Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.36

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Ильин А. И.

Проводится обобщение основных теорем Ляпунова и Четаева, в которых ослабляется требование существования бесконечно малого высшего предела у функции Ляпунова. В обобщенных теоремах доказывается, что достаточно, чтобы функция Ляпунова допускала бесконечно малый высший предел, либо была ограниченной по времени t на некоторых интервалах времени t_i, для которых справедливо условие $\sum\limits_i t_i \to \infty$ при $t \to \infty$. При этих же условиях формулируются теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Применение теорем иллюстрируется на примере исследования устойчивости системы второго порядка с построением обобщенной функции Ляпунова.

1. Теория устойчивости во втором методе Ляпунова в настоящее время получила достаточно широкое развитие, а теоремы Ляпунова — обобщение. Но во всех теоремах и их обобщениях [1—7] остается неизменным требование существования бесконечно малого высшего предела у функции Ляпунова. Однако это требование очень сильное и может быть ослаблено.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$dx_s/dt = f_s(t, \mathrm{x}), \quad (\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Относительно правых частей этих уравнений предполагаем, что они в области

$$|x_s| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0 > 0 \tag{1.2}$$

непрерывны и допускают существование единственного решения при заданных начальных условиях и выполняются условия $f_s(t, 0) = 0$, а ε — положительная постоянная. В этой же области (1.2) будем рассматривать функции $V(t, \mathrm{x})$, относительно которых будем предполагать, что они обладают непрерывными частными производными и обращаются в нуль при $\mathrm{x} = 0$.

Введем следующие определения.

Определение 1. Будем называть функцию $V(t, \mathrm{x})$ определенно-положительной (определенно-отрицательной) в широком смысле, если в сколько угодно малой области $|x_s| < \varepsilon$ и при сколько угодно больших t (будем говорить $t \in T_v$) существуют такие интервалы времени $t_{v1}{}^i$, внутри которых функция V удовлетворяет условию $V \geqslant W(\mathrm{x})$, $(V \leqslant -W(\mathrm{x}))$ (W — определенно-положительная функция, не зависящая от t). В этой же области $|x_s| < \varepsilon$ и при $t \in T_v$ могут существовать интервалы времени $t_{v2}{}^i$, внутри которых функция V удовлетворяет условию $V(t, \mathrm{x}) \geqslant 0$, $(V \leqslant 0)$. Интервалы же времени $t_{v1}{}^i$ и $t_{v2}{}^i$ полностью заполняют T_v.

Определение 2. Будем называть функцию $V(t, \mathrm{x})$ условно допускающей бесконечно малый высший предел, если в сколько угодно малой области $|x_s| < \varepsilon$ и при $t \in T_v$ существуют интервалы времени $t_{v3}{}^i$, внутри которых функция V стремится к нулю при $|\mathrm{x}| \to 0$ равномерно относительно t. В этой же области $|x_s| < \varepsilon$ и при $t \in T_v$ могут существовать интервалы времени $t_{v4}{}^i$, внутри которых функция V может не допускать бесконечно малый высший предел. Интервалы времени же $t_{v3}{}^i$ и $t_{v4}{}^i$ полностью заполняют T_v.

2. Учитывая приведенные выше определения, можно сформулировать следующие обобщения основных теорем Ляпунова.

Теорема 1 (Об асимптотической устойчивости). Допустим, что для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную, условно допускающую бесконечно малый высший предел функцию $V\ (t,\ \mathrm{x})$, полная производная которой dV/dt, составленная в силу уравнений (1.1), есть функция, знакоопределенная в широком смысле противоположного V знака. Если при этом $\sum\limits_i t^i_{v\cdot 1} \to \infty$ при $t \to \infty$ и все интервалы $t^i_{v\cdot 1}$ полностью содержатся в $t_{v3}{}^i$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Доказательство. Допустим, что $V\ (t,\ \mathrm{x})$ — функция определенно-положительная, тогда в области (1.2) выполняется неравенство

$$V\ (t,\ \mathrm{x}) \geqslant W\ (\mathrm{x}) \tag{2.1}$$

где W — некоторая не зависящая от t определенно-положительная функция.

Кроме того, в этой же области dV/dt — определенно-отрицательная в широком смысле функция, тогда

$$dV/dt \leqslant W_1\ (\mathrm{x}),\ \ t \in t^i_{v\cdot 1};\ \ dV/dt \leqslant 0,\ \ t \in t^i_{v\cdot 2} \tag{2.2}$$

где W_1 — некоторая не зависящая от t определенно-положительная функция.

Будем рассматривать величины x_s как функции времени, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения (1.1), предполагая, что начальные значения $x_s\ (t_0)$ удовлетворяют условиям (1.2). Так как невозмущенное движение во всяком случае устойчиво, то величину ε можно выбирать настолько малой, чтобы при всех $t \geqslant t_0 > 0$ величины x_s оставались в области (1.2). Но тогда производная dV/dt будет все время неположительной и, следовательно, функция V с неограниченным возрастанием t будет стремиться к некоторому пределу, оставаясь все время больше этого предела.

Покажем, что этот предел равен нулю. Допустим противное: предел равен некоторой положительной величине $\alpha \neq 0$, т. е. при всех $t \geqslant t_0 > 0$ выполняется неравенство

$$V\ (t,\ \mathrm{x}) > \alpha \tag{2.3}$$

Но так как на интервалах $t^i_{v\cdot 1}$ функция V допускает бесконечно малый высший предел, то будет выполняться неравенство

$$X\ (t) = \max\ \{|\ x_1\ (t)\ |,\ \ldots,\ |\ x_n\ (t)\ |\} \geqslant \lambda,\ \ t \in t^i_{v\cdot 1} \tag{2.4}$$

где λ — некоторое достаточно малое положительное число.

Но если при $t \in t^i_{v\cdot 1}$ выполняется неравенство (2.4), то будет также выполняться неравенство

$$dV/dt \leqslant -l,\quad t \in t^i_{v\cdot 1};\ dV/dt \leqslant 0,\ t \in t^i_{v\cdot 2}$$

где l — отличное от нуля положительное число, являющееся точным нижним пределом функции dV/dt при $t \in t^i_{v\cdot 1}$ и выполнении условия (2.3).

Следовательно, при всех $t \geqslant t_0 > 0$

$$V\ (t, \mathrm{x}) = V\ (t_0, \mathrm{x}^\circ) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\ (t, \mathrm{x})\ dt \leqslant V\ (t_0, \mathrm{x}^\circ) - l \sum_i t^i_{v\cdot 1}$$

т. е. при $t \to \infty$ правая часть стремится к $-\infty$. Это противоречит условию (2.3), откуда вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x) = 0$$

Следовательно, то же справедливо и для функции $W(x)$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} = 0$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2 (О неустойчивости). Допустим, что существует условно допускающая бесконечно малый высший предел функция $V(t, x)$, производная которой по времени, составленная в силу уравнений возмущенного движения, есть функция, знакоопределенная в широком смысле. Сама же функция V при значениях x_s, сколько угодно малых, и при значениях t, сколько угодно больших, может принимать значения того же знака, что и производная. Если при этом $\sum\limits_i t^i_{v\cdot 1} \to \infty$ при $t \to \infty$, а $t_{v3}{}^i$ содержат все промежутки $t^i_{v\cdot 1}$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Допустим, что dV/dt — функция, определенно-положительная в широком смысле т. е. в области (1.2) выполняются неравенства

$$dV/dt \geqslant W_1(x),\ t \in t^i_{v\cdot 1};\ dV/dt \geqslant 0,\ t \in t^i_{v\cdot 2} \tag{2.5}$$

где $W_1(x)$ — не зависящая от t определенно-положительная функция.

Рассмотрим решения $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения, для которых начальные значения $x_s{}^\circ = x_s(t_0)$ выбраны из условия

$$|x_s{}^\circ| \leqslant \eta,\quad V(t_0, x^\circ) > 0$$

где η — достаточно малое положительное число.

Покажем, что это решение обязательно выйдет в некоторый момент времени из области (1.2). Допустим, что это решение все время остается в области (1.2). На основании (2.5) производная функции V будет во всяком случае неотрицательной, поэтому

$$V(t, x) \geqslant V(t_0, x^\circ) \tag{2.6}$$

Но если выполняется условие (2.6), а на интервалах $t \in t^i_{v\cdot 1}$ функция V допускает бесконечно малый высший предел, то будет выполняться неравенство

$$X(t) = \max\{|x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|\} \geqslant \lambda,\ t \in t^i_{v\cdot 1} \tag{2.7}$$

где λ — достаточно малое положительное число.

Тогда из (2.5) вытекает, что

$$dV/dt \geqslant l,\ t \in t^i_{v\cdot 1} \tag{2.8}$$

где l — отличное от нуля положительное число, которое является точным нижним пределом функции dV/dt при $t \in t^i_{v\cdot 1}$ и выполнении (2.7).

Учитывая условие (2.8), получаем

$$V(t, x) = V(t_0, x^\circ) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}(t, x)\,dt \geqslant V(t_0, x^\circ) + l \sum_i t^i_{v\cdot 1} \tag{2.9}$$

Но выполнение условия (2.9) невозможно, так как функция V, условно допускающая бесконечно малый высший предел при $t \in t^i_{v\cdot 1}$, по крайней мере, ограничена, а правая часть (2.9) при $t \to \infty$ стремится к бесконечности.

Из полученного противоречия вытекает, что решение $x_s = x_s(t)$ в некоторый момент времени обязательно покинет не зависящую от начальных значений области (1.2), а так как эти начальные значения сколько угодно малы, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для обобщения теоремы Четаева о неустойчивости [2] рассмотрим окрестность начала координат пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, ограниченную поверхностью $V = 0$, в которой функция V принимает положительные значения. Эту окрестность назовем областью $V > 0$. Допустим, что функция V обладает следующими свойствами.

1°. При сколько угодно больших t и в сколько угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$.

2°. В области $V > 0$ при t_{v3}^i функция V ограничена, а при t_{v4}^i может быть и неограниченной.

3°. В области $V > 0$ при всех t, x, связанных соотношением

$$V(t, \mathrm{x}) > \alpha \tag{2.10}$$

где α — любое как угодно малое положительное число, выполняются неравенства

$$dV/dt \geqslant l, \ t \in t_{v\cdot 1}^i; \ dV/dt \geqslant 0, \ t \in t_{v\cdot 2}^i \tag{2.11}$$

где l — некоторое положительное число, зависящее от α.

Теорема 3 (О неустойчивости). Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию, удовлетворяющую условиям 1°—3°, и $\sum\limits_i t_{v\cdot 1}^i \to \infty$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Зададимся достаточно малой окрестностью начала координат, содержащей область $V > 0$. Рассмотрим решение $x_s = x_s(t)$ уравнений возмущенного движения с начальными значениями $x_s^\circ = x(t_0)$, выбранными численно сколь угодно малыми, такими, что $V(t_0, \mathrm{x}^\circ) > \alpha$.

При $V > \alpha$ производная dV/dt неотрицательная, поэтому функция $V(t, x(t))$ не будет убывать и, следовательно, величины $x_s(t)$ будут оставаться в области $V > \alpha$, по крайней мере до тех пор, пока не нарушается неравенство (1.2).

Допустим, что неравенство (1.2) никогда не нарушается, но при $t > t_0$ выполняется условие

$$V(t, \mathrm{x}(t)) \geqslant V(t_0, \mathrm{x}^\circ)$$

так как dV/dt, по крайней мере, неотрицательная. Отсюда следует

$$dV/dt \geqslant l, \ t \in t_{v\cdot 1}^i; \ dV/dt \geqslant 0, \ t \in t_{v\cdot 2}^i$$

Тогда получим

$$V(t, \mathrm{x}(t)) \geqslant V(t_0, \mathrm{x}^\circ) + l \sum_i t_{v\cdot 1}^i$$

Но это невозможно, так как в области $t \in t_{v\cdot 1}^i$ функция V ограничена.

Таким образом, в некоторый момент времени решение непременно покинет область (1.2), а так как величины $x_s(t_0)$ могут быть взяты сколь угодно малыми, то невозмущенное движение неустойчиво.

Учитывая теоремы, изложенные выше, можно обобщить теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Рассмотрим систему

$$dx_s/dt = \sum_{i=1}^n p_{is}(t) x_i + \vartheta_s(t, x) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

где p_{is} — произвольные, непрерывные и ограниченные при $t \geqslant t_0 > 0$ функции времени, ϑ_s — функции, удовлетворяющие в области (1.2) неравенствам. (A — положительная постоянная)

$$(2.13) \qquad |v_s(t, \mathrm{x})| \leqslant A \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Наряду с системой (2.12) будем рассматривать систему первого приближения

$$(2.14) \qquad \frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{is}(t) x_i \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Среди функций Ляпунова будем рассматривать квадратичные формы переменных $x_1, \ldots, x_n$, вида

$$(2.15) \qquad V = \varphi(t) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j$$

Здесь $a_{ij}(t)$ — произвольные, непрерывные, ограниченные при $t \geqslant t_0 > 0$ функции времени, $\varphi(t)$ — непрерывная, знакоопределенная, полуограниченная функция времени, т. е. при $t_{\varphi 3}{}^i$ функция $\varphi(t)$ ограничена, а при $t_{\varphi 4}{}^i$ может быть и неограниченной.

Теорема 4. Допустим, что для системы уравнений первого приближения (2.14) можно найти знакоопределенную квадратичную форму вида (2.15), для которой производная по времени dV/dt, составленная в силу уравнений (2.14), есть квадратичная знакоопределенная форма, знака противоположного V и может быть представлена в виде

$$(2.16) \qquad \frac{dV}{dt} = \varphi(t) \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t) x_i x_j$$

где $b_{ij}(t)$ — непрерывные, ограниченные при $t \geqslant t_0 > 0$ функции времени. Если при этом для функции $\varphi(t)$ выполняется $\sum_i t_{\varphi 3}^i \to \infty$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение для уравнений (2.12) асимптотически устойчиво при любом выборе функций ϑ_s, удовлетворяющих неравенствам (2.13).

Доказательство. Предположим, что функция V определенно-положительная. Полная производная функции V в силу уравнений (2.12) может быть записана так:

$$(2.17) \qquad \frac{dV}{dt} = \varphi(t) \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t) x_i x_j + u \right]$$

где с учетом (2.12) и (2.17) имеем (B — положительная постоянная)

$$(2.18) \qquad u = \sum_{i,j,s=1}^{n} a_{ijs}(t) \frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x_s} \vartheta_s \leqslant B \sum_{i=1}^{n} |x_i^3|$$

Разложение функции u начинается членами не ниже третьего порядка, поэтому функция (2.17) будет в области (1.2) определенно-отрицательной, каковы бы ни были функции ϑ_s. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям обобщенной теоремы 1 и невозмущенное движение системы (2.12) асимптотически устойчиво.

Теорема 5. Допустим, что для системы уравнений первого приближения (2.14) можно найти квадратичную форму вида (2.15), для которой производная по времени dV/dt, составленная в силу уравнений (2.14), есть знакоопределенная квадратичная форма и может быть представлена в виде (2.16). Сама же форма (2.15) при сколько угодно малых значениях x_s и сколько угодно больших значениях t может принимать значения того же знака, что и производная. Если при этом для функции $\varphi(t)$ выполняется $\sum_i t^i_{\varphi з} \to \infty$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение для уравнений (2.12) неустойчиво при любом выборе функций ϑ_s, удовлетворяющих неравенствам (2.13).

Доказательство. Полная производная функции V для системы (2.12) запишется в виде (2.17), является знакоопределенной и по знаку совпадает с (2.16), так как выполняются условия (2.18), а сама функция V может принимать значения того же знака, что и производная. Следовательно, функция V удовлетворяет всем условиям обобщенной теоремы 2 и невозмущенное движение системы (2.12) неустойчиво.

3. В качестве примера, иллюстрирующего применение обобщенных теорем, рассмотрим систему второго порядка, введенную Перроном [8], и рассмотренную в [3]

(3.1) $$x^{\cdot} = -ax + \varphi_1(t, x, y)$$
$$y^{\cdot} = [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]\, y + \varphi_2(t, x, y)$$

где $a > 0{,}5$: функции $\varphi_1(t, x, y)$, $\varphi_2(t, x, y)$ удовлетворяют условиям (A — некоторая положительная постоянная)

(3.2) $$|\varphi_i(t, x, y)| \leqslant A(x^2 + y^2) \quad (i = 1,\ 2)$$

Для системы первого приближения

(3.3) $$x^{\cdot} = -ax,\ y^{\cdot} = [\sin\ln(t+1) + \cos\ln(t+1) - 2a]\, y$$

можно построить условно допускающую бесконечно малый высший предел определенно-положительную функцию

(3.4) $$V = x^2 + y^2/2a - 1 \exp\{2(t+1)[1 - \sin\ln(t+1)]\}$$

Ее полная производная

(3.5) $$dV/dt = -2ax^2 - 2y^2 \exp\{2(t+1)[1 - \sin\ln(t+1)]\}$$

определенно-отрицательная, т. е. выполнены условия теоремы 1. Поэтому невозмущенное движение системы (3.3) асимптотически устойчиво.

Однако при построении функции (3.4) не были учтены условия теоремы 4. Поэтому нельзя ничего сказать о характере невозмущенного движения системы (3.1), так как функция (3.4) уже не может быть взята в качестве функции Ляпунова системы (3.1). Например, если положить

(3.6) $$\varphi_1 = y^2,\ \varphi_2 = 0$$

то для функции (3.4) полная производная, составленная в силу системы (3.1) с учетом (3.6)

(3.7) $$dV/dt = -2ax^2 - [2y^2 - 2x^2y/2a - 1]\exp\{2(t+1)\ [1 - \sin\ln(t+1)]\}$$

знакопеременная при достаточно больших t.

Для системы (3.1) можно построить функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы 4, в виде

(3.8) $$V = (x^2 + y^2)\,\Gamma(t),\quad \Gamma(t) = \exp_{t_0}\int_{t_0}^{t} \gamma(t)\,dt$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2a - \delta_1, & 2a < 2a - \sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1) \\ 2[2a - \sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1)] - \delta_2, & 2a \geqslant 2a - \sin\ln(t+1) - \cos\ln(t+1) \end{cases}$$

(δ_1, δ_2 — малые положительные числа).

Полная производная в силу системы (3.1) запишется так:

$$\frac{dV}{dt} = -\{(2a - \gamma)x^2 + [4a - 2\sin\ln(t+1) - 2\cos\ln(t+1) - \gamma]\, y^2 +$$
$$+ 2x\varphi_1 + 2y\varphi_2\}\,\Gamma(t) \leqslant -\{\delta(x^2 + y^2) + B[|x^3| + |y^3|]\}\,\Gamma(t)$$

где B — некоторая постоянная, δ — меньшее из δ_1, δ_2.

Для выполнения условий теоремы 4 необходимо отыскать такой коэффициент a, чтобы функция $\Gamma(t)$ при любом $t \geqslant t_0 > 0$ была полуограниченной. При определении коэффициента a нет необходимости вычислять функцию $\Gamma(t)$ на интервале $t_0 - \infty$, а достаточно ее вычислить лишь на интервале $t_0 - t_0 + \exp 2\pi$, где t_0 выбирается из условия

$$\sin \ln (t + 1) + \cos \ln (t + 1) = 2a$$

Можно убедиться, что в этом случае, если

$$\Gamma(t_0 + l^{2\pi}) > 0, \text{ то и } \Gamma(\infty) > 0 \tag{3.9}$$

если же

$$\Gamma(t_0 + l^{2\pi}) < 0, \text{ то и } \Gamma(\infty) < 0 \tag{3.10}$$

Но если выполняется условие (3.9), то всегда можно отыскать условно допускающую бесконечно малый высший предел функцию Ляпунова (3.8), и следовательно, удовлетворить условиям теоремы 4.

Таким образом, при выполнении условий (3.9), что, как показывают приближенные расчеты, справедливо, по крайней мере при $a \geqslant 0{,}574$ (при $a \leqslant 0{,}573$ условия (3.9) уже не выполняются), асимптотически устойчиво будет и невозмущенное движение полной системы (3.1) при любом выборе функций $\varphi_1(t, x, y)$, $\varphi_2(t, x, y)$, удовлетворяющих условию (3.2), так при этом выполняются все условия теоремы 4.

Если же обратиться к критерию К. П. Персидского [9], то необходимо выполнение неравенств

$$X_{ij}(t, t_0) < B \exp[\alpha(t - t_0)] \tag{3.11}$$

где $x_{ij}(t, t_0)$ — фундаментальная система решения уравнений (3.3), B, α — положительные постоянные, не зависящие от t_0. Из приближенной оценки выражения (3.11), записанного для уравнений (3.3), т. е. выражения

$$y(t, t_0) = \exp[(t + 1) \sin \ln (t + 1) - 2at - (t_0 + 1) \sin \ln (t_0 + 1) + 2at_0]$$

при

$$2a \leqslant 1{,}39, \quad t + 1 = \exp(2\pi m + \pi/3), \quad t_0 + 1 = \exp(2\pi m + \pi/6)$$

имеем

$$y(t, t_0) \leqslant \exp[0{,}005 \exp(2\pi m + \pi/6)] \tag{3.12}$$

Это означает, что условия теоремы К. П. Персидского не выполняются, так как с возрастанием m правая часть (3.12) неограниченно возрастает. Следовательно, при $2a \leqslant 1{,}39$ не будут выполняться и эквивалентные теоремы И. Г. Малкина [3] и Перрона [8]. Также не выполняется и критерий А. М. Ляпунова [1], так как система (3.1) не является правильной. Условия теоремы И. Г. Малкина [3] можно выполнить при $2a > \sqrt{2}$, так как достаточно взять функцию Ляпунова $V = {}^1/_2\,(x^2 + y^2)$, полная производная которой, составленная в силу уравнений (3.1), будет иметь вид

$$dV/dt = -ax^2 + [\sin \ln (t + 1) + \cos \ln (t + 1) - 2a]\, y^2$$

Таким образом, использование обобщенных теорем позволяет отыскать более широкие границы области устойчивости неустановившихся движений, следовательно, решить некоторые задачи устойчивости неустановившихся движений, которые выпадали из области применения известных теорем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1954, т. 1. 488 с; 1956, т. 2. 473 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.— Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959. 324 с.
6. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968, с. 7—66.
7. *Анапольский Л. Ю., Иртегов В. Д., Матросов В. М.* Способы построения функций Ляпунова.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1975, с. 53—112.
8. *Perron O.* Über eine Matrixtransformation.— Math. Z., 1930, B. 32, H. 3, S. 465—473.
9. *Персидский К. П.* К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений.— Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те, 1936—1937, т. 8, с. 29—45.

Омск

Поступила в редакцию
15.II.1985