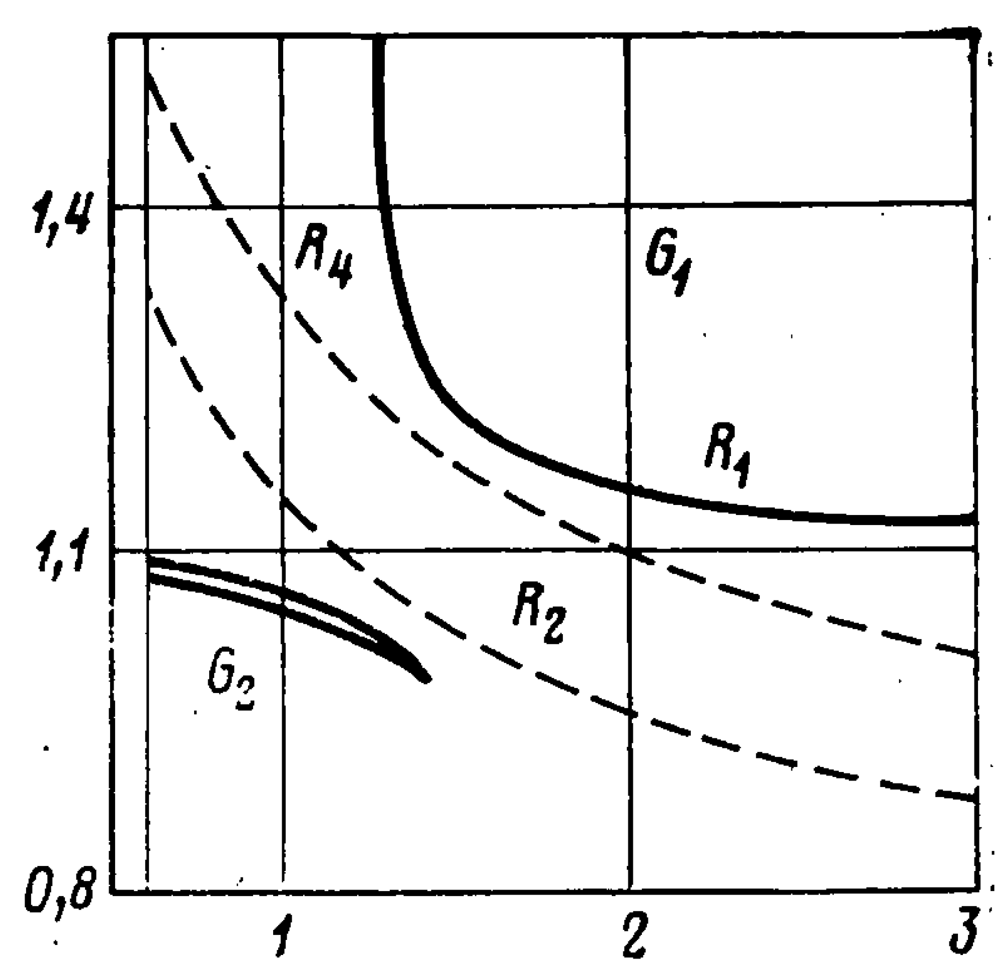
6. Достаточные условия устойчивости равномерных вращений (2.1) гиростата получены в терминах ограничений типа неравенств на коэффициенты нормальных форм гамильтониана. Эти условия имеют громоздкий вид, поэтому для проверки выполнения соответствующих неравенств привлечена ЭВМ. В силу большого числа параметров для наглядной интерпретации полученных результатов необходимо рассматривать частные случаи. Кратко перечислим итоги рассмотрения двух частных случаев.

Положим $a = {}^3/_2$, тогда область F имеет вид

$$F = \{\mathbf{c}\colon\ b \in ({}^3/_5, 3),\ l_1 > 0,\ l_2 > 0\}$$

Выберем $\varepsilon = \pi/4$, $r_1/h_1 = {}^1/_2$, $r_2/h = {}^7/_{10}$, тогда $l = {}^1/_{10}$, $l_1 = l_2 = {}^3/_5$ и положим $n = 1$.

6.1. Пусть $\omega_2 = 0$. Это означает, что гироскоп не вращается относительно корпуса, т. е. гиростат представляет собой абсолютно твердое тело. На фигуре изображены области G_1 и G_2. Область G_1 ограничена снизу ветвью кривой R_1 ($Q_2 = 0$), имеющей вертикальную асимптоту $b = 1$ и пересекающей прямую $b = 3$ при $\omega_1 = 1{,}126$. Равномерные вращения твердого тела, соответствующие R_1, устойчивы. Размеры области G_2 малы по сравнению с размерами G_1, и вся она помещается в прямоугольнике $b \in (0{,}6;\ 1{,}389)$, $\omega_1 \in (0{,}985;\ 1{,}084)$. Область G_2 ограничена сверху ветвью кривой R_1 и снизу ветвью кривой R_2 ($Q_1^2 - 4Q_2 = 0$). Равномерные вращения (2.1), соответствующие R_1, неустойчивы, а решения (2.1), соответствующие R_2, устойчивы. Кривые R_4 и $\{D^\circ = 0\}$ не пересекают область G_2 и на фигуре не изображены. Отметим,



что границы областей G_1 и G_2 не имеют общей точки, поскольку $l = {}^1/_{10} \neq 0$ (для задач из [12—14] таковой является точка, где оба коэффициента устойчивости Пуанкаре обращаются в нуль).

6.2. Пусть $\omega_1 = 0$. Это означает, что корпус находится в равновесии, а гироскоп продолжает вращаться. Область G_1 в этом случае пуста. Область G_2 ограничена снизу ветвью кривой R_2 (на фигуре изображена штриховой линией), которая пересекает прямую $b = {}^3/_5$ при $\omega_2 = 1{,}323$, а прямую $b = 3$ при $\omega_2 = 0{,}880$. Несколько выше кривой R_2 расположена кривая R_4 (на фигуре изображена штриховой линией). Равномерные вращения (2.1), соответствующие обеим кривым, устойчивы. Кривая $\{D^\circ = 0\}$ не пересекает область G_2.

Области устойчивости G_1, G_2 построены для случая $\omega_1, \omega_2 > 0$. При $\omega_1, \omega_2 < 0$ соответствующие области симметричны построенным относительно оси Ob.

Из проведенного анализа частных случаев можно заключить, что режим вращений, рассмотренный в п. 6.2, предпочтительнее с точки зрения устойчивости режима вращений из п. 6.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 418—426.
2. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42—51.
3. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 504—511.
4. *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 808—814.

5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778—784.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
7. *Маркеев А. П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 4, с. 575—582.
8. *Паскаль М.* Асимптотическое решение уравнений движения кельтского камня.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 321—329.
9. *Маркеев А. П., Мощук Н. К.* Об устойчивости движения эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1984, вып. 16, с. 56—64.
10. *Кузьмин П. А.* Устойчивость при параметрических возмущениях.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 1, с. 129—135.
11. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 922—933.
12. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.
13. *Беликов С. А.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 3—10.
14. *Ковалев А. М.* Устойчивость равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 994—998.
15. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае.— Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 255—257.
16. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
17. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
18. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 24—33.
19. *Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы при наличии двойного нулевого корня.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1978, вып. 10, с. 54—60.
20. *Ковалев А. М., Чудненко А. Н.* К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 11, с. 1011—1014.
21. *Сокольский А. Г.* Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс.— Письма в АЖ, 1978, т. 4, № 3, с. 148—152.

Ленинград

Поступила в редакцию 19.IV.1984