Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ И УСРЕДНЕНИЕ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСАМИ

Бурд В. Ш.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых содержат обобщенные функции времени (обобщенные производные функций ограниченной вариации), исследуется вопрос о близости нестационарных решений точных и усредненных уравнений на неограниченном временном интервале. В развитие приема, предложенного в [1], соответствующие утверждения выводятся из одной специальной теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Полученные результаты (в случае уравнений с гладкими коэффициентами более общие, чем утверждения работ [2, 3]) дают возможность обосновать применимость метода усреднения к квазиконсервативным виброударным системам [4].

Отметим, что в [5] (см. также [6]) для системы в стандартной форме с импульсным воздействием исследовался вопрос о соответствии между решениями точных уравнений и стационарными решениями усредненных уравнений.

1. Будем использовать следующие обозначения: R^n — n-мерное евклидово пространство, $|x|$ — норма элемента $x \in R^n$, I — интервал $[0, \infty)$, $B_x(K) = \{x: x \in R^n, |x| \leqslant K\}$, $G = I \times B_x(K)$. В дальнейшем будем рассматривать интегралы вида

$$(1.1) \qquad \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\,du(s), \quad (t_1, t_2) \in J$$

понимаемые как интегралы Лебега — Стилтьеса. Относительно интегрирующей функции $u(t)$ будем говорить, что $u(t) \in BU(J)$, если $u(t)$ — скалярная функция, определенная при $t \in J$, обладающая следующими свойствами:

1) $u(t)$ непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию в каждом компактном подынтервале интервала J;

2) разрывы $t_1 < t_2 < \ldots$ $(t_1 \geqslant t_0 \geqslant 0)$ функции $u(t)$ имеют единственную предельную точку $+\infty$.

В качестве $x(t)$ будут фигурировать функции, определенные на J со значениями в $B_x(K)$, непрерывные справа и имеющие те же точки разрыва первого рода, что и $u(t)$. Тогда, если $f(t, x)$ — определенная на G функция со значениями в R^n, ограниченная по норме, непрерывная по x равномерно относительно t и имеющая по t не более счетного числа точек разрыва первого рода, то интеграл (1.1) существует. Отметим, что в описанных предположениях вместо интеграла Лебега — Стилтьеса можно использовать соответствующее обобщение интеграла Римана —Стилтьеса. В последующем, если вопрос о существовании интеграла (1.1) не будет оговорен особо, будем предполагать, что выполняются перечисленные условия.

Для функции $f(t, x)$, определенной на G и интегрируемой по отношению к $u(t) \in BU(J)$, введем

$$S_x(f) = \sup_{|t_2-t_1|\leqslant 1} \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x)\,du(s) \right|, \quad x \in B_x(K)$$

Лемма 1. Пусть функция $f(t, x)$ определена на G и непрерывна по x равномерно относительно $t \in J$. Пусть непрерывная справа функция $x(t)$ со значениями в $B_x(K)$ является функцией ограниченной вариации в каждом компактном подынтервале J и разрывы у нее в тех же точках, что и у функции $u(t) \in B_x(K)$. Пусть $f(t, x(t))$ интегрируема по $u(t)$. Тогда по любому $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{|t_2-t_1|\leqslant 1} \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, du(s)\right| < \eta, \quad (t_1, t_2) \in [0, T], \quad 0 < T < \infty$$

если $S_x(f) < \varepsilon$.

Доказательство. В силу условий леммы по каждому $\eta > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < \eta/2$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Через $x^0(t)$ обозначим кусочно-постоянную функцию со значениями в $B_x(K)$, для которой $|x(t) - x^0(t)| < \delta$, $t \in [0, T]$, причем в каждом промежутке, длина которого не превышает единицы, функция $x(t)$ принимает не более k различных значений, где число k зависит только от δ. Пусть x_j $(j = 1, \ldots, k)$ — значения $x^0(t)$ в промежутке $|t_2 - t_1| \leqslant 1$. Положим $\varepsilon = \eta/(2k)$. Тогда

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, du(s)\right| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} [f(s, x(s)) - f(s, x^0(s))]\, du(s)\right| +$$

$$+ \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x^0(s))\, du(s)\right| \leqslant \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{k}\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x_j)\, du(s)\right| \leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2k} k = \eta$$

Последнее неравенство справедливо для любых t_1, t_2, удовлетворяющих неравенству $|t_2 - t_1| \leqslant 1$, что и доказывает лемму.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение в R^n в обобщенных функциях

(2.1) $$Dx(t) = X(t, x) + R(t, x)\, Du(t)$$

где функции $X(t, x)$ и $R(t, x)$ определены на G, $u(t) \in BU(J)$, $Dx(t)$ и $Du(t)$ — обобщенные производные функций $x(t)$ и $u(t)$ соответственно. Под решением уравнения (2.1), определенным на промежутке I с левым концом t_0, удовлетворяющим условию $x(t_0) = x_0$, будем понимать функцию $x(t, t_0, x_0)$, которая непрерывна справа, имеет ограниченную вариацию на I и ее обобщенная производная на (t_0, T), $T \in I$ удовлетворяет уравнению (2.1). Известно [7], что функция $x(t)$ — решение уравнения (2.1) на промежутке I, проходящее через (t_0, x_0), тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

(2.2) $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} R(s, x(s))\, du(s), \; t \in I$$

где для каждой непрерывной справа функции ограниченной вариации $x(t)$ на I функция $X(t, x(t))$ интегрируема, а $R(t, x(t))$ интегрируема на I по отношению к $u(t)$, причем второй интеграл рассматривается на интервале $(t_0, t]$. Очевидно, функция $x(t)$ как решение уравнения (2.2) имеет разрывы в тех же точках, что и $u(t)$.

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим невозмущенное обыкновенное дифференциальное уравнение в R^n

(2.3) $$dy/dt = X(t, y)$$

Предполагаем, что уравнение (2.3) имеет решение $\psi(t, t_0, \xi_0)$ $(\psi(t_0, t_0, \xi_0) = \xi_0)$, определенное при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, которое вместе с его некоторой ρ-окрестностью $(\rho > 0)$ содержится в множестве G.

Теорема 1. Пусть функция $X(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x при $x \in B_x(K)$, $t \in J$ с постоянной L, функция $R(t, x)$ непрерывна по x равномерно относительно $t \in J$, решение $\psi(t, t_0, \xi_0)$ уравнения (2.3) равномерно асимптотически устойчиво. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < \rho)$ можно указать такие числа $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon)$, что для всех решений $x(t, t_0, x_0)(x(t_0, t_0, x_0) = x_0)$ уравнения (2.1), определенных при $t \geqslant t_0$ со значениями в $B_x(K)$ и с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $|x_0 - \xi_0| < \eta_1(\varepsilon)$, и для всех $R(t, x)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{|t_2-t_1|\leqslant 1}\left|\int_{t_1}^{t_2} R(t, x)\,du(t)\right| < \eta_2(\varepsilon),\ t_1, t_2 \in J, \quad x \in B_x(K)$$

справедливо при всех $t \geqslant t_0$ неравенство

$$|x(t, t_0, x_0 - \psi(t, t_0, \xi_0)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Доказательство. Воспользуемся схемой рассуждений леммы 6.3 гл. III из [8]. Пусть $y(t, t_0, x_0)$ — решение уравнения (2.3) с тем же начальным условием, что и решение $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (2.1). Из условий теоремы получаем неравенство

$$\Delta(t) = L\int_{t_0}^{t_1}\Delta(s)\,ds + F(t), \quad F(t) = \left|\int_{t_0}^{t} R(s, x(s, t_0, x_0))\,du(s)\right|$$

$$(\Delta(t) = |x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, x_0)|)$$

Известное интегральное неравенство (см., например, [8]) дает

$$\Delta(t) \leqslant F(t) + L\int_{t_0}^{t}\exp(L(t-s))\,F(s)\,ds$$

Отсюда при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ получаем

$$\Delta(t) \leqslant (T+1)(1 + LT\exp(LT))\sup_{|t_2-t_1|\leqslant 1}\left|\int_{t_1}^{t_2} R(s, x(s, t_0, x_0))\,du(s)\right|$$

В силу равномерной асимптотической устойчивости решения $\psi(t, t_0, \xi_0)$ уравнения (2.3) существуют числа $\delta < \varepsilon$ и $T > 0$, такие, что из неравенства $|x_0 - \xi_0| < \delta$ следует

$$|y(t, t_0, x_0) - \psi(t, t_0, \xi_0)| < \varepsilon/2,\ t \geqslant t_0$$

$$|y(t_0 + T, t_0, x_0) - \psi(t_0 + T, t_0, \xi_0)| < \delta/2 \tag{2.5}$$

Из леммы 1 вытекает, что число $\eta_2(\varepsilon)$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta(t) < \delta/2, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \tag{2.6}$$

Тогда

$$|x(t, t_0, x_0) - \psi(t, t_0, \xi_0)| < \varepsilon/2 + \delta/2 < \varepsilon,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$$

Далее, из (2.5) и (2.6) получаем

$$|x(t_0 + T, t_0, x_0) - \psi(t_0 + T, t_0, \xi_0)| < \delta$$

Заключительная часть доказательства теоремы 1 полностью совпадает с заключительной частью доказательства упомянутой леммы 6.3.

Замечания. 1°. В формулировке теоремы предполагалось, что решение $x(t, t_0, x_0)$ определено при $t \geqslant t_0$ и лежит в $B_x(K)$. Если выполнены условия локальной теоремы существования решений для уравнения (2.1) и $S_x(R)$ достаточно мало при $x \in B_x(K)$, то решение $x(t, t_0, x_0)$ с начальным условием, достаточно близким по норме к начальному условию решения $\psi(t, t_0, \xi_0)$ уравнения (2.3), будет определено при всех $t \geqslant t_0$ и не выйдет из шара $B_x(K)$.

2°. Если решение $\psi(t, t_0, \xi_0)$ уравнения (2.3) равномерно асимптотически устойчиво по части переменных $\psi_1, \ldots, \psi_k$ $(k > n)$, то неравенство (2.4) в утверждении теоремы 1 заменяется на неравенство

$$|x_i(t, t_0, x_0) - \psi_i(t, t_0, \xi_0)| < \varepsilon, \; i = 1, \ldots, k$$

3. Применим теорему 1 к задаче об усреднении на неограниченном интервале. Используем следующую схему. Исследуемое уравнение в R^n будет записано в виде

$$Dx(t) = R(t, x, \varepsilon)\, Du(t, \varepsilon) \tag{3.1}$$

где ε — малый положительный параметр, и показано, что справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|t_2 - t_1| \leqslant 1} \left| \int_{t_1}^{t_2} R(s, x, \varepsilon)\, du(s, \varepsilon) - \int_{t_1}^{t_2} X(s, x)\, ds \right| = 0, \quad x \in B_x(K) \tag{3.2}$$

где $X(t, x)$ — правая часть усредненного обыкновенного дифференциального уравнения в R^n. Это позволит получить соответствующие утверждения об усреднении на неограниченном интервале как следствия теоремы 1. Для удобства будем говорить, что правая часть уравнения (3.1) сходится интегрально при $\varepsilon \to 0$ к $X(t, x)$, если имеет место предельное равенство (3.2).

Обратимся сначала к дифференциальному уравнению в R^n быстрым и медленным временем в стандартной форме

$$Dx(t) = \varepsilon X(t, \tau, x, \varepsilon)\, Du(t), \; \tau = \varepsilon t \tag{3.3}$$

где ε — малый положительный параметр, изменяющийся в промежутке $[0, \varepsilon_0]$, функция $X(t, \tau, x, \varepsilon)$ со значениями в R^n определена при $t \in J$, $x \in B_x(K)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $u(t) \in BU(J)$ и, кроме того, $u(t)$ ограничена на J.

Теорема 2. Пусть

1) по каждой из переменных τ, x, ε функция $X(t, \tau, x, \varepsilon)$ непрерывна равномерно относительно остальных переменных;

2) $|X(t, \tau, x, \varepsilon)| \leqslant M < \infty$, $(t, x) \in G$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$;

3) равномерно по $t \in J$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(s, \tau, x, 0)\, du(s) = X(\tau, x), \; (\tau, x) \in G$$

4) функция $X(\tau, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x при $x \in B_x(K)$, $\tau \in J$ с постоянной L и непрерывна по τ равномерно относительно $x \in B_x(K)$;

5) уравнение в R^n

$$dx/d\tau = X(\tau, x) \tag{3.4}$$

имеет равномерно асимптотически устойчивое решение $x = \psi(\tau, t_0, \xi_0)$ $(\psi(\varepsilon t_0, t_0, \xi_0) = \xi_0)$ (равномерно асимптотически устойчивое по части переменных $x_1, \ldots, x_k$ $(k < n)$), которое вместе с его некоторой ρ-окрестностью $(\rho > 0)$ содержится в множестве G.

Тогда для любого α, $0 < \alpha < \rho$ существуют числа $\varepsilon_1(\alpha)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и $\beta(\alpha)$, такие, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ решение $\varphi(t, t_0, x_0)$ уравнения (3.3), определенное при $t \geqslant t_0$ и содержащееся в $B_x(K)$, для которого

$|x_0 - \xi_0| < \beta(\alpha)$, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(\varepsilon t, t_0, \xi_0)| < \alpha \quad t \geqslant t_0$$

$$(|\varphi_i(t, t_0, x_0) - \psi_i(t, t_0, \xi_0)| < \alpha, \ i = 1, \ldots, k)$$

Доказательство. Сделав в уравнении (3.3) замену времени $\tau = \varepsilon t$, получим

$$Dx(\tau) = \varepsilon X(\tau/\varepsilon, \ \tau, x, \ \varepsilon)\, Du(\tau/\varepsilon) \tag{3.5}$$

где для удобства $x(\tau/\varepsilon)$ обозначили снова через $x(\tau)$. Покажем, что правая часть уравнения (3.5) интегрально сходится к функции $X(\tau, x)$, определенной в условии 3) теоремы. Отсюда и из теоремы 1 будет вытекать утверждение теоремы.

Очевидно, в силу непрерывности $X(\tau/\varepsilon, \tau, x, \varepsilon)$ по четвертой переменной, равномерной относительно остальных переменных, достаточно установить, что для любого $\delta > 0$ при достаточно малых ε

$$\Pi(\varepsilon) = \sup_{|t_2 - t_1| \leqslant 1} \left| \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, x, 0\right) du\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, x)\, d\tau \right| < \delta$$

Выберем число $\eta > 0$ так, чтобы при $|\tau_1 - \tau_2| < \eta$ выполнялись неравенства

$$\left| X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau_1, x, 0\right) - X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau_2, x, 0\right) \right| < \frac{\delta}{4},$$

$$|X(\tau_1, x) - X(\tau_2, x)| < \frac{\delta}{4}$$

Пусть $g(\tau)$ — такая кусочно-постоянная функция, определенная на промежутке $[t_1, t_2]$ $(|t_2 - t_1| \leqslant 1)$, что $|\tau - g(\tau)| < \eta$, $\tau \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\Pi(\varepsilon) \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \left[X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, x, 0\right) - X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g(\tau), x, 0\right)\right] du\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right| +$$

$$+ \left| \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, g(\tau), x, 0\right) du\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \int_{t_1}^{t_2} X(g(\tau), x)\, d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_{t_1}^{t_2} [X(g(\tau), x) - X(\tau, x)]\, d\tau \right| < \frac{\delta}{2} + \Lambda$$

$$\Lambda = \left| \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \varepsilon X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau_k, x, 0\right) du\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} X(\tau_k, x)\, d\tau \right] \right|$$

где $t_1 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = t_2$. Осталось показать, что $\Lambda < \delta/(2n)$ при достаточно малых ε. Это следует из предельного равенства $\lim \Lambda = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Последнее вытекает и условия 3) теоремы.

Заметим, что в случае, когда решение $\psi(\varepsilon t, t_0, \xi_0)$ уравнения (3.4) равномерно асимптотически устойчиво по части переменных, нужно воспользоваться замечанием 2° к теореме 1.

4. Изложенный метод позволяет исследовать вопрос о близости решений точных и усредненных уравнений на бесконечном промежутке в системах с быстрыми и медленными переменными. Рассмотрим, например, следующую систему дифференциальных уравнений с быстрой фазой:

$$Dx(t) = \varepsilon X(x, y, \varepsilon)\, Du(y), \quad dy/dt = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon) \tag{4.1}$$

где x — n-мерный вектор, y — скалярная переменная, ε — малый положительный параметр, изменяющийся в промежутке $[0, \varepsilon_0]$, $Dx(t)$, $Du(y)$ — обобщенные производные функций $x(t)$ и $u(y)$. Предполагаем, что функция $X(x, y, \varepsilon)$ со значениями в R^n и скалярная функция $Y(x, y, \varepsilon)$ периодичны по переменной y с периодом 2π, а $u(y)$ — скалярная 2π-периодическая функция ограниченной вариации. В дальнейшем на функции $\omega(x)$ $Y(x, y, \varepsilon)$ накладываются такие условия, что $u(y(t))$ — функция ограниченной вариации.

Теорема 3. Пусть.

1) функции $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ определены при $x \in B_x(K)$, $y \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и непрерывны по переменным x, ε равномерно относительно остальных переменных;

2) функция $\omega(x)$ при $x \in B_x(K)$ удовлетворяет неравенству $\omega(x) \geqslant c > 0$, где c — некоторая постоянная, и условию Липшица по x при $x \in B_x(K)$ с постоянной L;

3) существует постоянная M, такая, что

$$|X(x, y, \varepsilon)| \leqslant M, \; |Y(x, y, \varepsilon)| \leqslant M, \; x \in B_x(K), \; y \in (-\infty, \infty), \; \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

4) функция

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(x, y, 0)\, du(y)$$

удовлетворяет условию Липшица по x при $x \in B_x(K)$ с постоянной L_1;

5) уравнение

$$dx/d\tau = X(x) \tag{4.2}$$

имеет равномерно асимптотически устойчивое решение $x = \psi(\tau, t_0, \xi_0)$, которое принадлежит области $B_x(K)$ вместе с его некоторой ρ-окрестностью ($\rho_* > 0$).

Тогда для любого α, $0 < \alpha < \rho$ существуют числа $\varepsilon_1(\alpha)$ $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ и $\beta(\alpha)$, такие, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ медленные переменные решения системы (4.1), для которого $|x_0 - \xi_0| < \beta(\alpha)$, удовлетворяют неравенству

$$|x(t, t_0, x_0, y_0) - \psi(\varepsilon t, t_0, \xi_0)| < \alpha, \; t \geqslant t_0$$

Доказательство. В системе (4.1) сделаем замены $\tau = \varepsilon t$, $\alpha = \varepsilon y$. Получим систему

$$Dx(\tau) = \varepsilon X\left(x, \frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right) Du\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right), \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = \omega(x) + \varepsilon Y\left(x, \frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \tag{4.3}$$

Из условий 2) и 3) теоремы следует, что при достаточно малых ε функция $\alpha(\tau)$ монотонна и, следовательно, при достаточно малых ε за независимое переменное можно вместо τ принять α. В новом времени система (4.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} Dx(\alpha) &= \varepsilon \frac{1}{\omega(x)} X\left(x, \frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right) Du\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 X_1\left(x, \frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right) Du\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \\ \frac{d\tau}{d\alpha} &= \frac{1}{\omega(x)} + \varepsilon Y_1\left(x, \frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

где функции $X_1(x, \alpha/\varepsilon, \varepsilon)$, $Y_1(x, \alpha/\varepsilon, \varepsilon)$ обладают теми же свойствами, что и соответствующие функции без индекса 1. Видно, что правые части системы (4.4) интегрально сходятся к правым частям системы

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{\omega(x)} X(x), \quad \frac{d\tau}{d\alpha} = \frac{1}{\omega(x)} \tag{4.5}$$

которая во времени τ имеет вид

$$dx/d\tau = X(x), \quad d\alpha/d\tau = \omega(x) \tag{4.6}$$

Решение системы (4.6), соответствующее решению $x = \psi(\tau, t_0, \xi_0)$ уравнения (4.2), очевидно, равномерно асимптотически устойчиво по переменной x и этим же свойством обладает соответствующее решение системы (4.5). Применяя теорему 2 к системе (4.4), получаем утверждение теоремы.

Теорема 3 позволяет обосновать применимость метода усреднения к квазиконсервативным виброударным системам, так как соответствующие системы в работе [4] приводятся к виду (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурд В. Ш.* Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и принцип усреднения на бесконечном промежутке.— В кн.: Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1979, с. 9—14.
2. *Banfi C.* Sull'appressimazione di processi non stazionari in mecanica nonlineare.— Bull. Unione mat. Ital., 1967, v. 22, No. 4, p. 442—450.
3. *Сетна П. Р.* Системы с быстрым и медленным временем.— В кн.: Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев: Изд-во АН УССР, 1970, т. 1, с. 505—521.
4. *Бабицкий В. И., Ковалева А. С., Крупенин В. Л.* Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 41—49.
5. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками.— Математическая физика: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1971, вып. 9, с. 101—117.
6. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев. Наук. думка, 1971. 440 с.
7. *Pandit S. G., Deo S. G.* Differential Systems involving impulses.— In: Lecture Notes in Mathematics. B.: Springer, 1982, v. 954, p. 102.
8. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.

Ярославль

Поступила в редакцию
23.VII.1984