Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Карапетян А. В., Рубановский В. Н.

Рассматривается задача об устойчивости стационарных движений (СД) механических систем, допускающих первые интегралы и невозрастающую вдоль движений функцию. Предлагаются теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных, а также о неустойчивости СД таких систем. Общие положения иллюстрируются на примере о движении тяжелого неоднородного шара по плоскости с трением.

1. Рассмотрим склерономную механическую систему, допускающую не зависящие от времени первые интегралы $U_1(x) = c_1, \ldots, U_k(x) = c_k$ и не зависящую от времени функцию $U_0(x)$, не возрастающую вдоль движений системы.

Предположим, что функции $U_0(x)$, $U_1(x), \ldots, U_k(x)$ непрерывно дифференцируемы по входящим в них переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Этими переменными могут быть все или некоторые обобщенные координаты и скорости или импульсы системы, квазикоординаты, некоторые функции указанных величин и т. п.

Теорема 1. Если не возрастающая вдоль движений системы функция $U_0(x)$ имеет строгий локальный минимум при постоянных значениях интегралов $U_i(x) = c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ этой системы, то значения переменных, доставляющие этой функции минимум, отвечают устойчивому действительному движению системы (это движение обычно называют стационарным).

Теорема 2. Если стационарное движение (СД) доставляет функции $U_0(x)$ строгий локальный минимум и изолировано при постоянных значениях интегралов $U_i(x) = c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ от движений, вдоль которых функция $U_0(x)$ сохраняет постоянное значение, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при $t \to \infty$ стремится к одному из СД системы, отвечающему строгому локальному минимуму функции $U_0(x)$ при возмущенных значениях постоянных интегралов $U_i(x) = c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$; в частности, невозмущенное движение асимптотически устойчиво при невозмущенных значениях постоянных используемых интегралов.

Теорема 3. Если СД не доставляет функции $U_0(x)$ даже нестрогого минимума и изолировано при постоянных значениях интегралов $U_i(x) = c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ от движений, вдоль которых функция $U_0(x)$ сохраняет постоянное значение, то невозмущенное движение неустойчиво.

Приведенные теоремы представляют собой модификацию и дальнейшее развитие теоремы Рауса [1—9]. Теорема 1 может быть доказана почти дословным повторением доказательства теоремы Рауса, данного Сальвадори и Г. К. Пожарицким [5, 6], а теоремы 2 и 3 — почти дословным повторением доказательств теоремы Е. А. Барбашина — Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости [10] и теоремы Н. Н. Красовского о неустойчивости [11] соответственно. Отметим, что теоремы 2 и 3 являются аналогами теорем В. В. Румянцева VI и VII ([12], с. 184—185).

Следует иметь в виду, что теоремы 1 и 2 утверждают об устойчивости СД по отношению, вообще говоря, не ко всем фазовым переменным рассматриваемой системы, а только по отношению к тем из них (или к тем их комбинациям), изменение которых увеличивает значение функции $U_0(x)$ при постоянных значениях интегралов $U_i(x) = c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, т. е. по отношению к части переменных [12].

Отметим, что утверждение теоремы 2 в известной степени аналогично утверждению теоремы Ляпунова—Малкина [13] об устойчивости в особенном случае критического случая нескольких нулевых корней, однако, в отличие от последней, применение теоремы 2 не связано с составлением характеристического уравнения уравнений возмущенного движения и анализом его корней.

Очевидно, теоремы 2 и 3 применимы для изучения устойчивости СД не только склерономных механических систем, но и систем, периодически зависящих от времени, а теорема 1 — для произвольных реономных систем.

2. Уравнения движения тяжелого неоднородного динамически симметричного шара по горизонтальной плоскости с трением скольжения (независимо от гипотезы о характере трения) допускают [14, 15] невозрастающую вдоль всех движений шара функцию

$$U_0 = m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + 2mga\gamma_3 \leqslant 2h = \text{const} \tag{2.1}$$

и два интеграла

$$U_1 = J_1(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) + J_3\omega_3(\gamma_3 + a/\rho) = k = \text{const} \tag{2.2}$$

$$U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2.3}$$

Здесь m — масса шара, J_1 и J_3 — экваториальный и осевой центральные моменты инерции соответственно, g — ускорение свободного падения, $-a$ — координата геометрического центра шара на его оси динамической симметрии, отсчитываемая от центра масс шара (положительное направление оси выбрано таким образом, что $a > 0$), ρ — радиус шара, v_i, ω_i и γ_i $(i = 1, 2, 3)$ — компоненты, соответственно, векторов скорости центра масс шара, его угловой скорости и единичного вектора вертикали в главных центральных осях инерции шара.

Согласно теореме Рауса, СД шара соответствуют критические точки функции (2.1) при постоянных значениях интегралов (2.2) и (2.3), задачу определения которых сведем к задаче об определении критических точек функции

$$V = U_0 - 2\lambda(U_1 - k) + \mu(U_2 - 1) \tag{2.4}$$

где λ и μ — неопределенные множители Лагранжа. Функция V принимает стационарные значения, если переменные v_i, ω_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$, λ и μ удовлетворяют системе уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $\omega_1 = \lambda\gamma_1$, $\omega_2 = \lambda\gamma_2$, $\omega_3 = \lambda(\gamma_3 + a/\rho)$ $(\mu - J_1\lambda^2)\gamma_1 = (\mu - J_1\lambda^2)\gamma_2 = 0$, $(\mu - J_3\lambda^2)\gamma_3 - J_3\lambda^2 a/\rho + mga = 0$.

Эта система имеет три группы решений (соотношения $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, общие для всех этих групп, опущены)

$$\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \omega_3 = \lambda(1 + a/\rho), \quad \gamma_3 = 1 \tag{2.5}$$

$$(\mu = J_3\lambda^2(1 + a/\rho) - mga)$$

(2.6) $\omega_1 = \omega_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \omega_3 = \lambda(-1 + a/\rho), \ \gamma_3 = -1$
$(\mu = J_3\lambda^2(1 - a/\rho) + mga)$

(2.7) $\omega_1 = \lambda\gamma_1, \ \ \omega_2 = \lambda\gamma_2, \ \ \omega_3 = \lambda(\gamma_3 + a/\rho), \ \ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2$
$mga - J_3\lambda^2(\gamma_3 + a/\rho) + J_1\lambda^2\gamma_3 = 0 \ \ (\mu = J_1\lambda^2)$

Параметр λ связан с постоянной k интеграла (2.2), соответственно, соотношениями

(2.5′) $k = J_3\lambda(1 + a/\rho)^2$

(2.6′) $k = J_3\lambda(-1 + a/\rho)^2,$

(2.7′) $k = \dfrac{J_1[J_3(1 - a^2/\rho^2) - J_1]}{J_3 - J_1}\lambda + \dfrac{m^2g^2a^2}{(J_3 - J_1)\lambda^3}$

(предполагается, что $J_1 \neq J_3$).

Решениям (2.5) ((2.6)) отвечают перманентные вращения шара вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии, когда центр масс находится выше (ниже) его геометрического центра; в частности, при $\lambda = 0$ решениям (2.5) и (2.6) отвечают положения равновесия шара.

Решениям (2.7) отвечают регулярные прецессии: шар вращается с угловой скоростью $\lambda a/\rho$ вокруг оси динамической симметрии, прецессирующей с угловой скоростью λ вокруг вертикали, проходящей через центр масс шара и составляющей с осью симметрии постоянный угол, косинус которого равен

(2.8) $\gamma_3 = \alpha + \dfrac{mga}{(J_3 - J_1)\lambda^2}; \quad \alpha = \dfrac{J_3}{J_1 - J_3}\cdot\dfrac{a}{\rho}$

Центр масс шара неподвижен на всех движениях (2.5)—(2.7); точка касания шара с плоскостью неподвижна на движениях (2.5), (2.6), а на движениях (2.7) описывает окружность и на опорной плоскости, и на поверхности шара, причем шар совершает чистое качение.

Очевидно, регулярные прецессии шара существуют не при всех значениях параметра λ, а только при тех из них, для которых из (2.8) следует $|\gamma_3| < 1$.

Наконец, отметим, что из соотношений (2.5′)—(2.7′) с учетом (2.5)—(2.7) следует, что при каждом значении k существует не более четырех СД шара вида (2.5)—(2.7): два перманентных вращения («верхнее» и «нижнее») и не более двух регулярных прецессий (из (2.7′) следует, что одному значению k могут отвечать не более двух различных вещественных значений λ). Все (в общем случае — четыре) СД шара при фиксированном значении k изолированы одно от другого при γ_3, определяемом из (2.8), не равном ± 1, т. е. при

(2.9) $\lambda^2/\lambda_1^2 \neq 1, \ \lambda^2/\lambda_2^2 \neq 1$

$$\lambda_1^2 = \frac{mga}{J_3(1 + a/\rho) - J_1}, \quad \lambda_2^2 = \frac{mga}{J_1 - J_3(1 - a/\rho)}$$

3. При выполнении условия [14, 15]

(3.1) $\lambda^2/\lambda_1^2 > 1$

СД (2.5) доставляет функции (2.1) строгий минимум при постоянных значениях интегралов (2.2) и (2.3) и, следовательно, устойчиво, согласно теореме 1, по отношению к переменным v_i, ω_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$. При условии

(3.2) $\lambda^2/\lambda_1^2 < 1$

СД (2.5) не доставляет функции U_0 даже нестрогого минимума.

Аналогично, при выполнении условия

(3.3) $\lambda^2/\lambda_2^2 < 1$

СД (2.6) доставляет функции (2.1) строгий минимум и, следовательно, устойчиво, а при условии

(3.4) $\lambda^2/\lambda_2^2 > 1$

не доставляет функции U_0 даже нестрогого минимума.

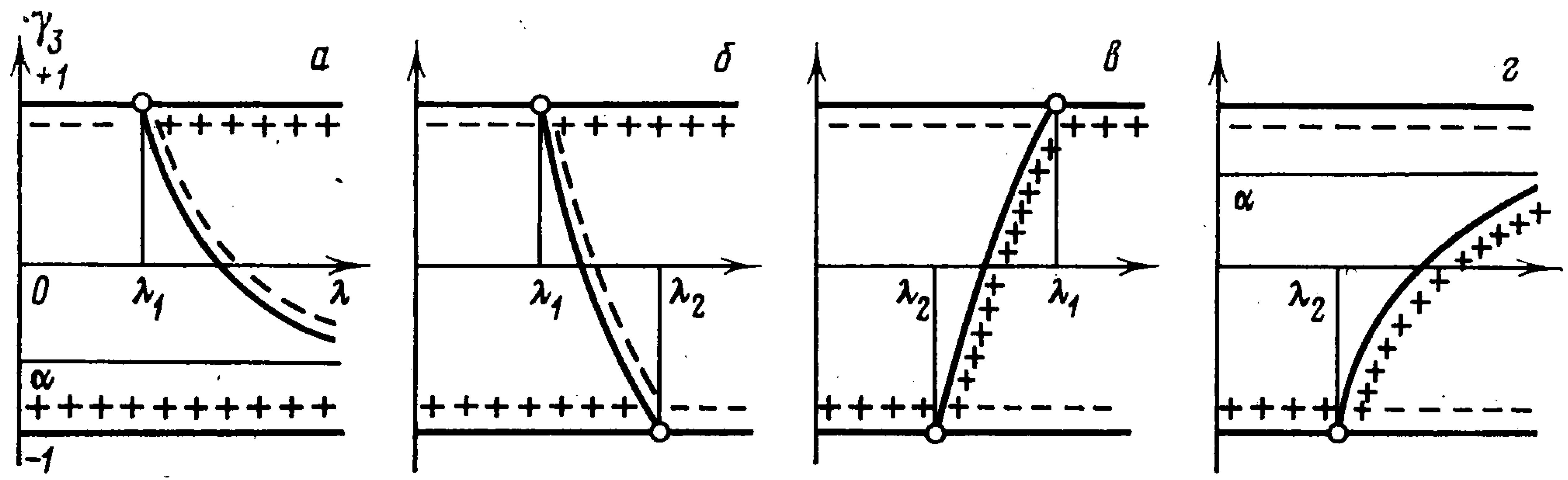
Наконец, при условии

(3.5) $J_1 > J_3$

СД (2.7) доставляет функции (2.1) строгий минимум при постоянных значениях интегралов (2.2) и (2.3) и, следовательно, устойчиво, согласно теореме 1, по отношнию к переменным v_i ($i = 1, 2, 3$), $\omega_j - \lambda\gamma_j$ ($j = 1, 2$), ω_3, γ_3, а при условии

(3.6) $J_1 < J_3$

не доставляет функции U_0 даже нестрогого минимума.



Ниже будет показано, что функция U_0 сохраняет постоянные значения только на СД вида (2.5)—(2.7). Поскольку эти СД изолированы одно от другого при выполнении условий (3.1)—(3.4) (см. (2.9)), то, согласно теоремам 2 и 3, перманентные вращения (2.5) и (2.6) устойчивы, причем асимптотически по отношению к переменным v_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$) и ω_j ($j = 1, 2$), при выполнении условий (3.1) и (3.3) соответственно, и неустойчивы при выполнении условий (3.2) и (3.4) соответственно. Аналогично, регулярные прецессии (2.7) устойчивы, причем асимптотически по отношению к переменным v_i ($i = 1, 2, 3$), $\omega_j - \lambda\gamma_j$ ($j = 1, 2$) и $mga - J_3\lambda\omega_3 + J_1\lambda^2\gamma_3$, при выполнении условия (3.5) и неустойчивы при выполнении условия (3.6).

Другими словами, если на перманентных вращениях центр масс шара находится выше его геометрического центра, то они устойчивы, когда $J_3(\rho + a) - J_1\rho > 0$ ($\lambda_1^2 > 0$) и угловая скорость шара достаточно велика ($\omega_3^2 > \omega_*^2 = \lambda_1^2 (1 + a/\rho)^2$), в противных случаях неустойчивы; если на перманентных вращениях центр масс шара находится ниже его геометрического центра, то они всегда устойчивы при $J_1\rho - J_3(\rho - a) \leqslant 0$ ($\lambda_2^2 \leqslant 0$), а при $J_1\rho - J_3(\rho - a) > 0$ — когда угловая скорость шара достаточно мала ($\omega_3^2 < \omega_{**}^2 = \lambda_2^2 (1 + a/\rho)^2$), в противном случае неустойчивы; регулярные прецессии шара устойчивы (неустойчивы) независимо от величин угловых скоростей прецессии и собственного вращения, если осевой момент инерции шара меньше (больше) экваториального.

Множество СД (2.5)—(2.7) представлено геометрически на полуплоскости $\lambda \geqslant 0$, γ_3 (фигура) (для $\lambda < 0$ бифуркационная диаграмма получается из указанной зеркальным отражением относительно оси γ_3). Перманентным вращениям (2.5), (2.6) и регулярным прецессиям (2.7) отвечают, соответственно, прямолинейные и криволинейные ветви кривой СД. Распределение устойчивых (помечены знаком плюс) и неустойчивых (минус) СД подчиняется законам смены устойчивости при фиксированном значении параметра λ; смена устойчивости происходит только в точках бифуркации. Части фигуры а—г отвечают, соответственно, случаям

а) $J_3(1-a/\rho) \geqslant J_1$, б) $J_3 > J_1 > J_3(1-a/\rho)$.

в) $J_3(1+a/\rho) > J_1 > J_3$, г) $J_3(1+a/\rho) \leqslant J_1$.

Отметим, что в случаях б) и в), как и для волчка «тип-топ», наблюдается эффект потери (соответственно, жесткой и мягкой) устойчивости вращения шара с наинизшим расположением масс при увеличении его угловой скорости, сопровождающийся стабилизацией вращения шара с наивысшим расположением центра масс.

Замечание. В случае вязкого трения скольжения характеристическое уравнение уравнений возмущенного движения шара в окрестности каждого из СД (2.5)—(2.7) имеет вид $p^2 f(p) = 0$. При выполнении условий (3.2), (3.4), (3.6) по крайней мере один корень уравнения $f(p) = 0$ лежит в правой полуплоскости и соответствующие движения неустойчивы. При выполнении условий (3.1), (3.3), (3.5) все корни уравнения $f(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости и, так как выполнены все условия теоремы Ляпунова — Малкина, соответствующие движения устойчивы, причем асимптотически по части переменных [15, 18].

Отметим, что в данной работе аналогичные результаты получены при любом законе трения скольжения.

4. Докажем, что функция U_0 (2.1) действительно сохраняет постоянные значения только на СД вида (2.5)—(2.7).

Очевидно, функция U_0 не убывает только тогда, когда шар катается по плоскости без проскальзывания. При этом необходимо выполняются соотношения

$$v_1 = (\rho\gamma_3 + a)\,\omega_2 - \rho\gamma_2\omega_3, \quad v_2 = -(\rho\gamma_3 + a)\,\omega_1 + \rho\gamma_1\omega_3, \quad v_3 = \rho\,(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1) \tag{4.1}$$

выражающие равенство нулю скорости скольжения шара, а уравнения движения шара можно представить в виде (N — величина нормальной реакции опорной плоскости)

$$v_1^{\cdot} + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = (Nm^{-1} - g)\,\gamma_1, \quad v_2^{\cdot} + \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 = (Nm^{-1} - g)\,\gamma_2; \quad v_3^{\cdot} + \omega_1 v_2 - w_2 v_1 = (Nm^{-1} - g)\,\gamma_3 \tag{4.2}$$

$$J_1\omega_1^{\cdot} + (J_3 - J_1)\,\omega_2\omega_3 = Na\gamma_2, \quad J_1\omega_2^{\cdot} + (J_1 - J_3)\,\omega_3\omega_1 = -Na\gamma_1, \quad J_3\omega_3^{\cdot} = 0 \tag{4.3}$$

$$\gamma_1^{\cdot} + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0, \quad \gamma_2^{\cdot} + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0, \quad \gamma_3^{\cdot} + \omega_1\gamma_2^{\cdot} - \omega_2\gamma_1 = 0. \tag{4.4}$$

Кроме того, выполняются соотношения (2.2), (2.3) и

$$J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J_3\omega_3^2 + 2mga\gamma_3 = 2h = \mathrm{const} \tag{4.5}$$

Дифференцируя первые два соотношения (4.1) по времени и исключая $\omega_i^{\cdot}$ и $\gamma_i^{\cdot}$ $(i = 1, 2, 3)$ при помощи уравнений (4.3) и (4.4), подставим полученные выражения и соотношения (4.1) в первые два уравнения (4.2)

$$Nm^{-1}A\gamma_j = J_1 g\gamma_j + B\rho\omega_3\omega_j \quad (j = 1, 2)$$
$$A = J_1 + ma\,(\rho\gamma_3 + a), \quad B = J_3(\gamma_3 + a/\rho) - J_1\gamma_3 \tag{4.6}$$

Умножая первое соотношение (4.6) на γ_2, второе на $-\gamma_1$ и почленно их складывая, получим $B\rho\omega_3(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1) = 0$ (если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то движения, удовлетворяющие (4.5), — только перманентные вращения).

Отсюда следует, что либо $\omega_3 = 0$, либо

(4.7) $\qquad \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0$

(если $B = 0$, то $\gamma_3 = \alpha = \mathrm{const}$ и из (4.4) опять следует (4.7)).

Предположим сначала, что $\omega_3 = 0$. Тогда из (4.6) и (4.3) получим соотношения

(4.8) $\qquad A\omega_1^{\cdot} = mga\gamma_2, \quad A\omega_2^{\cdot} = -mga\gamma_1$

а из тождества (4.5), дифференцируя его по времени и учитывая (4.8),— соотношение

(4.9) $\qquad A\gamma_3^{\cdot} = J_1(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2)$

Сравнивая (4.9) и (4.4), заключаем, что $\omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 = 0$, т. е. чистые качения шара возможны только при выполнении условия (4.7).

При этом (см. (4.1) и (4.3)) необходимо выполняются соотношения

(4.10)
$$\omega_1 = \lambda\gamma_1, \quad \omega_2 = \lambda\gamma_2, \quad \omega_3 = \mathrm{const}, \quad \gamma_3 = \mathrm{const}, \quad v_3 = 0,$$
$$v_1 = w\gamma_2, \quad v_2 = -w\gamma_1; \quad w = (\rho\gamma_3 + a)\lambda - \rho\omega_3$$

причем $\lambda = \mathrm{const}$, что вытекает из (2.2). Подставляя (4.10) в (4.2), получим

$$(N - mg)\gamma_i = mw\lambda\gamma_3\gamma_i \quad (i = 1,\ 2)$$
$$(N - mg)\gamma_3 = -mw\lambda(1 - \gamma_3^2).$$

Умножая последние соотношения, соответственно, на γ_1, γ_2, γ_3 и почленно их складывая, получим $N = mg$, т. е.

$$[(\rho\gamma_3 + a)\lambda - \rho\omega_3]\lambda(1 - \gamma_3^2) = 0,$$

откуда следует, что чистые качения шара возможны только на СД вида (2.5)—(2.7).

Отметим, что аналогичный вывод следует также из результатов работы [19], посвященной описанию предельных движений тяжелого твердого тела на плоскости с вязким трением скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steadly motion. L.: McMillan, 1877. 108 p.
2. *Routh E. J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
3. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков, 1888. 54 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892. 250 с.
5. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilita del Routh.— Rend. Accad. sci. fis. e math. Soc. naz. sci. lett. ed arti. Napoli, 1953, v. 20, No. 1—12, p. 269—272.
6. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 145—154.
7. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
8. *Рубановский В. Н.*, *Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5, с. 904—912.
9. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений.— Теор. и прикл. механ., 1974, т. 5, № 1, с. 67—79.
10. *Барбашин Е. А.*, *Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом.— Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3, с. 453—456.
11. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

12. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965, 439 с.
13. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
14. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778—784.
15. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 11—21.
16. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42—51.
17. *Карапетян А. В.* О регулярной прецессии тела вращения на горизонтальной плоскости с трением.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 568—572.
18. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем.— В кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983, т. 6, с. 3—128.
19. *Мощук Н. К.* О движении тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости с вязким трением.— ПММ, 1985, т. 49, вып. 1, с. 66—71.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1985