Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 531.36

ОБ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Сумбатов А. С.

В касательном расслоении конфигурационного многообразия механической системы рассматриваются подмногообразия ее траекторий, задаваемые в локальных координатах уравнениями, линейными и однородными относительно обобщенных скоростей. В конструктивной форме устанавливаются локальные условия существования некоторых таких подмногообразий. Полученные результаты иллюстрируются на примерах из динамики твердого тела.

1. Пусть $q \in \mathrm{R}^n$ — лагранжевы координаты голономной механической системы, $T = {}^1/_2\,(a\,(q)\,q^{\cdot}, q^{\cdot})$ — ее кинетическая энергия, $F\,(q) \in \mathrm{R}^n$ — обобщенная сила. Уравнения движения можно записать в виде, разрешенном относительно ускорений

$$q^{\cdot\cdot} = -(\Gamma q^{\cdot}, q^{\cdot}) + F \tag{1.1}$$

или, когда задано поле скоростей $q^{\cdot} = f\,(q)$

$$(f, \nabla)\, f = F \tag{1.2}$$

Здесь $\Gamma\,(q)$ — объект связности [1], ∇ — символ ковариантного дифференцирования, $(\xi, \eta) = \xi_i \eta^i$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Определение. Соотношения

$$\varphi_1\,(q, q^{\cdot}) = 0, \ldots, \varphi_m\,(q, q^{\cdot}) = 0 \quad (m \leqslant 2n) \tag{1.3}$$
$$\operatorname{rank} \|\, \partial\varphi/\partial q, \quad \partial\varphi/\partial q^{\cdot} \,\| = m$$

образуют в некоторой области изменения переменных q, $q^{\cdot}$ инвариантную совокупность для системы дифференциальных уравнений $q^{\cdot\cdot} = G\,(q, q^{\cdot}) \in \mathrm{R}^n$, если при каждом $\alpha = 1, \ldots, m$ выражение

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q}, q^{\cdot}\right) + \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial q^{\cdot}}, G\right)$$

имеет вид ($\varkappa_{\alpha\beta}$ — непрерывные функции)

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} \equiv \sum_{\beta=1}^{m} \varkappa_{\alpha\beta}\,(q, q^{\cdot})\,\varphi_\beta \tag{1.4}$$

В касательном расслоении TM конфигурационного многообразия M механической системы уравнения (1.3) задают локально некоторое подмногообразие. При условиях (1.4) интегральная кривая уравнений движения, имеющая общую с этим подмногообразием точку, лежит на нем, т. е. данное подмногообразие интегральное.

Рассмотрим вопрос о существовании для уравнений (1.1) совокупности инвариантных соотношений вида

$$\langle \lambda_{n-m+1}, q^{\cdot} \rangle = 0, \ldots, \langle \lambda_n, q^{\cdot} \rangle = 0 \quad (m \leqslant n - 1) \tag{1.5}$$

где векторы $\{\lambda_\alpha\,(q)\}$ линейно независимы в каждой точке, $\langle \xi, \eta \rangle = (a\xi, \eta)$. При этом ограничимся изучением двух крайних случаев: $m = n - 1$ и $m = 1$.

Теорема 1. Пусть $F \neq 0$. Совокупность $(n-1)$-го инвариантных соотношений (1.5) существует тогда и только тогда, когда силовые линии являются геодезическими риманового многообразия $(M, \langle\ ,\ \rangle)$. При $F \equiv 0$ система имеет ∞^n таких инвариантных совокупностей.

Эта теорема является следствием доказанной ниже теоремы 3. Для $n = 2$ она содержится в [2].

В случае $F = \operatorname{grad} U(q)$ условие теоремы аналитически записывается в виде [1]

$$\partial_1 (\Delta_1 U)/\partial_1 U = \ldots = \partial_n (\Delta_1 U)/\partial_n U \tag{1.6}$$

$$\Delta_1 U = (\operatorname{grad} U,\ a^{-1} \operatorname{grad} U), \qquad \partial_i = \partial/\partial q^i$$

Отметим, что при наличии в голономной системе $(n-2)$ линейных первых интегралов (общих) теорема 1 дает необходимое условие существования еще одного линейного интеграла или одиночного инвариантного соотношения $\langle \lambda_n (q), q^{\cdot} \rangle = 0$:

$$d/dt \langle \lambda_n, q^{\cdot} \rangle = \varkappa (q, q^{\cdot}) \langle \lambda_n, q^{\cdot} \rangle \tag{1.7}$$

Пример 1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки в силовом поле

$$U = xu + yv + zw + {}^1/_2 \varepsilon (Au^2 + Bv^2 + Cw^2)$$

являющимся суперпозицией однородного поля тяжести и поля Бруна [3]. Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела для неподвижной точки, (x, y, z) и (u, v, w) — координаты в главных осях, соответственно, центра масс тела и единичного вектора вертикали, ε — постоянный параметр.

Имеем

$$\Delta_1 U = a [yw - zv + \varepsilon (B - C) vw]^2 + b [zu - xw + \varepsilon (C - A) uw]^2 + \\ + c [xv - yu + \varepsilon (A - B) uv]^2$$

$(a = A^{-1}, b = B^{-1}, c = C^{-1})$. Условие (1.6) примет вид

$$\partial_1 U \partial_2 (\Delta_1 U) - \partial_2 U \partial_1 (\Delta_1 U) = 0 \tag{1.8}$$

где q^1, q^2 — какие-нибудь две из трех величин u, v, w, а третья величина заменена в U и $\Delta_1 U$ выражением $\pm[1 - (q^1)^2 - (q^2)^2]^{1/2}$.

Положив $q^1 = u$, $q^2 = v$, найдем из (1.8) при $u = v = 0$, $w = 1$ и $w = -1$, соответственно

$$xy (b - a) [z + \varepsilon (C - A - B)] = 0, \quad xy (b - a) [z - \varepsilon (C - A - B)] = 0$$

откуда следует, что центр масс тела лежит в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки.

Пусть, например, $x = 0$. В качестве обобщенных координат тела удобно взять $q^1 = v$, $q^2 = w$ и угол прецессии. Условие (1.8) имеет вид равенства нулю многочлена по степеням v, w

$$[yw - zv + \varepsilon (B - C) vw] [(a - c) y^2 + (a - b) z^2 + \\ + (\varepsilon v)^2 (c - a) (B - A) (A + C - B) + (\varepsilon w)^2 (b - a) (C - A) (A + \\ + B - C) + yv\varepsilon (c - a) (C + 2A - B) + zw\varepsilon (b - a) (B + 2A - C)] + \\ + [\varepsilon [y + \varepsilon (B - A) v] [z + \varepsilon (C - A) w] (b - c) (B + C - A) (1 - v^2 - w^2) = 0$$

Следовательно, все его коэффициенты должны равняться нулю. Несложный анализ этих тождеств показывает, что при $\varepsilon \neq 0$ это возможно только, когда тело динамически симметрично, а при $\varepsilon = 0$ еще в двух случаях: $x = y = z = 0$ (случай Эйлера), $B (C - A) y^2 = C (A - B) z^2$, $C < A < B$ или $C > A > B$ (случай Гесса). Только в указанных случаях существуют многообразия траекторий, задаваемые локально двумя уравнениями вида (1.5).

2. Рассмотрим условия, при которых уравнения (1.1) допускают одиночные инвариантное соотношение $\langle \lambda_n (q), q^{\cdot} \rangle = 0$. Не нарушая общности, полагаем, что вектор $\lambda_n = (\lambda_{n|}{}^1, \ldots, \lambda_{n|}{}^n)$ нормирован, т. е. $\langle \lambda_n, \lambda_n \rangle = 1$.

Наряду с векторным полем $\lambda_n (q)$ можно ввести дополнительно векторные поля $\lambda_1 (q), \ldots, \lambda_{n-1} (q)$ так, что в каждой точке $q \in M$ векторы

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ образуют ортогональный n-эдр [2] $\langle\lambda_i, \lambda_j\rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Напомним обозначение [2]

$$\gamma_{hkl} = \langle(\lambda_l, \nabla)\, \lambda_h, \lambda_k\rangle \qquad (h, k, l = 1, \ldots, n)$$

Инварианты γ_{hkl} кососимметричны по первым двум индексам: $\gamma_{hkl} = -\gamma_{khl}$. Независимые из этих инвариантов определяют компоненты угловой скорости вращения n-эдра при движении его начала вдоль интегральных линий векторных полей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и называются коэффициентами вращения Дарбу — Риччи.

Из равенства (1.7) при учете (1.1) получаем

$$(2.1) \qquad \langle(q^{\cdot}, \nabla)\, \lambda_n, q^{\cdot}\rangle + \langle\lambda_n, F\rangle = \varkappa\, \langle\lambda_n, q^{\cdot}\rangle$$

откуда следует, что множитель $\varkappa$ может быть только вида $\langle\nu\,(q), q^{\cdot}\rangle$. Тождество (2.1) приводит тогда к уравнениям

$$(2.2) \qquad \langle\lambda_n, F\rangle = 0$$

$$(2.3) \qquad \nabla_s\lambda_{n/r} + \nabla_r\lambda_{n/s} = \nu_r\lambda_{n/s} + \nu_s\lambda_{n/r} \qquad (r, s = 1, \ldots, n)$$

Умножая (2.3) последовательно на $\lambda_{i|}{}^r\lambda_{j|}{}^s$ и свертывая по индексам r, s, получим эквивалентные уравнения в инвариантной форме

$$(2.4) \qquad \gamma_{nij} + \gamma_{nji} = \delta_{jn}\sigma_i + \delta_{in}\sigma_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

где неизвестные ν_l заменены $\sigma_i = \langle\nu, \lambda_i\rangle$.

Анализ этих уравнений в общем виде затруднителен. Случай $n = 2$ разобран в [2].

Рассмотрим случай $n = 3$ при условии, что $F \neq 0$ в некоторой области $D \subseteq M$. Уравнения (2.2) и (2.4) дают

$$(2.5) \qquad \gamma_{311} = \gamma_{322} = 0, \qquad \gamma_{321} + \gamma_{312} = 0, \qquad \langle\lambda_3, F\rangle = 0$$

Из остальных трех уравнений (2.4) определяются неизвестные σ_1, σ_2, σ_3.

Согласно последнему равенству (2.5), выберем $\lambda_1 = F/\langle F, F\rangle^{1/2}$. Тогда вектор кривизны $\tau = (\lambda_1, \nabla)\, \lambda_1 = \rho\lambda_2$. Действительно, из (2.5) имеем

$$\langle\lambda_3, \tau\rangle = \gamma_{311} + \langle\lambda_3, \tau\rangle = (\lambda_1, \nabla)\, \langle\lambda_3, \lambda_1\rangle = 0$$

Если $\rho \equiv 0$, то силовые линии являются геодезическими и существует совокупность двух инвариантных соотношений вида (1.5). Этот случай рассмотрен в п. 1. Пусть $\rho \neq 0$, тогда векторные поля λ_2 и λ_3 взаимно ортогональны, что и требуется.

Итак, в каждой точке области $D \subseteq M$, в которой кривизна силовой линии отлична от нуля, можно ввести указанным способом ортогональный триэдр $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_1 \times \lambda_2$. Назовем его K-триэдром.

Теорема 2. В открытой области на конфигурационном многообразии, в точках которой определен K-триэдр, одиночное инвариантное однородное линейное соотношение голономной системы существует тогда и только тогда, когда коэффициенты вращения триэдра удовлетворяют условиям

$$(2.6) \qquad \gamma_{322} = 0, \qquad \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$$

При этом инвариантное соотношение имеет вид

$$\det \| F, \eta, q^{\cdot} \| = 0 \qquad (\eta = (F, \nabla)\, F)$$

Условия (2.6) имеют ясный геометрический смысл. Первое равенство (2.6) означает, что вектор кривизны интегральных линий поля λ_2 ортогонален вектору λ_3. Второе равенство (2.6) показывает, что интегральные кривые полей λ_1, λ_2 образуют совокупность, каноническую (в смысле [2]) относительно интегральных кривых поля λ_3. Известно [4], что оба этих условия необходимы для того, чтобы интегральные кривые поля λ_3 были траекториями группы движений риманового многообразия $(M, \langle\ ,\rangle)$ системы.

Пусть $n > 1$ — произвольное натуральное число, а правые части уравнений движения (1.1) содержат кроме позиционных сил $F(q)$ еще гироскопические силы $\Omega q^{\cdot}$, где $\Omega(q)$ — произвольный двухвалентный кососимметричный тензор.

Для существования совокупности инвариантных соотношений (1.5) при $m = n - 1$ и $m = 1$ необходимо, чтобы

(2.7) $$\Omega\lambda_p = 0, \quad p = n - m\delta_{n-1, m}$$

Действительно, вычислив полную производную соотношений (1.5) по времени вдоль траекторий системы, получим

(2,8) $$\langle (q^{\cdot}, \nabla)\lambda_\alpha, q^{\cdot}\rangle + \langle \lambda_\alpha, \Omega q^{\cdot} + F\rangle = \sum_{\beta=l+1}^{n} \varkappa_{\alpha\beta}\langle\lambda_\beta, q^{\cdot}\rangle$$
$$(l = n - m;\ \alpha = l + 1, \ldots, n)$$

Следовательно, множители $\varkappa_{\alpha\beta}$ могут быть только вида $\langle \nu_{\alpha\beta}(q), q^{\cdot}\rangle - \xi_{\alpha\beta}(q)$. Поэтому тождества (2.8) дают, в частности

$$\Omega\lambda_\alpha = \sum_{\beta=l+1}^{n} \xi_{\alpha\beta}\lambda_\beta \quad (\alpha = l + 1, \ldots, n)$$

или в эквивалентной форме (векторы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ составляют ортогональный n-эдр)

$$\langle \Omega\lambda_\alpha, \lambda_i\rangle = \sum_{\beta=l+1}^{n} \xi_{\alpha\beta}\delta_{\beta i} \quad (\alpha = l + 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, n)$$

откуда вытекают условия (2.7).

Как следствия получаем:

а) в системах с двумя степенями свободы при $\Omega \neq 0$ не существует инвариантных соотношений рассматриваемого вида;

б) при $F \neq 0$ утверждение теоремы 1, дополненное условием $\Omega F = 0$, остается справедливым;

в) так как произвольной кососимметричной 3×3 матрице Ω соответствует [1] определенный псевдовектор ω, то в системах с тремя степенями свободы при $\Omega \neq 0$ искомое инвариантное соотношение может быть только вида $\langle \omega, q^{\cdot}\rangle = 0$.

3. Рассмотрим неголономные стационарные системы с идеальными линейными связями (1.5). Не нарушая общности, векторы $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ считаем единичными и взаимно ортогональными в метрике, определяемой кинетической энергией системы. Уравнения движения запишем в форме с множителями μ_α связей

(3.1) $$q^{\cdot\cdot} = -(\Gamma q^{\cdot}, q^{\cdot}) + F + \sum_{\alpha=l+1}^{n} \mu_\alpha\lambda_\alpha$$

Из уравнений (1.5), (3.1) находим

$$\mu_\alpha = -\langle (q^{\cdot}, \nabla)\lambda_\alpha, q^{\cdot}\rangle - \langle \lambda_\alpha, F\rangle \quad (\alpha = l + 1, \ldots, n)$$

Подстановка полученных выражений в (3.1) приводит уравнения движения к виду

(3.2) $$q^{\cdot\cdot} = -(\Gamma q^{\cdot}, q^{\cdot}) - \sum_{\alpha=l+1}^{n} \lambda_\alpha\langle R_\alpha q^{\cdot}, q^{\cdot}\rangle + Q$$

$$R_\alpha = \| \nabla_s\lambda_{\alpha/r} \|, \quad Q = F - \sum_{\alpha=l+1}^{n} \lambda_\alpha\langle\lambda_\alpha, F\rangle$$

Каждый слой T_qM можно разложить в прямую сумму двух линейных векторных подпространств, одно из которых $X_m(q)$ натянуто на векторы $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Второе подпространство $Y_l(q)$ имеет размерность l, равную числу степеней свободы системы. Назовем его подпространством возможных скоростей для данной точки $q \in M$. Позиционная сила $Q(q) \in \mathbf{R}^n$ в правой части (3.2) является проекцией приложенной силы $F(q)$ на подпространство $Y_l(q)$. Составляющая силы F, равная $F - Q$, «гасится» реакцией идеальных связей (1.3). Сумма в правой части (3.2) — это реакция связей, когда на систему не действуют внешние активные силы.

Отметим, что соотношения (1.5) — первые интегралы уравнений (3.2) с нулевыми значениями постоянных интегрирования. Рассмотрим условия существования для уравнений (3.2) дополнительно k инвариантных соотношений вида

$$(3.3) \qquad \langle\lambda_{l-k+1}, \dot q\rangle = 0, \ldots, \langle\lambda_l, \dot q\rangle = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant l-1)$$

где векторы $\lambda_{l-k+1}(q), \ldots, \lambda_l(q)$ линейно независимы в точках $q \in M$. Не нарушая общности, можно считать, что векторы $\lambda_{l-k+1}, \ldots, \lambda_l$, $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ единичные и взаимно ортогональные. Выбрав соответствующим образом еще $l-k$ регулярных векторных полей $\lambda_1(q), \ldots, \lambda_{l-k}(q)$, будем иметь семейство ортогональных n-эдров в точках $q \in M$.

Согласно определению п. 1, соотношения (1.5), (3.3) составляют инвариантную совокупность для рассматриваемой неголономной системы, если

$$(3.4) \qquad \frac{d}{dt}\langle\lambda_\alpha, \dot q\rangle \equiv \sum_{\beta=l-k+1}^{n} \varkappa_{\alpha\beta}(q, \dot q)\langle\lambda_\beta, \dot q\rangle \quad (\alpha = l-k+1, \ldots, l)$$

причем обобщенные ускорения в левых частях заменены по формулам (3.2).

Из тождеств (3.4) следует

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \langle\nu_{\alpha\beta}(q), \dot q\rangle$$

$$(3.5) \qquad \nabla_s\lambda_{\alpha/r} + \nabla_r\lambda_{\alpha/s} = \sum_{\beta=l-k+1}^{n} (\nu_{\alpha\beta/s}\lambda_{\beta/r} + \nu_{\alpha\beta/r}\lambda_{\beta/s})$$

$$(3.6) \qquad \langle\lambda_\alpha, Q\rangle = 0 \quad (\alpha = l-k+1, \ldots, l;\ r, s = 1, \ldots, n)$$

Умножая (3.5) последовательно на $\lambda_{i|}{}^r\lambda_{j|}{}^s$ и свертывая по индексам r, s, получим в инвариантной форме уравнения

$$(3.7) \qquad \gamma_{\alpha ij} + \gamma_{\alpha ji} = \sum_{\beta=l-k+1}^{n} (\sigma_{\alpha\beta i}\delta_{\beta j} + \sigma_{\alpha\beta j}\delta_{\beta i})$$
$$(\alpha = l-k+1, \ldots, l;\ i, j = 1, \ldots, n)$$

эквивалентные уравнениям (3.5). В формулах (3.7) неизвестные векторы $\nu_{\alpha\beta}$ заменены скалярами $\sigma_{\alpha\beta i} = \langle\nu_{\alpha\beta}, \lambda_i\rangle$.

Далее рассмотрим частные случаи:

1) $k = l-1$, $l > 1$ — произвольное натуральное число;

2) $k = 1$, $l = 3$, $Q \neq 0$ в некоторой области $D \subseteq M$.

В первом случае уравнения (3.7) дают

$$(3.8) \qquad \gamma_{211} = \ldots = \gamma_{l11} = 0$$

Остальные уравнения (3.7), рассматриваемые как алгебраические с неизвестными $\sigma_{\alpha\beta i}$, очевидно, линейно независимы.

Кроме того, из условий (3.6) следует, что векторные поля λ_1 и Q коллинеарны.

С учетом геометрического смысла условий (3.8) формулируется

Теорема 3. Пусть $Q \neq 0$ в некоторой области $D \subseteq M$. Неголономная система с $n - m > 1$ степенями свободы, стесненная идеальными линейными связями, обладает в области D инвариантной совокупностью $n - 1$ соотношений, линейных и однородных относительно скоростей, тогда и только тогда, когда в каждой точке $q \in D$ вектор кривизны $\tau(q)$ интегральной кривой поля Q, которая проходит через эту точку, ортогонален подпространству возможных скоростей $Y_{n-m}(q)$. При $Q \equiv 0$ такую инвариантную совокупность всегда имеют системы с двумя степенями свободы.

Последнее утверждение теоремы очевидно, поскольку ее единственному условию $\gamma_{211} = 0$ можно удовлетворить соответствующим выбором функции $\varphi(q)$ в выражении для $\lambda_1 = e_1(q) \cos \varphi + e_2(q) \sin \varphi$, где векторы e_1, e_2 образуют в каждой точке $q \in D$ какой-либо ортогональный базис подпространства $Y_2(q)$.

Отметим, что когда уравнения (1.5) связей вполне интегрируемы, из теоремы 3 следует теорема 1. Это вытекает из определения [1] геодезической линии подмногообразия, лежащего в римановом многообразии системы.

Рассмотрим случай $k = 1$, $l = 3$. Уравнения (3.7) дают $\gamma_{311} = \gamma_{322} = 0$, $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$. Остальные уравнения (3.7) служат для определения неизвестных $\sigma_{\alpha\beta i}$.

Положим $\lambda_1 = Q/\langle Q, Q\rangle^{1/2}$. Вектор кривизны

$$(\lambda_1, \nabla)\, \lambda_1 = x(q) + y(q) \quad (x \in X_{n-3},\ y \in Y_3)$$

Когда $y(q) \equiv 0$, неголономная система имеет два соотношения вида (3.3), которые вместе с уравнениями связей составляют инвариантную совокупность (теорема 3).

Пусть $y(q) \neq 0$ в некоторой области $D_1 \subseteq D$. Тогда, присоединив к заданным векторным полям $\lambda_4, \ldots, \lambda_n$ уравнений связей (1.5) еще три векторных поля

$$\lambda_1, \lambda_2 = y/\langle y, y\rangle^{1/2}, \quad \lambda_3 = (\varepsilon^{ij\ldots rsp}\lambda_{4/j} \ldots \lambda_{n/r}\lambda_{1/s}\lambda_{2/p})$$

(ε — n-валентный фундаментальный тензор Риччи и Леви-Чивиты [5]), получим в каждой точке $q \in D_1$ ортогональный n-эдр, который назовем ключевым. При этом условия (3.6) и $\gamma_{311} = 0$ удовлетворяются автоматически:

$$\langle Q, \lambda_3\rangle = 0, \ \gamma_{311} = -\langle(\lambda_1, \nabla)\, \lambda_1, \lambda_3\rangle = -\langle x + y, \lambda_3\rangle = 0$$

Теорема 4. В открытой области на конфигурационном n-мерном многообразии, в точках которой определен ключевой ортогональный n-эдр, неголономная система с тремя степенями свободы и связями (1.5) обладает инвариантной совокупностью $(n - 2)$ однородных линейных по скоростям соотношений тогда и только тогда, когда коэффициенты вращения n-эдра удовлетворяют условиям

$$\gamma_{322} = 0, \quad \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 \tag{3.9}$$

Эту совокупность составляют равенства (1.5) и соотношение

$$\det \| Q, \eta, \lambda_4, \ldots, \lambda_n, \dot{q} \| = 0 \quad (\eta = (Q, \nabla)\, Q)$$

4. Как отмечалось, каждое частное решение дифференциальных уравнений (3.2) ложится на подмногообразие, задаваемое уравнениями $\langle\lambda_{l+1}, \dot{q}\rangle = c_{l+1}, \ldots, \langle\lambda_n, \dot{q}\rangle = c_n$, где $c_{l+1}, \ldots, c_n$ — постоянные, $l = n - m$. Однако действительным движениям системы отвечают только те решения,

которые заполняют подмногообразие (1.5). Поэтому при определении всего множества движений механической системы со связями (1.5) следует искать не первые интегралы уравнений (3.2), а соотношения $\varphi(q, q^\cdot) = \mathrm{const}$, для которых производная

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}, q^\cdot\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q^\cdot}, -(\Gamma q^\cdot, q^\cdot) - \sum_{\alpha=l+1}^{n} \lambda_\alpha \langle R_\alpha q^\cdot, q^\cdot\rangle + Q\right)$$

имеет вид ($\varkappa_\alpha$ — какие-нибудь непрерывные функции)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{\alpha=l+1}^{n} \varkappa_\alpha(q, q^\cdot)\langle\lambda_\alpha, q^\cdot\rangle \tag{4.1}$$

Может случиться, что соотношению $\langle\lambda_l, q^\cdot\rangle = 0$, образующему с равенствами (1.5) инвариантную совокупность (в смысле определения п. 1) для уравнений движения (3.2), отвечает соотношение

$$\rho(q)\langle\lambda_l, q^\cdot\rangle = \mathrm{const} \qquad (\rho \neq 0)$$

указанной выше природы. Тогда, подставив в (4.1) $\varphi = \rho\langle\lambda_l, q^\cdot\rangle$, найдем, как и в п. 3, что

$$\varkappa_\beta = \langle\nu_\beta(q), q^\cdot\rangle \qquad (\beta = l+1, \ldots, n)$$

$$\langle\mathrm{grad}\,\rho, \lambda_i\rangle\delta_{lj} + \langle\mathrm{grad}\,\rho, \lambda_j\rangle\delta_{li} + \rho(\gamma_{lij} + \gamma_{lji}) = \sum_{\beta=l+1}^{n}(\sigma_{\beta i}\delta_{\beta j} + \sigma_{\beta j}\delta_{\beta i}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

$$\langle\lambda_l, Q\rangle = 0 \tag{4.3}$$

Равенства (4.2) при $i, j = 1, \ldots, l-1$, а также (4.3) выполняются автоматически, поскольку по условию соотношение $\langle\lambda_l, q^\cdot\rangle = 0$ составляет с (1.5) инвариантную совокупность. Равенства (4.2) при $i = 1, \ldots, n$; $j = l+1, \ldots, n$ служат для нахождения неизвестных скаляров $\sigma_{\beta i} = \langle\nu_\beta, \lambda_i\rangle$. Остаются уравнения ($\theta = \ln\rho^{-1}$)

$$\langle\mathrm{grad}\,\theta, \lambda_\alpha\rangle = \gamma_{l\alpha l} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l) \tag{4.4}$$

которые следуют из (4.2) при $i = 1, \ldots, l$; $j = l$.

Уравнения (4.4) имеют первый порядок относительно неизвестной функции $\theta(q)$. Совместность таких уравнений исследуется обычным методом [6].

Итак, доказано утверждение: для существования в области $D \subseteq M$ ненулевого векторного поля $\xi(q) \in Y_l(q)$, такого, что любое частное решение $q(t) \in D$ уравнений (3.2), отвечающее действительному движению системы, удовлетворяет в области D соотношению

$$\langle\xi, q^\cdot\rangle = \langle\xi, q^\cdot\rangle|_{t=t_0}$$

необходимо и достаточно, чтобы уравнения связей (1.5) и $\langle\lambda_l, q^\cdot\rangle = 0$ ($\lambda_l = \xi/\langle\xi, \xi\rangle^{1/2}$) для уравнений (3.2) составляли инвариантную совокупность в смысле определения п. 1 и система уравнений (4.4) была совместна относительно функции $\theta = -\frac{1}{2}\ln\langle\xi, \xi\rangle$.

Отметим, что правые части (4.4) являются компонентами проекции вектора кривизны $\tau_l = \gamma_{lil}\lambda_i$ интегральной линии поля λ_l на подпространство возможных скоростей.

В случае голономных систем с n степенями свободы одиночному инвариантному соотношению $\langle\lambda_n, q^\cdot\rangle = 0$ может соответствовать первый интеграл (общий) $\rho(q)\langle\lambda_n, q^\cdot\rangle = \mathrm{const}$ уравнений движения (1.1). Рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 2, показывается, что в этом случае неизвестная функция $\rho(q)$ определяется из системы уравнений

$$\langle \operatorname{grad} \rho, \lambda_i \rangle + \rho \gamma_{nin} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

которая означает, что вектор кривизны интегральной линии поля λ_n должен быть градиентом.

Пример 2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки в однородном силовом поле тяжести

$$U = xu + yv + zw \quad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$$

причем движение тела стеснено идеальной неголономной связью

$$pe_1 + qe_2 + re_3 = 0 \tag{4.5}$$

где (p, q, r) — компоненты мгновенной угловой скорости ω тела по главным осям инерции, построенным для неподвижной точки, (e_1, e_2, e_3) — компоненты по этим осям некоторого направления e, фиксированного в теле

$$(e_1)^2 + (e_2)^2 + (e_3)^2 = 1 \tag{4.6}$$

Относительно других обозначений см. пример 1. Вес тела принят равным единице. Два разных способа реализации связи (4.5) указаны в работах [7, 8].

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выясним, существует ли соотношение вида

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0 \tag{4.7}$$

которое составляло бы вместе с (4.5) инвариантную совокупность. Здесь α_i — какие-либо функции обобщенных координат системы, например углов Эйлера.

Дальнейшие вычисления удобно проводить в неголономных локальных координатах $d\beta^1 = p\,dt$, $d\beta^2 = q\,dt$, $d\beta^3 = r\,dt$. Метрика, порожденная кинетической энергией системы (без учета неголономной связи), имеет вид

$$ds^2 = A\,(d\beta^1)^2 + B\,(d\beta^2)^2 + C\,(d\beta^3)^2 \tag{4.8}$$

Условимся скалярное произведение в этой метрике обозначать через $\langle , \rangle$, а в евклидовой метрике — через $(,)$.

Ковектор активной силы F имеет компоненты

$$\frac{\partial U}{\partial \beta^1} = yw - zv, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta^2} = zu - xw, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta^3} = xv - yu$$

Обозначим через $Q = F - \langle F, e \rangle / E$, где $E^2 = \langle e, e \rangle = a\,(e_1)^2 + b\,(e_2)^2 + c\,(e_3)^2$, роекцию силы F на подпространство возможных скоростей в каждой точке конфигурационного многообразия $SO(3)$ системы.

Рассмотрим вектор $\iota = (Q, \nabla)\,Q$, равный $\langle Q, Q \rangle \tau + \pi \lambda_1$, где τ — вектор кривизны интегральной линии поля Q, $\lambda_1 = Q / \langle Q, Q \rangle^{1/2}$, π — некоторая скалярная функция. Так как $\langle \tau, Q \rangle = \langle \lambda_1, F \times e \rangle = 0$, то в соответствии с теоремой 3 для существования инвариантной совокупности (4.5), (4.7) необходимо и достаточно выполнение единственного условия

$$\langle \iota, F \times e \rangle = 0 \tag{4.9}$$

Чтобы найти ковариантные компоненты вектора ι, порожденного полем Q, минуя громоздкие вычисления коэффициентов связности риманового многообразия, полезно заметить, что левые части динамических уравнений Эйлера представляют компоненты аналогичного ковектора, порожденного полем угловой скорости $(p, q, r) = (\omega^1, \omega^2, \omega^3) = (\beta^{\cdot 1}, \beta^{\cdot 2}, \beta^{\cdot 3})$. Так, например, [9]

$$A\omega^{\cdot 1} + (C - B)\,\omega^2\omega^3 = A \frac{\partial \omega^1}{\partial \beta^i}\,\omega^i + (C - B)\,\omega^2\omega^3 = (\omega, \nabla)\,\omega_1$$

Прямые вычисления показывают, что условие (4.9) имеет вид равенства нулю однородного многочлена третьей степени относительно направляющих косинусов u, v, w вертикали, связанных одним соотношением

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{4.10}$$

Следовательно, с учетом всевозможных абсолютных значений и комбинаций знаков величин u, v, w, удовлетворяющих тождеству (4.10), все коэффициенты этого многочлена должны равняться нулю. Это условие добавляет к (4.6) еще 10 уравнений относительно параметров $x, y, z, A, B, C, e_1, e_2, e_3$ системы

(4.11) $$G\,[z^2be_2ce_3 + yz\,(c\zeta - b\eta) - y^2be_2ce_3] + J\,(y^2c\zeta + 2yzbe_2ce_3 + z^2b\eta) = 0$$

(4.12) $$G\,[(y^2 - z^2)\,ae_1ce_3 + 2ybe_2\,(xce_3 - zae_1) + xz\,(b\eta - c\zeta)] + \\ + 2J\,(z^2ae_1be_2 - xzbe_2ce_3 - yzae_1ce_3 - xyc\zeta) + I\,(y^2c\zeta + 2yzbe_2ce_3 + \\ + z^2b\eta) = 0$$

(4.13) $$G\,[(y^2 - z^2)\,ae_1be_2 + 2zce_3\,(yae_1 - xbe_2) + xy\,(b\eta - c\zeta)] + \\ + 2J\,(y^2ae_1ce_3 - yzae_1be_2 - xybe_2ce_3 - xzb\eta) + N\,(y^2c\zeta + \\ + 2yzbe_2ce_3 + z^2b\eta) = 0$$

(4.14) $$G\,[(y^2 - z^2)\,a\xi + (z^2 - x^2)\,b\eta + (x^2 - y^2)\,c\zeta] + 2J\,(x^2be_2ce_3 - \\ - xyae_1ce_3 - xzae_1be_2 - yza\xi) + 2I\,(y^2ae_1ce_3 - yzae_1be_2 - xybe_2ce_3 - \\ - xzb\eta) + 2N\,(z^2ae_1be_2 - xzbe_2ce_3 - yzae_1ce_3 - xyc\zeta) = 0$$

Здесь

$$G = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad J = ye_3\left(1 - \frac{c}{E^2}\right) - ze_2\left(1 - \frac{b}{E^2}\right)$$

$$I = ze_1\left(1 - \frac{a}{E^2}\right) - xe_3\left(1 - \frac{c}{E^2}\right), \quad N = xe_2\left(1 - \frac{b}{E^2}\right) - ye_1\left(1 - \frac{a}{E^2}\right)$$

$$\xi = E^2 - a\,(e_1)^2, \quad \eta = E^2 - b\,(e_2)^2, \quad \zeta = E^2 - c\,(e_3)^2$$

Остальные шесть уравнений получаются из уравнений (4.11), (4.12), (4.13) циклической перестановкой: $a \to b \to c \to a$, $x \to y \to z \to x$, $e_1 \to e_2 \to e_3 \to e_1$. При такой перестановке имеем $G \to G$, $J \to I \to N \to J$, $\xi \to \eta \to \zeta \to \xi$.

Полученные уравнения, связывающие параметры системы, допускают решение

(4.15) $$\frac{x}{e_1\,(E^2 - a)} = \frac{b}{e_2\,(E^2 - b)} = \frac{z}{e_3\,(E^2 - c)}$$

Формулы (4.15) теряют смысл, очевидно, только в случае, когда ковектор e направлен вдоль одной из главных осей инерции тела, построенных для неподвижной точки.

Разберем этот случай. Пусть, например, $e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = 1$. Тогда $G = z$, $J = I = N = 0$. Уравнение (4.11) дает $yz^2bc = 0$.

Если $z \neq 0$, то с учетом уравнения (4.12) $xz^2bc = 0$, необходимо, чтобы $x = y = 0$. Тогда из уравнения (4.14) $z^3\,(b - a)\,c = 0$ получаем, что $A = B$. Это случай Лагранжа. Связь (4.5) не оказывает силового воздействия на тело, а только ограничивает начальные условия его движения [10].

Если $z = 0$, то получается еще один общий случай интегрируемости рассматриваемой неголономной системы, найденный Е. И. Харламовой [11]. Уравнения движения в этом случае (например, уравнения в форме Воронца) допускают первый интеграл $Apx + Bqy = \mathrm{const}$.

Далее предполагаем, что ковектор e не коллинеарен ни одному из главных направлений тензора инерции, отнесенного к неподвижной точке тела. Итак, если центр масс тела расположен на оси с направляющим вектором

$$\lambda_2 = [e_1\,(E^2 - a)/m_2,\ e_2\,(E^2 - b)/m_2,\ e_3\,(E^2 - c)/m_2]$$
$$((m_2)^2 = A\,[e_1\,(E^2 - a)]^2 + B\,[e_2\,(E^2 - b)]^2 + C\,[e_3\,(E^2 - c)]^2)$$

то существует соотношение вида (4.7), которое вместе с уравнением связи (4.5) образует инвариантную совокупность для уравнений движения с множителем. При этом векторы $\lambda_3 = e$ и $\lambda_1 = Q/\langle Q, Q\rangle^{1/2}$ имеют компоненты

$$\lambda_3 = (ae_1/E,\ be_2/E,\ ce_3/E)$$
$$\lambda_1 = [e_2e_3\,(B - C)/m_1,\ e_3e_1\,(C - A)/m_1,\ e_1e_2\,(A - B)/m_1]$$
$$((m_1)^2 = A\,[e_2e_3\,(B - C)]^2 + B\,[e_3e_1\,(C - A)]^2 + C\,[e_1e_2\,(A - B)]^2)$$

Согласно п. 3, коэффициенты соотношения (4.7) должны быть пропорциональны компонентам ковектора, ортогонального векторам e и F. Так как $n = 3$, то этим условием соотношение (4.7) определяется вполне и может быть записано в виде

(4.16) $$Ae_1\,(E^2 - a)p + Be_2\,(E^2 - b)\,q + Ce_3\,(E^2 - c)\,r = 0$$

или, с учетом (4.5)

(4.17) $$Ape_1 + Bqe_2 + Cre_3 = 0$$

Равенства (4.5), (4.17) означают, что

(4.18) $$p/\lambda_1{}^1 = q/\lambda_1{}^2 = r/\lambda_1{}^3$$

т. е. при соответствующем движении системы направления угловой скорости и кинетического момента фиксированы в теле.

Выясним, нельзя ли подобрать функцию $\rho(u, v, w) \neq 0$ так, чтобы

$$d/dt\,[\rho\,(Ape_1 + Bqe_2 + Cre_3)] = (pe_1 + qe_2 + re_3)\,\varkappa$$

Уравнения (4.4) для рассматриваемого случая имеют вид

$$(4.19)\qquad (X_1\theta + \gamma_{122} =)\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta^i}\,\lambda_{1|}{}^{i} + \gamma_{122} = 0$$

$$(4.20)\qquad (X_2\theta =)\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta^i}\,\lambda_{2|}{}^{i} = 0$$

где

$$\gamma_{122} = [(A - B)^2\,(E^2 - a)(E^2 - b)(e_1e_2)^2 + (B - C)^2(E^2 - b)(E^2 - c)\cdot$$
$$\cdot(e_2e_3)^2 + (C - A)^2(E^2 - c)(E^2 - a)(e_3e_1)^2]/[m_1\,(m_2)^2]$$

При сделанном предположении о направлении вектора e постоянная $\gamma_{122} \neq 0$ Составив скобку Пуассона $(X_1X_2 - X_2X_1)\,\theta = 0$, получим

$$(X_3\theta =)\,\frac{\partial\theta}{\partial\beta^i}\,\lambda_{3|}{}^{i} = 0$$

Составив вторую скобку $(X_2X_3 - X_3X_2)\,\theta = 0$, найдем $X_1\theta = 0$, что доказывает противоречивость системы уравнений (4.19), (4.20).

Любопытно, что в данной задаче с неголономной связью во всех трех случаях (Лагранжа, [11] и рассматриваемом) дополнительный интеграл является интегралом площадей, причем в двух последних случаях — обобщенным [12] интегралом площадей, но в рассматриваемом здесь случае — частным интегралом (4.17).

Докажем, что в других случаях не существует инвариантной совокупности (4.5), (4.7). Согласно изложенному, это утверждение осталось доказать, когда ковектор e не совпадает с главной осью инерции в неподвижной точке. Воспользуемся переформулировкой теоремы 3: для существования указанной в теореме инвариантной совокупности необходимо и достаточно, чтобы интегральные кривые векторного поля Q были решением уравнений (3.2) при $Q = 0$.

В отсутствие внешних активных сил тело, стесненное неголономной связью (4.5) вращается с угловой скоростью [7, 8]

$$\Omega = -\lambda_1 v\,\operatorname{th} v\,(\varkappa t + k) - \lambda_2\,\frac{v}{\operatorname{ch} v\,(\varkappa t + k)}$$

$$\varkappa^2 = \frac{E^2\,[A\,(e_1)^2 + B\,(e_2)^2 + C\,(e_3)^2] - 1}{E^4ABC}\,,\qquad k = \frac{\operatorname{arth}\cos\alpha}{v}$$

(постоянные v, α — соответственно, начальная величина скорости и угол между начальным направлением скорости и вектором $-\lambda_1$).

В каждый момент времени векторы Q и $\Omega\,(t)$ должны быть коллинеарны. Q — линейная вектор-функция переменных $u\,(t)$, $v\,(t)$, $w\,(t)$, являющихся решением уравнений Пуассона $n^{\cdot} + \Omega \times n = 0$, $n = (u,\ v,\ w)$. Так как в фиксированный момент времени вектор n может иметь произвольное направление в теле, то условие коллинеарности дает

$$\frac{x}{\Omega_2e_3 - \Omega_3e_2} = \frac{y}{\Omega_3e_1 - \Omega_1e_3} = \frac{z}{\Omega_1e_2 - \Omega_2e_1}$$

Очевидно, полученные соотношения противоречивы, когда $\alpha \neq 0$. При $\alpha = 0$ они совпадают с (4.15), что и требовалось доказать.

В работе [13] рассмотрено обобщение задачи для тяжелого гиростата. Предположив, что существует инвариантное соотношение вида $\omega_1 = \omega_1{}^0$ $(= \mathrm{const})$, где ω_1 — проекция угловой скорости на фиксированное в теле направление $O\xi_1$, авторы [13] ввели декартову систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, в которой неголономная связь (4.5) записывается уравнением $\omega_3 = 0$, и получили условия существования указанного соотношения

$$(4.21)\qquad A_{31}\omega^0{}_1 + L = 0$$

$$(4.22)\qquad A_{32} = 0,\quad l_3 = 0,\quad A_{12}l_1 + A_{22}l_2 = 0$$

Здесь l_j — компоненты по осям $O\xi_1\xi_2\xi_3$ центра масс тела, постоянная L — проекция гиростатического момента на ось $O\xi_3$, A_{rs} — соответствующие моменты инерции тела для неподвижной точки.

Если $A_{31} = 0$, имеем интегрируемый случай [11]. Пусть $A_{31} \neq 0$. Очевидно, что приведенные условия никаких ограничений на тензор инерции тела не налагают и три условия (4.22) эквивалентны двум соотношениям (4.15). Действительно, первое условие (4.22) однозначно определяет направление λ_1 оси $O\xi_2$, но тогда последние два условия (4.22) совпадают с (4.15), причем $A_{31} = m_1 (\lambda_1, \lambda_1)^{1/2}$.

Для тела с центром масс, расположенным на оси (4.15), при начальном условии $\omega_1^0 = - L/A_{31}$ уравнения движения интегрируются в эллиптических функциях времени. Когда $L = 0$, соответствующие движения тела относятся к классу прецессий общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
2. *Ricci G.*, *Levi-Civita T.* Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.— Math. Ann., 1901, B. 54, S. 128—201, 608; *Levi-Civita T.* Opere matematiche, t. 1 (1893—1900). Bologna: Zanichelli, 1954. 563 p.
3. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
4. *Ricci G.* Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque.— Compt. rend. Ac. sc. Paris, 1898, t. 127, p. 360—361.
5. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
6. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.— М.: Гостехиздат, 1934. 359 с.
7. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.— Л.: Гостехиздат, 1944. 655 с.
8. *Вагнер В. В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем.— Тр. семин. по вект. и тенз. анализу, 1941, вып. 5, с. 301—327.
9. *Вагнер В. В.* Геометрия пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.— Уч. зап. Сарат. ун-та, сер. физ.-мат. ин-та, 1938, т. 1 (14), вып. 2, с. 34—57.
10. *Космодемьянская Г. Н.* Движение твердого тела около неподвижной точки при неголономной связи.— В кн.: *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк., 1970. 270 с.
11. *Забелина (Харламова) Е. И.* Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи.— Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, вып. 1, с. 69—75.
12. *Сумбатов А. С.* К теореме площадей.— Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Сб. статей.: М.: ВЦ АН СССР, 1982, с. 80—86.
13. *Харламов П. В.*, *Харламова Е. И.* Одно решение задачи о движении гиростата, подчиненного неголономной связи.— Мех. тв. тела.: Респ. межвед. сб., 1971, вып. 3, с. 132—136.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1984