Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.3 : 534.1

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ АВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Зевин А. А.

Найдены условия, при которых однопараметрические семейства периодических решений (их существование в достаточно малой окрестности начала координат следует из теоремы Ляпунова [1]) могут быть продолжены по параметру до границы заданной области, в частности до некоторой изоэнергетической поверхности. Эти условия, проверяемые при помощи гессиана функции Гамильтона, обеспечивают также орбитальную устойчивость решений в первом приближении. Получены двусторонние оценки периодов колебаний и установлено, что любое решение с периодом, удовлетворяющим такой оценке, принадлежит соответствующему семейству. В качестве примера рассмотрены нелинейные колебания струны с сосредоточенными массами.

Известные нелокальные результаты, относящиеся к периодическим колебаниям автономных гамильтоновых систем, представляют собой, как правило, теоремы существования периодических решений (см. обзоры [2—4]). В одной группе работ устанавливается существование периодических решений с заданным значением гамильтониана, в другой — с заданным периодом; в первом случае используются предположения о форме соответствующей изоэнергетической поверхности, во втором — о поведении гамильтониана в окрестности положения равновесия и на бесконечности. Большинство результатов получено вариационными методами, при этом искомые периодические решения отождествляются со стационарными точками некоторых функционалов. Результаты данной работы основаны на других идеях.

1. Рассмотрим систему

$$x_i^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial x_{i+n}}, \quad x_{i+n}^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ и $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ — обобщенные координаты и импульсы, $H(x_1, \ldots, x_{2n})$ — функция Гамильтона, дважды дифференцируемая по всем x_i.

Пусть $\mathbf{x}^\circ(t) = (x_1^\circ(t), \ldots, x_{2n}^\circ(t))'$ — периодическое решение системы (1.1) с периодом T_0 (штрих означает транспонирование). Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$J\mathbf{y}^{\cdot} = A_0(t)\,\mathbf{y} \tag{1.2}$$

$$A_0(t) = \| a_{ik}^\circ(t) \|_1^{2n}, \quad a_{ik}^\circ = \left.\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^\circ(t)}$$

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{2n})'$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Напомним некоторые известные факты. Система (1.1) допускает интеграл

$$H(x_1(t), \ldots, x_{2n}(t)) = \text{const}, \tag{1.3}$$

Пусть $Y(t)$ — матрицант, ρ_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ — мультипликаторы уравнения (1.2), т. е. собственные значения матрицы монодромии $Y(T_0)$. Вследствие автономности системы (1.1) уравнение (1.2) имеет периодическое решение $\mathbf{y}^\circ(t) = \mathbf{x}^{\circ\cdot}(t)$, которому отвечает мультипликатор $\rho = 1$.

Ввиду каноничности (1.2) кратность этого мультипликатора $k \geqslant 2$ (этот вывод, впрочем, справедлив и для автономной системы общего вида, имеющей первый интеграл). Случай $k = 2$ является «типичным», в то время как случай $k > 2$ реализуется только при некоторых значениях H.

Вектор-функция $\mathbf{z}^\circ(t) = (\partial H/\partial x_1, \ldots, \partial H/\partial x_{2n})'|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)}$ является [1] периодическим решением сопряженного уравнения

$$\mathbf{z}^{\boldsymbol\cdot} = -(J^{-1}A_0(t))'\,\mathbf{z} \tag{1.4}$$

Дифференцирование (1.3) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ(t)$ дает тождество

$$(\mathbf{z}^\circ(t),\ \mathbf{y}^\circ(t)) \equiv 0 \tag{1.5}$$

Как правило, замкнутые траектории автономных гамильтоновых систем не являются изолированными, а образуют однопараметрические семейства. Следующая вспомогательная теорема дает достаточные условия принадлежности решения $\mathbf{x}^\circ(t)$ к такому семейству.

Теорема 1. Если мультипликатору $\rho = 1$ отвечает один жорданов ящик либо его кратность $k = 2$, то при достаточно малых $|s|$ система (1.1) имеет единственное однопараметрическое семейство решений $\mathbf{x}(t, s)$, такое, что $\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{x}^\circ(t)$.

Доказательство. Пусть $x_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $x_i(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, 2n)$. Если при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$, T имеют место равенства

$$x_i(T, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, 2n \tag{1.6}$$

то соответствующее решение $x_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ — периодическое с периодом T.

Ввиду автономности системы (1.1) одну из величин α_i можно считать известной. Примем для определенности $\alpha_{2n} = C$, выбрав значение C таким, что

$$y_{2n}^\circ(0) \neq 0, \quad z_{2n}^\circ(0) \neq 0 \tag{1.7}$$

Так как $\mathbf{x}^\circ(t) = \mathbf{x}^\circ(t + T_0)$, то при $T = T_0$, $\alpha_i = x_i^\circ(0)$, $\alpha_{2n} = C$ равенства (1.6) имеют место. Если при некоторых α_i, T, достаточно близких к $x_i^\circ(0)$, T_0, выполняются $2n - 1$ равенств (1.6), то в силу (1.3) и второго условия (1.7) $x_{2n}(T, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}, C) = C$, т. е. последнее уравнение (1.6) также удовлетворяется.

Как известно, $2n - 1$ уравнение (1.6) определяет при достаточных малых $|s|$ единственное однопараметрическое семейство $T(s), \alpha_1(s), \ldots$ $\ldots, \alpha_{2n-1}(s)$, обращающееся при $s = 0$ в T_0, $x_1^\circ(0)$, …, $\overset{\circ}{x}_{2n-1}(0)$, если ранг соответствующей якобиевой матрицы

$$B = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} - 1 & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_{2n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{2n-1}}{\partial t} & \dfrac{\partial x_{2n-1}}{\partial \alpha_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_{2n-1}}{\partial \alpha_{2n-1}} - 1 \end{matrix} \right\|_{\alpha_i = x_i^\circ(0),\ T = T_0}$$

равен $2n - 1$.

Предположим сначала, что мультипликатору $\rho = 1$ отвечает один жорданов ящик, т. е. уравнение (1.2) имеет единственное (с точностью до множителя) T_0-периодическое решение $\mathbf{y}^\circ(t)$. Покажем, что в этом случае матрица B_1, полученная из B вычеркиванием первого столбца, является неособенной и, следовательно, $\operatorname{rank} B = 2n - 1$.

Предположим, что $\det B_1 = 0$, тогда уравнение $B_1\mathbf{y} = 0$ имеет нетривиальное решение $(y_1, \ldots, y_{2n-1})'$. Как известно

$$Y(T_0) = \left\| \frac{\partial x_i (T, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})}{\partial \alpha_k} \right\|_1^{2n} (\alpha_i = x_i^\circ (0), T = T_0)$$

поэтому матрицу B_1 можно представить в виде $B_1 = Y_{2n-1,2n-1}(T_0) - I_{2n-1}$, где $Y_{2n-1,2n-1}(T_0)$ — матрица, полученная из $Y(T_0)$ вычеркиванием последнего столбца и последней строки. Следовательно, при $\mathbf{y}^1 (y_1, \ldots, y_{2n-1}, 0)'$ первые $2n-1$ компонент вектора $Y(T_0)\mathbf{y}^1$ равны $y_1, \ldots, y_{2n-1}$.

Пусть $\mathbf{y}^1(t)$ — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию $\mathbf{y}^1(0) = \mathbf{y}^1$, т. е. $\mathbf{y}^1(t) = Y(t)\mathbf{y}^1$. Как известно, решение $\mathbf{z}^\circ(t)$ сопряженной системы (1.4) и любое решение $\mathbf{y}(t)$ системы (1.2) удовлетворяют соотношению

(1.8) $\qquad (\mathbf{z}^\circ(t), \mathbf{y}(t)) \equiv \mathrm{const}$

Учитывая, что $\mathbf{z}^\circ(0) = \mathbf{z}^\circ(T_0)$, $y_i^1(0) = y_i^1(T_0)$ $(i = 1, \ldots, 2n-1)$, $z_{2n}^\circ(0) \neq 0$, с помощью (1.8) найдем $y_{2n}^1(T_0) = y_{2n}^1(0) = 0$. Следовательно, $\mathbf{y}^1(T_0) = \mathbf{y}^1(0)$, т. е. $\mathbf{y}^1(t)$ является периодическим решением уравнения (1.2). Так как $y_{2n}^1(0) = 0$, $y_{2n}^\circ(0) \neq 0$, то решения $\mathbf{y}^1(t)$ и $\mathbf{y}^\circ(t)$ линейно независимы, что, однако, противоречит предположению о единственности периодического решения уравнения (1.2). Следовательно, $\det B_1 \neq 0$, $\mathrm{rank}\, B = 2n-1$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Предположим теперь, что кратность единичного мультипликатора $k = 2$, причем ему отвечают простые элементарные делители (иначе имел бы место рассмотренный выше случай). Пусть $\mathrm{rank}\, B < 2n-1$, тогда $\det B_1 = 0$; покажем, что $\mathrm{rank}\, B_1 = 2n-2$. Действительно, при $\mathrm{rank}\, B_1 < 2n-2$ уравнение $B_1\mathbf{y} = 0$ имеет не менее двух линейно-независимых решений. Как видно из приведенных рассуждений, им отвечают периодические решения уравнения (1.2), линейно-независимые с $\mathbf{y}^\circ(t)$, в то время как, по условию, общее число периодических решений равно двум. Поэтому матрица B_2, полученная из B_1 вычеркиванием некоторой строки и столбца (для определенности — последнего), является неособенной.

Так как $\mathrm{rank}\, B < 2n-1$, то определитель матрицы B_3, полученной из B вычеркиванием последнего столбца, равен нулю. Следовательно, уравнение $B_3\mathbf{y} = 0$ имеет нетривиальное решение $\mathbf{a} = (c_0, \mathbf{c})'$, где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{2n-2})$. При этом $c_0 \neq 0$, иначе уравнение $B_2\mathbf{y} = 0$ имело бы нетривиальное решение $\mathbf{y} = c'$, что невозможно, так как $\det B_2 \neq 0$.

Тождество $B_3\mathbf{a} = 0$ можно представить в виде

(1.9) $\qquad c_0\mathbf{y}_T^\circ + Y_{2n-1,2n-2}\mathbf{c}' = (\mathbf{c}, 0)', \quad \mathbf{y}_T^\circ = (y_1(T_0), \ldots, y_{2n-1}^\circ(T_0))'$

где $Y_{2n-1,2n-2}$ — матрица, полученная из $Y(T_0)$ вычеркиванием последней строки и двух последних столбцов.

Положим

(1.10) $\qquad \mathbf{y}^2 = c_0\mathbf{y}^\circ(T_0) + Y(T_0)\mathbf{y}^1, \quad \mathbf{y}^1 = (\mathbf{c}, 0, 0)$

Как следует из (1.9), $y_i^2 = y_i^1 (i = 1, \ldots, 2n-1)$. В силу (1.8) $(\mathbf{z}^\circ(0), \mathbf{y}^1) = (\mathbf{z}^\circ(T_0), Y(T_0)\mathbf{y}^1)$, поэтому из (1.10) и (1.5) получим

$$(\mathbf{z}^\circ(0), \mathbf{y}^1) = (\mathbf{z}^\circ(T_0), \mathbf{y}^2 - c_0\mathbf{y}^\circ(T_0)) = (\mathbf{z}^\circ(T_0), \mathbf{y}^2)$$

Так как $y_i^2 = y_i^1$ $(i = 1, \ldots, 2n-1)$, $\mathbf{z}^\circ(T_0) = \mathbf{z}^\circ(0)$, $z_{2n}^\circ \neq 0$, то $y_{2n}^2 = y_{2n}^1 = 0$. Таким образом, $\mathbf{y}^2 = \mathbf{y}^1$, т. е.

(1.11) $\qquad \mathbf{y}^1 = Y(T_0)\mathbf{y}^1 + c_0\mathbf{y}^\circ(T_0), \quad c_0 \neq 0$

С учетом равенства $\mathbf{y}^\circ(T_0) = Y(T_0)\,\mathbf{y}^\circ(T_0)$ соотношение (1.11) показывает, что векторы $\mathbf{y}^\circ(T_0)$ и $\mathbf{y}^1$ принадлежат циклическому подпространству матрицы $Y(T_0)$, отвечающему собственному значению $\rho = 1$. Последнее, однако, невозможно, так как, по предположению, соответствующие элементарные делители простые.

Таким образом, предположение о том, что $\operatorname{rank} B < 2n - 1$ приводит к противоречию. Итак, $\operatorname{rank} B = 2n - 1$, что гарантирует существование и единственность однопараметрического семейства решений $\alpha_i(s)$, $T(s)$ системы (1.6) и, следовательно, соответствующего семейства $x_i(t, s)$ $(x_i(0, s) = \alpha_i(s))$ периодических решений системы (1.1). Теорема доказана.

Положив в соотношениях (1.6) $\alpha_i = \alpha_i(s)$, $T = T(s)$ и дифференцируя их по s, получим

$$(1.12)\qquad \boldsymbol{\alpha}_s = Y(T)\,\boldsymbol{\alpha}_s + \mathbf{x}^\cdot(T)\,T_s$$

$$\boldsymbol{\alpha}_s = \left(\frac{d\alpha_1(s)}{ds}, \ldots, \frac{d\alpha_{2n}(s)}{ds}\right), \qquad T_s = \frac{dT(s)}{ds}$$

Если T_0-периодическое решение $\mathbf{y}^\circ(t)$ единственно, то $T_s(0) \neq 0$. Действительно, при $T_s(0) = 0$ решение $\mathbf{y}(t) = Y(t)\,\boldsymbol{\alpha}_s$ в силу (1.12) и условий $y_{2n}^\circ(0) \neq 0$, $(\alpha_{2n})_s = C_s = 0$ является T_0-периодическим и линейно-независимым с $\mathbf{y}^\circ(t)$.

Если при $k = 2$ уравнение (1.2) имеет два периодических решения, то $T_s(0) = 0$. Действительно, при $T_s(0) \neq 0$ векторы $\boldsymbol{\alpha}_s$ и $\mathbf{y}_0(T_0)$ в силу (1.12) образуют циклическое подпространство матрицы $Y(T_0)$, отвечающее мультипликатору $\rho = 1$, что невозможно ввиду простоты элементарных делителей.

Покажем, что при $k = 2$ в качестве параметра s может быть принята величина H. Векторы $\mathbf{y}^\circ(0)$ и $\boldsymbol{\alpha}_s$ образуют корневое подпространство $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ матрицы $Y(T_0)$, отвечающее собственному значению $\rho = 1$. Пусть $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — соответствующее корневое подпространство матрицы $Y(T_0)'$. Как известно [5], $\Delta = \det\|(\mathbf{a}_p, \mathbf{b}_q)\|_{p,\,q=1}^2 \neq 0$. Так как матрица монодромии уравнения (1.4) $Z(T_0) = (Y(T_0)')^{-1}$ [5], а $Z(T_0)$ и $Z(T_0)^{-1}$ имеют одинаковые собственные векторы, то $Y(T_0)^1\mathbf{z}^\circ(0) = Z(T_0)^{-1}\mathbf{z}^\circ(0) = \mathbf{z}^\circ(0)$, поэтому можно принять $\mathbf{b}_1 = \mathbf{z}^\circ(0)$. Учитывая (1.5), найдем $\Delta = -(\boldsymbol{\alpha}_s, \mathbf{z}^\circ(0))\,(\mathbf{y}^\circ(0), \mathbf{b}_2) \neq 0$, откуда $(\boldsymbol{\alpha}_s, \mathbf{z}^\circ(0)) = dH(\mathbf{x}(0, s))/ds \neq 0$. Поэтому величина H может служить параметром, определяющим рассматриваемое семейство решений.

Замечание. При доказательстве теоремы гамильтоновость системы (1.1) не использовалась. Поэтому она справедлива для автономных систем общего вида, имеющих интеграл (1.3) (в частности, для систем Ляпунова). Отметим также, что любая система $\mathbf{x}^\cdot = f(\mathbf{x}, \beta)$, содержащая параметр β, может быть сведена к указанному виду включением β в число переменных.

2. Прежде чем перейти к изложению основных результатов, сделаем следующее замечание, относящееся к устойчивости периодических решений. В нелинейных системах, имеющих однозначный первый интеграл, мультипликатору $\rho = 1$ отвечают, как правило, непростые элементарные делители. Поэтому уравнение (1.2) имеет решение вида $\mathbf{y}^1(t) + t\mathbf{y}^\circ(t)$, следовательно, решение $\mathbf{x}^\circ(t)$ неустойчиво по Ляпунову. Необходимым условием орбитальной устойчивости $\mathbf{x}^\circ(t)$ является ограниченность остальных решений. Последнее заведомо имеет место, если все мультипликаторы уравнения (1.2) лежат на единичной окружности и, за исключением двукратного мультипликатора $\rho = 1$, дефинитны, т. е. среди них нет совпавших мультипликаторов разного рода. Решение $\mathbf{x}^\circ(t)$, для которого эти условия выполняются, будем называть орбитально устойчивым в первом приближении.

Полагаем, что $\mathbf{x} = 0$ — положение равновесия системы (1.1) ($H_\mathbf{x}(0) = 0$), $A(0) = H_{\mathbf{xx}}(0)$ — знакоопределенная (без ограничения общности положительно-определенная) матрица. В силу этого условия собственные значения матрицы $J^{-1}A(0)$ мнимые [5]; обозначим их $\pm i\omega_k^\circ$ ($k = 1, \ldots, n$; $0 < \omega_i \leqslant \omega_{i+1}$). Если $\omega_i/\omega_j \neq m$ для некоторого j ($i = 1, \ldots, n$; $j \neq i$; m — целое число), то в соответствии с теоремой Ляпунова [1] в достаточно малой окрестности начала координат существует единственное однопараметрическое семейство периодических решений $\mathbf{x}^j(t, s)$ с периодом $T_j(s)$, такое, что $\mathbf{x}^j(t, s) \to 0$, $T_j(s) \to 2\pi/\omega_j^\circ$ при $s \to 0$.

Пусть Ω — заданная ограниченная область; $\mathbf{x} = 0$ — ее внутренняя точка, причем система (1.1) не имеет в Ω других положений равновесия. Ниже найдены достаточные условия, при которых семейство $\mathbf{x}^j(t, s)$ может быть единственным образом продолжено по s до границы $\partial\Omega$ области Ω, т. е. $\mathbf{x}^j(t, s) \in \Omega$ при $s \in (0, s_*)$, $\mathbf{x}(t_*, s_*) \in \partial\Omega$ при некоторых t_*, s_*. Заметим, что алгоритмы численного отыскания периодических решений гамильтоновых систем методом продолжения по параметру разработаны в [6, 7] и др.

Пусть A_- и A_+ — симметрические положительно-определенные постоянные матрицы, удовлетворяющие неравенству

$$A_- < A(\mathbf{x}) < A_+ \text{ при } \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.1}$$

Последнее, как обычно, означает, что $(A_-\mathbf{c}, \mathbf{c}) < (A(\mathbf{x})\mathbf{c}, \mathbf{c}) < (A_+\mathbf{c}, \mathbf{c})$ при любом векторе $\mathbf{c} \neq 0$.

Обозначим $\pm i\omega_k^-$ и $\pm i\omega_k^+$ — собственные значения матриц $J^{-1}A_-$ и $J^{-1}A_+$.

Теорема 2. Если для некоторого j

$$m \notin \left[\frac{\omega_i^- + \omega_k^-}{\omega_j^+}, \frac{\omega_i^+ + \omega_k^+}{\omega_j^-}\right] \tag{2.2}$$

$$i, k = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots;\quad k \neq j \text{ при } i = j$$

то семейство $\mathbf{x}^j(t, s)$ единственным образом продолжимо по s до границы области Ω. Соответствующий период $T_j(s)$ удовлетворяет неравенству

$$T_j^+ < T_j(s) < T_j^-;\quad T_j^+ = \frac{2\pi}{\omega_j^+},\quad T_j^- = \frac{2\pi}{\omega_j^-} \tag{2.3}$$

При любом $s \in (0, s_*]$ решение $\mathbf{x}^j(t, s)$ орбитально устойчиво в первом приближении.

Доказательство. В силу (2.1) и (2.2) $\omega_i^- < \omega_i^\circ < \omega_i^+$, $\omega_j^\circ \neq \omega_i^\circ/m$, поэтому при малых s указанное в теореме семейство $\mathbf{x}^j(t, s)$ существует. Покажем, прежде всего, что если $\mathbf{x}^j(t, s)$ продолжимо по s на некоторый $(0, s_1]$, то соответствующий период $T_j(s)$ удовлетворяет неравенству (2.3).

Рассмотрим самосопряженную краевую задачу

$$J\mathbf{y}^\cdot = [A_- + \lambda(R(t) - A_-)]\,\mathbf{y},\quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(T) \tag{2.4}$$

где $R(t)$ — симметрическая положительно-определенная матрица.

Обозначим $\pm i\omega_k(\lambda)$ — собственные значения матрицы $J^{-1}[A_- + \lambda(A_+ - A_-)]$. При возрастании λ от нуля до единицы $\omega_k(\lambda)$ монотонно возрастают от ω_k^- до ω_k^+. При $R = A_+$ положительные собственные значения задачи (2.4) являются корнями уравнений $2\pi m/T = \omega_k(\lambda)$ ($(k = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots)$. В силу (2.2) $\omega_j(\lambda) \neq m^{-1}\ [\omega_k^-, \omega_k^+]$ при $\lambda \in (0, 1)$, $k \neq j$; $\omega_j^- > \omega_j^+/2$. Поэтому при $R = A_+$, $T = T_j^+$ либо $T = T_j^-$ краевая задача (2.4) не имеет собственных значений на (0,1). Так как $A(\mathrm{x}_j(t, s)) < A_+$, а при возрастании $R(t)$ положительные собственные значения убывают [8], то при $R = A(\mathrm{x}^j(t, s))$, $T = T_j^+$ либо $T = T_j^-$ собственные значения $\lambda_i \neq 1$. Так как $\mathrm{y} = \mathrm{x}^{\cdot}(t, s)$ удовлетворяет уравнению (1.2), то при $R(t) = A(\mathrm{x}^j(t, s))$, $T = T_j(s)$ задача (2.4) имеет собственное значение $\lambda = 1$. Таким образом, $T_j(s) \neq T_j^+$, $T_j(s) \neq \neq T_j^-$, т. е. при $s \in (0, s_1]$ неравенство (2.3) не нарушается.

При $R = A_+$ мультипликаторы первого и второго рода уравнения (2.4) равны, соответственно, $r_k^1(\lambda) = \exp(i\omega_k(\lambda)T)$ и $r_k^2(\lambda) = = \exp(-i\omega_k(\lambda)T)$; при $\lambda \in [0,1]$ они лежат на дугах $\Gamma_k^1 = (r_k^1(0), r_k^1(1))$ и $\Gamma_k^2 = (r_k^2(0), r_k^2(1))$ единичной окружности. В силу (2.2) и (2.3) только дуги Γ_j^1 и Γ_j^2 имеют общие точки, поэтому при $\lambda \in [0, 1]$ мультипликаторы разного рода $r_p^1(\lambda)$ и $r_q^2(\lambda)$, за исключением $r_j^1(\lambda)$ и $r^2{}_j(\lambda)$, не совпадают. Тот же вывод справедлив и для мультипликаторов $\rho_p^1(\lambda)$, $\rho_q^2(\lambda)$ уравнения (2.4) при $R = A(\mathrm{x}^j(t, s))$.

Действительно, при возрастании λ мультипликаторы $\rho_p^1(\lambda)$ и $\rho_q^2(\lambda)$ $(\rho_p^1(0) = = r_p^1(0), \rho_q^2(0) = r_q^2(0))$ движутся по дугам Γ_p^1 и Γ_q^2, соответственно, против и по часовой стрелке [8]. Предположим, что при $\lambda \leqslant 1$ они встречаются, тогда при некотором $\lambda_* < 1$ мультипликатор ρ_p^1 либо ρ_q^2 находится в точке $\rho = \rho_*$, не принадлежащей дугам Γ_i^1, Γ_i^2 $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, при $R = A(\mathrm{x}^j(t, s))$ самосопряженная краевая задача для уравнения (2.4) с краевыми условиями $\mathrm{y}(T_j) = \rho_*\mathrm{y}(0)$ имеет собственное значение $\lambda_* \in (0, 1)$. Так как при возрастании R положительные собственные значения уменьшаются, причем $\lambda_i \neq 0$ в силу (2.3), то при $R = A_+$ эта задача также имеет собственное значение $\lambda_k \in (0, 1)$, т. е. один из мультипликаторов $r_i^1(\lambda_k)$, $r_i^2(\lambda_k)$ равен ρ_*. Последнее, однако, невозможно, так как $r_i^1(\lambda) \in \Gamma_i^1$ $r_i^2(\lambda) \in \Gamma_i^2$ при $\lambda \in [0, 1]$.

Итак, мультипликаторы ρ_p^1 и ρ_q^2 $(p, q = 1, \ldots, n;\ p, q \neq j)$ уравнения (1.2), отвечающего решению $\mathrm{x}^j(t, s)$, лежат на единичной окружности и являются дефинитными. Следовательно, кратность мультипликатора $\rho = 1$ равна двум и в силу теорем 1 решение $\mathrm{x}^j(t, s)$ локально продолжимо по s. Поэтому при $\mathrm{x}^j(t, s) \in \Omega$ предельным может быть только такое значение $s = s_*$, что $\mathrm{x}^j(t, s) \to \mathrm{c}$ при $s \to s_*$. По условию, система (1.1) в области Ω имеет единственное положение равновесия $\mathrm{x} = 0$, поэтому $\mathrm{c} = 0$. Так как точками бифуркации положения равновесия на оси T могут служить только числа $T_i^\circ = 2\pi/\omega_i^\circ$ $(i = 1, \ldots, n)$, то в силу (2.2) и (2.3) $T_j(s) \to T_j^\circ$ при $s \to s_*$. Но тогда наряду с $\mathrm{x}_j(t, s)$ существует однопараметрическое семейство $\mathrm{x}^*(t, s) = \mathrm{x}^j(t, s_* - s)$, такое, что $\mathrm{x}^*(t, s) \to \to 0$, $T(s) \to 2\pi/\omega_j^\circ$ при $s \to 0$. Это противоречит утверждению теоремы Ляпунова о единственности такого семейства и тем самым доказывает, что $\mathrm{x}^j(t, s)$ продолжимо по s до границы области Ω.

Как видно из приведенных рассуждений, мультипликаторы уравнения (1.2) при $\mathrm{x} = \mathrm{x}^j(t, s)$, за исключением $\rho_j^1 = \rho_j^2 = 1$, дефинитны, поэтому $\mathrm{x}^j(t, s)$ орбитально устойчиво в первом приближении. Таким образом, теорема полностью доказана.

3. Перейдем к обсуждению доказанной теоремы. Пусть $H(0) = 0$, $H(\mathrm{x}) \leqslant M$ при $\mathrm{x} \in \Omega$. Тогда при условии (2.2) любое периодическое решение $\mathrm{x}(t) \in \Omega$ с периодом $T \in (T_j^+, T_j^-)$ принадлежит семейству $\mathrm{x}^j(t, s)$.

Действительно, как видно из доказательства теоремы 2, при условии (2.2) кратность мультипликатора $\rho = 1$ уравнения (1.2), отвечающему любому решению $\mathrm{x}(t)$ с периодом $T \in (T_j^+, T_j^-)$, равна двум. В соответствии с теоремой 1 $\mathrm{x}(t)$ принадлежит однопараметрическому семейству периодических решений, причем в качестве параметра может быть принята величина H. Продолжив $\mathrm{x}(t, H)$, по H до $H = 0$ (при этом, как видно из доказательства теоремы 2, сохраняется неравенство (2.3) и $T(H) \to T_j^\circ$ при $H \to 0$), с учетом теоремы Ляпунова найдем, что при малых H $\mathrm{x}(t, H)$ совпадает с указанным в теореме семейством $\mathrm{x}^j(t, H)$. Ввиду единственности продолжения они совпадают при всех $H \leqslant M$.

Число индексов $j \in [1,\ldots, n)$, для которых выполняется условие (2.2), дает нижнюю оценку числа периодических решений, лежащих на любой изоэнергетической поверхности $H(\mathrm{x}) = H \leqslant M$.

Если (2.2) выполняется для всех $\mathrm{x} \in R^{2n}$, то $\mathrm{x}^j(t, X)$ может быть продолжено по H на $(0, \infty)$. При этом для любого H решение с периодом $T \in (T_j^+, T_j^-)$ единственно и принадлежит семейству $\mathrm{x}^j(t, H)$.

Как показано в [9], при условии

$$(3.1) \qquad \omega \,\overline{\in}\, [\omega_k^-, \omega_k^+]/m, \; k = 1,\ldots, n;\; m = 1,2,\ldots$$

система (1.1) имеет единственное решение с периодом $T = 2\pi/\omega$. Так как $\mathrm{x}(t) \equiv 0$ — такое решение, то колебания с периодом $2\pi/\omega$ невозможны (как следствие, невозможны колебания с периодом $T \leqslant 2\pi/\omega_n^+$). Отсюда, в частности, следует, что при условии (2.2) $T_j(s)$ — минимальный период решения $\mathrm{x}^j(t, s)$, так как при $\omega \in p(\omega_j^-, \omega_j^+)$ ($p > 1$ — целое число) выполняется условие (3.1).

С другой стороны, если

$$(3.2) \qquad m \,\overline{\in}\, p\left[\frac{\omega_i^- + \omega_k^-}{\omega_j^+}, \frac{\omega_i^+ + \omega_k^+}{\omega_j^-}\right], \quad i, k = 1,\ldots, n;$$
$$i \neq j \text{ при } k = j; \quad m = 1, 2, \ldots$$

то любое периодическое решение $\mathrm{x}(t)$ с периодом $T \in p(T_j^+, T_j^-)$ имеет минимальный период $T_{\min} = T/p$ и принадлежит поэтому семейству $\mathrm{x}^j(t, s)$.

В самом деле, как видно из доказательства теоремы 2, при условии (3.2) кратность мультипликатора $\rho = 1$ уравнения (1.2) равна двум, поэтому любое решение $\mathrm{x}(t)$ продолжимо по H до $H = 0$, причем соответствующий период $T(H) \in p(T_j^+, T_j^-)$. Но в силу (3.2) $\omega_i^\circ \,\overline{\in}\, [\omega_j^-, \omega_j^+]$ при $i \neq j$, следовательно, $T(H) \to 2\pi p/\omega_j^\circ$, а $T_{\min}(H) \to 2\pi/\omega_j^\circ$ при $H \to 0$, т. е. $\mathrm{x}(t)$ принадлежит семейству $\mathrm{x}^j(t, s)$.

Предположим, что $H(\mathrm{x})$ — четная по обобщенным импульсам функция, т. е.

$$(3.3) \qquad H(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = H(x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1}, \ldots, -x_{2n})$$

Тогда наряду с решением $\mathrm{x}(t) = (x_1(t),\ldots, x_{2n}(t))'$ системе (1.1) удовлетворяет также функция $\mathrm{x}^*(t) = (x_1(-t), \ldots, x_n(-t), -x_{n+1}(-t), \ldots$ $\ldots, -x_{2n}(-t))'$. Если периодическое решение $\mathrm{x}(t)$ единственно (с точностью до сдвига по t), то при некотором h должно выполняться тождество $\mathrm{x}^*(t) = \mathrm{x}(t + h)$, откуда $x_i(\tau) = x_i(-\tau)$, $x_{i+n}(\tau) = -x_{i+n}(-\tau)$, где $\tau = t - h/2$. Следовательно, при условиях (2.2), (3.3) и соответствующем выборе начала отсчета

$$(3.4) \qquad x_i^j(t, s) = x_i^j(-t, s), \quad x_{i+n}^j(t, s) = -x_{i+n}^j(-t, s), \quad i = 1,\ldots, n$$

Предположим, что $H(\mathrm{x})$ — четная функция координат и импульсов, т. е.

$$(3.5) \qquad H(\mathrm{x}) = H(-\mathrm{x})$$

В этом случае теорема остается справедливой, если (2.2) заменить более слабым условием

$$(3.6)\qquad 2m \overline{\in} \left[\frac{\omega_i^- + \omega_k^-}{\omega_j^+}, \frac{\omega_i^+ + \omega_k^+}{\omega_j^-}\right], \quad i, k = 1, \ldots, n; \quad i \neq j$$

$$\text{при} \quad k = j; \quad m = 1, 2, \ldots$$

В силу (3.6) $\omega_j^\circ \neq \omega_i^\circ / m$, поэтому в достаточно малой окрестности начала координат $\mathbf{x}^j(t, s)$ существует. При условии (3.5) системе (1.1) удовлетворяет также функция $-\mathbf{x}^j(t, s)$, откуда с учетом единственности $\mathbf{x}^j(t, s)$ найдем, что $\mathbf{x}^j(t + h, s) = -\mathbf{x}^j(t, s)$ при некотором h. Следовательно, $\mathbf{x}^j(t + 2h, s) = \mathbf{x}^j(t, s)$, $h = T/2$, т. е.

$$(3.7)\qquad \mathbf{x}^j(t + T/2, s) = -\mathbf{x}^j(t, s)$$

Как следует из (3.5) и (3.7), $A(\mathbf{x}) = A(-\mathbf{x})$, $A_j(t) = A(\mathbf{x}^j(t, s)) = A(\mathbf{x}^j(t + T/2, s))$, т. е. наименьший период матрицы $A_j(t)$ равен $T/2$, поэтому мультипликаторы уравнения (1.2) ρ_i равны собственным значениям матрицы $Y(T/2)$. Аналогично доказательству теоремы 2 найдем, что при условии (3.6) все мультипликаторы лежат на единичной окружности и, за исключением двукратного мультипликатора $\rho = -1$, дефинитны. Так как собственные значения матрицы $Y(T)$ равны ρ_i^2 ($Y(T) = Y(T/2)^2$), то кратность ее единичного собственного значения равна двум, что в соответствии с теоремой 1 обеспечивает единственность продолжения $\mathbf{x}^j(t, s)$ по s в области Ω. Последнее, в свою очередь, гарантирует соотношение (3.7).

4. В качестве примера рассмотрим колебания струны с сосредоточенными массами. Полагая, что продольные перемещения масс отсутствуют, найдем функцию Гамильтона

$$H = \frac{EF}{2} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{l_i} \left(\frac{T_0 l_i}{EF} + \sqrt{z_i^2 + l_i^2} - l_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+n}^2}{m_i}$$

$$z_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1), \quad z_n = x_n, \quad x_0 = 0$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — поперечные перемещения масс $m_1, \ldots, m_n$; $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ — соответствующие импульсы, $l_0, \ldots, l_n$ — длины последовательных участков, E — модуль упругости, F — площадь сечения, T_0 — начальное натяжение струны.

Гессиан функции Гамильтона приводится к виду

$$(4.1)\qquad (A(\mathbf{x})\mathbf{c}, \mathbf{c}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{EF}{l_i} \left(\frac{(k-1) l_i^3}{\sqrt{(z_i^2 + l_i^2)^3}} + 1 \right) b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{n+i}^2}{m_i}$$

$$b_i = c_{i+1} - c_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1), \quad b_n = c_n, \quad c_0 = 0$$

Очевидно, что при $k > 1$ для получения формы $(A_+ \mathbf{c}, \mathbf{c})$ либо $(A_- \mathbf{c}, \mathbf{c})$ достаточно в (4.1) положить $z_i^2 = 0$ либо $z_i^2 = z_{i0}^2 = \max z_i^2$ при $x_{i+1}, x_i \in \Omega$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$; при $k < 1$ — наоборот. Пусть ω_i° и ω_i — соответствующие частоты, тогда $\omega_i^+ = \omega_i^\circ$, $\omega_i^- = \omega_i$ при $k > 1$, $\omega_i^- = \omega_i^\circ$, $\omega_i^+ = \omega_i$ при $k < 1$. Величины ω_i° равны частотам собственных малых колебаний системы, поэтому при $k > 1$ периоды $T_j(H)$ решений $x^j(t, H)$ больше, при $k < 1$ — меньше соответствующих периодов малых колебаний T_j°; при $k = 1$ рассматриваемая система линейна. Заметим, что физически k — относительное удлинение струны, вызванное натяжением T_0.

Так как $H(\mathbf{x}) = H(-\mathbf{x})$, то при условии (3.6) в области Ω существует семейство периодических решений $\mathbf{x}^j(t, H)$, причем $\mathbf{x}^j(t, H) \to 0$, $T_j(H) \to 2\pi/\omega_i^\circ$ при $H \to 0$. Это семейство орбитально устойчиво в первом приближении и удовлетворяет соотношениям (3.4) и (3.7).

При уменьшении области Ω соответствующие частоты $\omega_i(\Omega) \to \omega_i^\circ$, поэтому число индексов j, для которых выполняется условие (3.6), увеличивается.

Если $\Omega = R^{2n}$, то, полагая в (3.1) $z_i \to \infty$, найдем, что $\omega_i = \omega_i^\circ/\sqrt{k}$. Обозначим k_j^- и k_j^+ — предельные значения k, при которых нарушается условие (3.6) (таким образом, при $k_j^- < k < k_j^+$ решение $\mathbf{x}^j(t, H)$ продолжимо до любого H). Очевидно, что значение k_j^+ равно ближайшему к единице справа, k_j^- — ближайшему слева числу

$$\left(\frac{\omega_i^\circ + \omega_k^\circ}{2\omega_j^\circ m}\right) \quad \text{или} \quad \left(\frac{2\omega_j^\circ m}{\omega_i^\circ + \omega_k^\circ}\right)$$

$$i, k = 1, \ldots, n; \quad i \neq j \quad \text{при} \quad k = j; \quad m = 1, 2, \ldots$$

поэтому $k_j^- = 1/k_j^+$. Непосредственно вычисляется $k_n^- = (\omega_{n-1}^\circ + \omega_n^\circ)^2 (2\omega_n^\circ)^{-2}$.

Пусть, например, $n = 4$, $l_i = l_0$, $m_i = m$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $2T_0^{7/2}(l_0 m)^{-7/2} = 1$, тогда $\omega_i^\circ = \sin k_i$, $k_i = \pi i/2\,(n+1)$, откуда $\omega_1^\circ = 0{,}3090$, $\omega_2^\circ = 0{,}5878$, $\omega_3^\circ = 0{,}8090$, $\omega_4^\circ = 0{,}9512$. Соответствующие вычисления дают $k_1^- = 0{,}963$, $k_1^+ = 1{,}039$, $k_2^- = 0{,}709$, $k_2^+ = 1{,}411$, $k_3^- = 0{,}846$, $k_3^+ = 1{,}183$, $k_4^- = 0{,}857$, $k_4^+ = 1{,}167$.

Заметим, что в случае конечной области Ω решение $\mathbf{x}^j(t, H)$ заведомо продолжимо до границы Ω, если частоты $\omega_i(\Omega) > \omega_i^\circ/\sqrt{k_j^+}$ при $k > 1$ либо $\omega_i(\Omega) < \omega_i^\circ/\sqrt{k_j^-}$ при $k < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Desolneux-Moulis Nicole.* Orbites periodiques des systemes hamiltoniens autonomes.— Lect. Notes Math., 1981, v. 842, p. 156—173.
3. *Rabinowitz P. H.* Periodic solutions of Hamiltonian systems: a survey.— SIAM J. Math. Anal., 1982, v. 13, No. 3, p. 343—352.
4. *Zehnder E.* Periodic solutions of Hamiltonian equations.— Lect. Notes Math., 1983, v. 1031, p. 172—213.
5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
6. *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Одноосная гравитационная ориентация искусственных спутников.— Космич. исслед., 1981, т. 19, № 5, с. 659—673.
7. *Сокольский А. Г., Хованский С. А.* О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы.— Космич. исслед., 1983, т. 21, № 6, с. 851—860.
8. *Крейн М. Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Памяти А. А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 413—498.
9. *Зевин А. А.* Некоторые условия существования и устойчивости периодических колебаний в нелинейных неавтономных гамильтоновых системах.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 637—646.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 30.V.1985