Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 62-50

ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В КООПЕРАТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА БЫСТРОДЕЙСТВИЕ

Данилов Н. Н.

Определяется класс кооперативных дифференциальных игр на быстродействие, рассматриваются принципы оптимальности в нем и вопросы существования решений. Строится супераддитивное характеристическое множество, являющееся аналогом характеристической функции в кооперативной игре. Вводятся понятия дележа и доминирования дележей. Определяется принцип динамической устойчивости в кооперативной игре на быстродействие. Доказывается теорема о существовании динамически устойчивого c-ядра. Рассматривается применение предложенного подхода к играм группового преследования на быстродействие.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальная игра n лиц с зависимыми движениями. Динамика игры описывается системой уравнений

$$x^{\cdot} = f(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x \in R^m, \quad u_i \in U_i \subset R^{m_i} \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

где U_i — компактное множество значений управляющих параметров i-го игрока.

Допустимым управлением i-го игрока называется любая измеримая на $[t_0, \infty)$ функция $u_i(t)$, удовлетворяющая для любого t условию $u_i(t) \in U_i$.

Относительно системы (1.1) предполагается, что она для начальных данных $x_0 \in R^m$ и любого набора $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ допустимых управлений имеет единственное, продолжимое на полуинтервале $[t_0, \infty)$ решение $x(\cdot)$. Кроме того, предполагается, что вектор-функция $f = (f_1, \ldots, f_m)$, входящая в правую часть (1.1), представима в виде $f(x, u_1, \ldots, u_n) = f^1(x, u_1) + \ldots + f^n(x, u_n)$.

В качестве допустимых стратегий игроков будем рассматривать кусочно-программные стратегии (КПС) [1]. КПС i-го игрока будем обозначать $u_i(\cdot)$, а множество его КПС — D_i.

Игра начинается в момент t_0 из состояния x_0. В фазовом пространстве R^m заданы терминальные множества $M_1, \ldots, M_n$. Пусть $(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ — некоторая допустимая ситуация, а $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ — соответствующая этой ситуации траектория системы (1.1)—(1.2).

Определение 1. Назовем $T_i = T_i(x_0, u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ первым моментом достижения фазовой точкой терминального множества M_i в ситуации $(u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$, если $T_i = \min\{t \geqslant t_0 \mid x(t) \in M_i\}$.

Предположение А. Множество допустимых ситуаций $D_N = D_1 \times \ldots \times D_n$ таково, что для всякой упорядоченной последовательности $M_{i_1}, \ldots, M_{i_n}$ моменты $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$ существуют и конечны.

Игрок i заинтересован в достижении фазовой точкой терминального множества M_i за кратчайшее время, т. е. он стремится к минимизации величины

(1.3) $\qquad J_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) = T_i(x_0, u_1, \ldots, u_n) - t_0$

Итак, определена дифференциальная игра n лиц на быстродействие в нормальной форме $\Gamma(x_0) = \langle x_0; D_1, \ldots, D_n; J_1, \ldots, J_n\rangle$.

2. Характеристическое множество. Обозначим через $N = \{1, \ldots, n\}$ множество всех игроков в игре $\Gamma(x_0)$. Любое подмножество $S \subset N$, включая пустое множество $\varnothing$ и само множество N, называется коалицией. Пусть образовалась коалиция $S \subset N$. Это означает, что члены коалиции S действуют как один игрок с множеством стратегий $D_S = \prod\limits_{i \in S} D_i$ и стремятся минимизировать величины J_i для всех $i \in S$.

Вектор $J = (J_1, \ldots, J_n)$, где J_i — время достижения терминального множества M_i из начального состояния x_0 (см. (1.3)), называется вектором выигрышей. Для каждой коалиции $S \in 2^N$ обозначим через $V(S, x_0)$ множество всех векторов выигрышей в игре $\Gamma(x_0)$, соответствующие компоненты которых коалиция S может гарантировать своим членам, независимо от поведения остальных игроков из множества $N \setminus S = \{i \in N \mid i \notin S\}$, включая и тот наименее благоприятный для S случай, когда коалиция $N \setminus S$ действует против нее. Множество $V(S, x_0)$ является характеристикой потенциальной силы коалиции S и лежит в основе определения кооперативной игры. Перейдем к построению множеств $V(S, x_0)$, $S \in 2^N$.

Для пустой коалиции $\varnothing$ полагаем

(2.1) $\qquad V(\varnothing, x_0) = \varnothing$

Пусть $S \subset N$ $(S \neq \varnothing)$. Зафиксируем момент времени $\tau > t_0$ и рассмотрим семейство антагонистических дифференциальных игр $\{\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0) \mid y \in R^m\}$ с фиксированной продолжительностью $\tau - t_0$ между коалициями S и $N \setminus S$. Динамика игры $\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0)$ описывается уравнениями

(2.2)
$$\dot{x} = f(x, u_S, u_{N\setminus S}), \quad x(t_0) = x_0$$
$$u_S \in \prod_{i \in S} U_i, \quad u_{N\setminus S} \in \prod_{j \in N\setminus S} U_j$$

Выигрыш S (максимизирующего игрока) имеет вид $K(x_0, u_S, u_{N\setminus S}) = -\rho(x(\tau), y)$, где $x(\tau)$ — решение системы (2.2) в момент τ, а ρ — евклидово расстояние. Выигрыш $N \setminus S$ есть $-K$. Известно [2], что значение игры $\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0)$

$$\operatorname{val}\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0) = \sup_{u_S(\cdot) \in D_S} \inf_{u_{N\setminus S}(\cdot) \in D_{N\setminus S}} K(x_0, u_S(\cdot), u_{N\setminus S}(\cdot)) =$$
$$= \inf_{u_{N\setminus S}(\cdot) \in D_{N\setminus S}} \sup_{u_S(\cdot) \in D_S} K(x_0, u_S(\cdot), u_{N\setminus S}(\cdot))$$

в классе КПС существует.

Введем в рассмотрение множество

(2.3) $\qquad Y_S^{\tau - t_0}(x_0) = \{y \in R^m \mid \operatorname{val}\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0) = 0\}$

Как следует из определения значения игры $\Gamma_S^y(x_0, \tau - t_0)$, для любой точки $y \in Y_S^{\tau - t_0}(x_0)$ и наперед заданного $\varepsilon > 0$ коалиция S может гарантировать сближение с y за время $\tau - t_0$ на расстояние, не большее чем ε.

Пусть π — перестановка игроков, т. е. преобразование каждого игрока i в πi и тем самым каждой коалиции $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ в коалицию $\pi S = \{\pi i_1, \ldots, \pi i_s\}$. Каждая последовательность $\{M_i, i \in S\}$ терминальных множеств, расположенных согласно очередности их достижения коалицией S, порождает перестановку внутри самой коалиции S. Зафиксируем некоторую перестановку π в S. Пусть ей соответствует последовательность

(2.4) $\qquad M_{j_1}, \ldots, M_{j_s}$, где $j_k = \pi i_k$, $k = 1, \ldots, s$

Обозначим через $T^S_{j_1}$ первый момент касания множеством $Y_S^{\tau-t_0}(x_0)$ множества M_{j_1} при возрастании τ, т. е.

$$T^S_{j_1} = \min\{\tau \mid Y_S^{\tau-t_0}(x_0) \cap M_{j_1} \neq \varnothing\}$$

Если $Y_S^{\tau-t_0}(x_0) \cap M_{j_1} = \varnothing$, $\tau \geqslant t_0$, то $T^S_{j_1}$ полагаем равным $+\infty$. Для упрощения дальнейших выкладок сделаем предположение.

Предположение Б. В случае конечности $T_1 = T^S_{j_1}$ существует единственная точка $x_1 = x(T_1)$ первого касания множеств $Y_S^{\tau-t_0}(x_0)$ и M_{j_1}.

Далее аналогично

$$T_2 = \min\{\tau \mid Y_S^{\tau-T_1}(x_1) \cap M_{j_2} \neq \varnothing\}, \ldots$$
$$\ldots, T_s = \min\{\tau \mid Y_S^{\tau-T_{s-1}}(x_{s-1}) \cap M_{j_s} \neq \varnothing\}$$

Если $T_k = +\infty$, то $T_l = +\infty$ для всех $l = k+1, \ldots, s$. Это означает, что при «обходе» терминальных множеств согласно перестановке π множества $M_{j_k}, M_{j_{k+1}}, \ldots, M_{j_s}$ коалицией S не достигаются. Таким образом, для π получили последовательность $T^S_{j_1} \leqslant \ldots \leqslant T^S_{j_s}$ или, что то же, последовательность $T^S_{\pi i_1} \leqslant \ldots \leqslant T^S_{\pi i_s}$ моментов достижения множеств (2.4).

Введем s-векторы $T^S_\pi = (T^S_{\pi i_1}, \ldots, T^S_{\pi i_s})$, $t_0 = (t_0, \ldots, t_0)$ и положим

(2.5) $\qquad V(S, x_0) = \{T^S_\pi - t_0 \mid \pi \in \pi_S\}$, $\quad S \subset N \ (S \neq \varnothing)$

где π_S — множество всех перестановок членов коалиции S. Величина $T^S_{\pi i_k} - t_0$ (k-я компонента вектора $T_\pi{}^S - t_0$) имеет смысл времени достижения множества M_{i_k} ($i_k \in S$) коалицией S в условиях перестановки π. Заметим, что для $S \subset N$ $V(S, x_0)$ — подмножество пространства R^s, а его мощность равняется $s!$, где s — количество игроков в коалиции S.

Пусть η — некоторый s-вектор. Если $\xi \in V(S, x_0)$ и $\eta_i \geqslant \xi_i$ для всех $i \in S$, то будем считать, что $\eta \in V(S, x_0)$. Определим включение $\tilde{\subset}$ следующим образом: $A \tilde{\subset} V(S, x_0)$, если для любого $\eta \in A$ найдется $\xi \in V(S, x_0)$, такое, что $\eta_i \geqslant \xi_i$, $i \in S$.

Пусть $S, R \subset N$, $S \cap R = \varnothing$. Рассмотрим прямое произведение

$$V(S, x_0) \times V(R, x_0) = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in V(S, x_0), \eta \in V(R, x_0)\}$$

являющееся подмножеством пространства R^{s+r}, где $s\,(r)$ — количество игроков в $S\,(R)$. Преимущество коалиции $S \cup R$ перед коалициями S и R, если оно есть, может быть отражено соотношением

(2.6) $\qquad V(S \cup R, x_0) \tilde{\supset} V(S, x_0) \times V(R, x_0)$

Если (2.6) имеет место для всех $S, R \subset N$, $S \cap R = \varnothing$, то будем говорить, что множество $V(S, x_0)$ супераддитивно по S.

Лемма 1. Множество V, определенное равенствами (2.1) и (2.5), супераддитивно по S.

Доказательство. Множества $V(S \cup R, x_0)$ и $V(S, x_0) \times V(R, x_0)$ являются подмножествами одного и того же пространства R^{s+r}, поэтому отношение $\tilde{\supset}$ между ними определено корректно. Далее, очевидно, что $(s+r)! > s!\, r!$ и $\pi_S \times \pi_R \subset \pi_{S \cup R}$, где

$\pi_{S \cup R}$ — множество всех перестановок в $S \cup R$. Положим $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $R = \{j_1, \ldots, j_r\}$. Пусть $\xi \in V(S, x_0) \times V(R, x_0)$. Это значит, что существуют такие перестановки $\varphi \in \pi_S$ и $\psi \in \pi_R$, для которых

$$\xi = (T^S_{\varphi i_1} - t_0, \ldots, T^S_{\varphi i_s} - t_0, T^R_{\psi j_1} - t_0, \ldots, T^R_{\psi j_r} - t_0)$$

Расположим моменты $t_0, T^S_{\varphi i_1}, \ldots, T^S_{\varphi i_s}, T^R_{\psi j_1}, \ldots, T^R_{\psi j_r}$ в порядке возрастания. Тогда получим последовательность

$$t_0 < T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_{s+r} \leqslant \infty \tag{2.7}$$

Ей соответствует последовательность точек

$$\{x_k = x(T_k), \quad k = 1, \ldots, s + r\} \tag{2.8}$$

$$x(T_k) = \begin{cases} x(T^S_{\varphi i_p}), & T_k = T^S_{\varphi i_p} \\ x(T^R_{\psi j_q}), & T_k = T^R_{\psi j_q} \end{cases}$$

$x(T^S_{\pi k})$ — точка первого касания множеств $Y_S^{\tau - T^S_{\pi k-1}}(x(T^S_{\pi k-1}))$ и $M_{\pi k}$. Последовательность (2.8) индуцирует некоторую перестановку $\bar\pi \in \pi_{S \cup R}$. При перестановке $\bar\pi$ вектор ξ преобразуется в вектор $\bar\pi\xi = (T_1 - t_0, \ldots, T_{s+r} - t_0)$.

Рассмотрим коалицию $S \cup R$ и допустим, что множества M_i, $i \in S \cup R$ упорядочены (достигаются) согласно перестановке $\bar\pi$:

$$M_{l_1}, \ldots, M_{l_{s+r}} \tag{2.9}$$

Обозначим $\eta = (T_1^{S \cup R} - t_0, \ldots, T_{s+r}^{S \cup R} - t_0)$, где $T_k^{S \cup R}$ — первый момент достижения множества M_{l_k}, $l_k \in S \cup R$ при перестановке $\bar\pi$. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\eta_k \leqslant \bar\pi\xi_k, \quad k = 1, \ldots, s + r \tag{2.10}$$

При перестановке $\bar\pi$ точки (2.8), вообще говоря, не являются точками первого касания множеств (2.9), но для доказательства неравенств (2.10) достаточно показать, что точки (2.8) будут достигнуты коалицией $S \cup R$ за время, не большее чем $T_1 - t_0, \ldots, T_{s+r} - t_0$ соответственно.

Пусть x_k — произвольная точка последовательности (2.8). Допустим, что $x_k \in M_i$ для $i \in S$ (для $i \in R$ рассуждения аналогичны). Тогда по определению x_k — точка первого касания множеств $Y_S^{T_k - T_{k-1}}(x(T_{k-1}))$ и M_i. Здесь $T_k = T_k^S$, так как $x_k \in M_i$ для $i \in S$, но не всегда $T_{k-1} = T_{k-1}^S$, так как возможно $x_{k-1} \in M_j$, где $j \in R$. Таким образом, время перевода фазовой точки из состояния x_{k-1} в состояние x_k усилиями коалиции S равно $T_k - T_{k-1}$. Этому времени соответствует пара ε-оптимальных стратегий $(\bar u_S^\varepsilon(\cdot), \bar u_{N \setminus S}^\varepsilon(\cdot))$ игры $\Gamma_S^{x_k}(x_{k-1}, T_k - T_{k-1})$ (см. (2.3)).

Рассмотрим теперь игру $\Gamma_{S \cup R}^{x_k}(x_{k-1}, T_k^{S \cup R} - T_{k-1}^{S \cup R})$, где $T_k^{S \cup R} - T_{k-1}^{S \cup R}$ — время перевода фазовой точки из состояния x_{k-1} в состояние x_k усилиями коалиции $S \cup R$. Справедливо неравенство

$$T_k - T_{k-1} \geqslant T_k^{S \cup R} - T_{k-1}^{S \cup R} \tag{2.11}$$

Действительно, построим стратегию $u'_{S \cup R}(\cdot) = \{\bar u_S^\varepsilon(\cdot), \bar u_{N \setminus S}^\varepsilon(\cdot)|_R\}$, где $\bar u_S^\varepsilon(\cdot)$ — ε-оптимальная стратегия коалиции S в игре $\Gamma_S^{x_k}(x_{k-1}, T_k^S - T_{k-1}^S)$, а $\bar u_{N \setminus S}^\varepsilon(\cdot)|_R$ — усечение на R ε-оптимальной стратегии коалиции $N \setminus S$ в той же игре. Очевидно, что $u'_{S \cup R}(\cdot) \in D_{S \cup R}$ и, применяя эту стратегию, коалиция $S \cup R$ переводит фазовую точку из состояния x_{k-1} в состояние x_k за время, не большее чем $T_k - T_{k-1}$. И тем более, применяя стратегию $\bar{\bar u}^\varepsilon_{S \cup R}(\cdot)$, ε-оптимальную в игре $\Gamma_{S \cup R}^{x_k}(x_{k-1}, T_k^{S \cup R} - T_{k-1}^{S \cup R})$, коалиция $S \cup R$ переводит фазовую точку из состояния x_{k-1} в состояние x_k за время $T_k^{S \cup R} - T_{k-1}^{S \cup R}$, не большее чем $T_k - T_{k-1}$.

Из (2.11) при $k = 1$ получим

$$T_1 - t_0 \geqslant T_1^{S \cup R} - t_0 \tag{2.12}$$

т. е. $\eta_1 \leqslant \bar\pi\xi_1$. Из (2.11) при $k = 2$, применяя (2.12), получим $T_2^{S \cup R} \leqslant T_2$, т. е. $\eta_2 \leqslant \bar\pi\xi_2$. Продолжая это для $k = 3, \ldots, s + r$, приходим к (2.10). Далее, так как $\eta \in V(S \cup R, x_0)$, то из (2.10) следует, что $\bar\pi\xi \in V(S \cup R, x_0)$. Ввиду произвольности перестановок φ и ψ, порождающих перестановку $\bar\pi$, получаем, что $\xi \in V(S \cup R, x_0)$. Следовательно, справедливо соотношение (2.6).

Супераддитивное множество V называется характеристическим множеством. Определение для каждой коалиции $S \in 2^N$ характеристического множества $V(S, x_0)$ означает определение кооперативной игры $\Gamma_V(x_0) = \langle N, V(S, x_0)\rangle$. Цель игроков в игре $\Gamma_V(x_0)$ — минимизация времени достижения терминальных множеств, поэтому игру $\Gamma_V(x_0)$ будем называть кооперативной дифференциальной игрой на быстродействие.

3. Принцип динамической устойчивости решений в игре $\Gamma_V(x_0)$. Сначала введем понятия дележа и доминирования дележей в игре $\Gamma_V(x_0)$.

Определение 2. Любой вектор $\xi \in R^n$, удовлетворяющий условиям: 1) $\xi_i \leqslant V(\{i\}, x_0)$ для всех $i \in N$; 2) $\xi \in V(N, x_0)$, называется дележом в игре $\Gamma_V(x_0)$.

Множество всех дележей в игре $\Gamma_V(x_0)$ будем обозначать $E_V(x_0)$. Очевидно, что $E_V(x_0) \subset V(N, x_0)$.

Пусть $\xi \in E_V(x_0)$, а $\xi^S = \{\xi_i, i \in S\}$, т. е. ξ^S — это s-мерный вектор, составленный из компонент дележа ξ, соответствующих S.

Определение 3. Будем говорить, что дележ ξ доминирует над дележом η по коалиции S ($\xi \succ_S \eta$), если: 1) $\xi_i < \eta_i$ для всех $i \in S$; 2) $\xi^S \in V(S, x_0)$. Будем говорить, что дележ ξ доминирует над дележом η ($\xi \succ \eta$), если найдется такая коалиция $S \subset N$, что $\xi \succ_S \eta$.

Доминирование невозможно по коалициям, состоящим из одного игрока. Действительно, из $\xi \succ_i \eta$ следует $\eta_i > V(\{i\}, x_0)$, что невозможно (см. определение 2). Заметим, что доминирование по N возможно.

При помощи доминирования в смысле определения 3 можно определить c-ядро, НМ-решение и другие понятия решений игры $\Gamma_V(x_0)$, так, как это делается в классической кооперативной теории [3].

Пусть $W_V(x_0) \subset E_V(x_0)$ — некоторое решение игры $\Gamma_V(x_0)$, определенное в состоянии x_0. По определению, каждый дележ $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ представляет собой время достижения определенным образом упорядоченной последовательности $M_{i_1}, \ldots, M_{i_n}$ терминальных множеств. Следовательно, каждому дележу $\xi \in E_V(x_0)$ соответствует траектория $x(\cdot)$ системы (1.1)—(1.2), такая, что $\xi_k = T_{i_k}^N(x(\cdot)) - t_0$, где $T_{i_k}^N(x(\cdot))$ — момент достижения множества M_{i_k} при движении по траектории $x(\cdot)$.

Определение 4. Пусть $W_V(x_0) \neq \varnothing$. Любую траекторию $\bar{x}(\cdot)$ системы (1.1)—(1.2), такую, что $[T^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0] \in W_V(x_0)$, будем называть условно-оптимальной траекторией. Здесь $T^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0 = (T_{i_1}^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0, \ldots, T_{i_n}^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0)$.

Перейдем к формулировке принципа динамической устойчивости в игре $\Gamma_V(x_0)$. Заметим, что для кооперативных игр с трансферабельными выигрышами понятие динамической устойчивости было введено в [1], а для игр с нетрансферабельными выигрышами — в [4, 5].

Вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$ рассмотрим текущие игры $\Gamma_V(\bar{x}(t))$ и их решения $W_V(\bar{x}(t)) \subset E_V(\bar{x}(t))$. Пусть $\xi^t \in W_V(\bar{x}(t))$. Компонента ξ_i^t дележа ξ^t есть время достижения множества M_i из состояния $\bar{x}(t)$, когда $i \in N$. Видно, что для всех i, таких, что $T_i^N(\bar{x}(\cdot)) \leqslant t$, $\xi_i^t = 0$. Обозначим $\bar{T} = \max\limits_{i \in N} T_i^N(\bar{x}(\cdot))$.

Определение 5. Пусть $\xi \in W_V(x_0)$, а $\bar{x}(\cdot)$ — условно-оптимальная траектория, такая, что $T^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0 = \xi$. Дележ ξ называется динамически устойчивым, если $W_V(\bar{x}(t)) \neq \varnothing$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{T}$ и

$$\xi \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant \bar{T}} [\tau(t) + W_V(\bar{x}(t))]$$

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \ldots, \tau_n(t)); \quad \tau_i(t) = \min\{\xi_i, t - t_0\}, \quad i \in N$$

В этом случае условно-оптимальная траектория называется оптимальной.

Решение $W_V(x_0)$ называется динамически устойчивым решением игры $\Gamma_V(x_0)$, если динамически устойчивы все дележи $\xi \in W_V(x_0)$.

В определении 5 сумма $\tau(t) + W_V(\bar{x}(t))$ есть множество векторов вида $\tau(t) + \xi^t$, где $\xi^t \in W_V(\bar{x}(t))$. Следовательно, для динамически устойчивого дележа $\xi \in W_V(x_0)$ в каждый момент $t \in [t_0, \bar{T}]$ найдется такой дележ $\xi^t \in W_V(\bar{x}(t))$, что $\xi = \tau(t) + \xi^t$.

Принцип динамической устойчивости является принципом реализуемости дележа в дифференциальной игре. Он обладает тем важным свойством, что договор, достигнутый игроками в начале игры относительно последовательности и времени достижения терминальных множеств (дележ $\xi \in W_V(x_0)$), сохраняется до конца игры при движении по оптимальной траектории, т. е. будет реализован.

4. Динамически устойчивое c-ядро. Далее под множеством $W_V(x_0)$ будем понимать c-ядро игры $\Gamma_V(x_0)$ и обозначать его $C_V(x_0)$.

Определение 6. Множество всех недоминируемых (в смысле определения 3) дележей называется c-ядром игры $\Gamma_V(x_0)$.

Определение 7. Игра $\Gamma_V(x_0)$ называется N-существенной, если для всех $S \subset N$ $(S \neq N)$, $\tau \geqslant t_0$ и хотя бы для одного $i \in S$ выполнено равенство $Y_S^{\tau - t_0}(x_0) \cap M_i = \varnothing$.

Из определения 7 и предположения А вытекает, что в N-существенной игре терминальные множества достигаются только в случае образования максимальной коалиции N.

Теорема 1. В N-существенной игре $\Gamma_V(x_0)$ существует непустое c-ядро $C_V(x_0)$.

Доказательство. Из предположения А следует, что множество $E_V(x_0)$ дележей в N-существенной игре непусто. Пусть $\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}} \in E_V(x_0)$. Предположим, что существует коалиция S $(S \neq N)$, такая, что $\bar{\xi} \underset{S}{\succ} \bar{\bar{\xi}}$. Тогда $\bar{\xi}_i < \bar{\bar{\xi}}_i$ для всех $i \in S$ и $\bar{\xi}^S \in V(S, x_0)$ (см. определение 3). По определению N-существенной игры, для всех $\eta \in V(S, x_0)$ $\eta_i = +\infty$ хотя бы для одного $i \in S$. Так как $\bar{\xi}_i^S < \infty$ для всех $i \in S$, то в $V(S, x_0)$ нет ни одного вектора η, такого, что $\eta_i \leqslant \bar{\xi}_i^S$ для всех $i \in S$, т. е. $\bar{\xi}^S \notin V(S, x_0)$, и следовательно, $\bar{\xi}$ не может доминировать $\bar{\bar{\xi}}$ по коалиции S. Рассмотрим теперь коалицию N. Возможны два случая: 1) ни один дележ $\xi \in E_V(x_0)$ не доминируется по N; 2) существует дележ доминируемый по N. В первом случае $C_V(x_0) = E_V(x_0)$. Во втором случае существует хотя бы один дележ, не доминируемый по коалиции N и $C_V(x_0) \subset E_V(x_0)$. Таким образом, в обоих случаях c-ядро непусто. Теорема доказана.

Обозначим $\mathrm{dom}_N E_V(x_0) = \{\xi \in E_V(x_0) |$, существует $\eta \in E_V(x_0)$, $\eta \succ_N \xi\}$, $E_V(x_0) \setminus \mathrm{dom}_N E_V(x_0) = \{\xi \in E_V(x_0) | \xi \notin \mathrm{dom}_N E_V(x_0)\}$.

Следствие. В N-существенной игре $\Gamma_V(x_0)$ $C_V(x_0) = E_V(x_0) \setminus \mathrm{dom}_N E_V(x_0)$.

Теорема 2. Если в N-существенной игре $\Gamma_V(x_0)$ для каждой условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$ все текущие игры $\Gamma_V(\bar{x}(t))$ N-существенны, то c-ядро $C_V(x_0)$ динамически устойчиво.

Доказательство. Пусть дележ $\xi = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n})$, где $\xi_{i_k} = T_{i_k}^N - t_0 = T_{i_k}^N(\bar{x}(\cdot)) - t_0$, $k = 1, \ldots, n$ принадлежит c-ядру $C_V(x_0)$. Дележу ξ соответствует такая упорядоченная последовательность $M_{i_1}, \ldots, M_{i_n}$, что ξ_{i_k} равно времени достижения множества M_{i_k} коалицией N вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$. Точки $\bar{x}(T_{i_1}^N), \ldots, \bar{x}(T_{i_n}^N)$ являются точками первого касания множеств $Y_N^{T_{i_1}^N - t_0}(x_0), \ldots$ $\ldots, Y_N^{T_{i_n}^N - T_{i_{n-1}}^N}(\bar{x}(T_{i_{n-1}}^N))$ с множествами $M_{i_1}, \ldots, M_{i_n}$.

Рассмотрим отрезок времени $[t_0,\ T_{i_1}^N]$. Поскольку для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_1}^N$ будет $Y_N^{T_{i_1}^N - t}(\bar{x}(t)) \subset Y_N^{T_{i_1}^N - t_0}(x_0)$ и $\bar{x}(T_{i_1}^N) \in Y_N^{T_{i_1}^N - t}(\bar{x}(t))$, где $\bar{x}(T_{i_1}^N)$ — единственная точка касания множеств $Y_N^{T_{i_1}^N - t_0}(x_0)$ и M_{i_1} (см. предположения А и Б), то точка $\bar{x}(T_{i_1}^N)$ будет оставаться единственной точкой касания множеств $Y_N^{T_{i_1}^N - t}(\bar{x}(t))$ и M_{i_1} для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_1}^N$. Так как по условию теоремы игра $\Gamma_V(\bar{x}(t))$, $t \in [t_0,\ T_{i_1}^N]$ N-существенна, то дележ $\xi^t = \{T_{i_k}^N - t,\ k = 1, \ldots, n\}$ принадлежит c-ядру $C_V(\bar{x}(t))$. Отсюда

(4.1) $$\xi = [(t - t_0) + \xi^t] \in C_V(x_0), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_1}^N$$

$$t = (\underbrace{t, \ldots, t}_{n}), \quad t_0 = (\underbrace{t_0, \ldots, t_0}_{n})$$

В момент $t = T_{i_1}^N$ имеем $\xi_{i_1}^t = 0$.

Рассмотрим теперь отрезок времени $[T_{i_1}^N,\ T_{i_2}^N]$. Аналогично получаем, что справедливо включение (4.1), где $\xi^t \in C_V(\bar{x}(t))$, причем $\xi_{i_1}^t = 0$ для всех $t \geqslant T_{i_1}^N$, а в момент $t = T_{i_2}^N$ и $\xi_{i_2}^t = 0$. Отсюда следует

$$\xi \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_2}^N} [\tau(t) + C_V(\bar{x}(t))]$$

$$\tau(t) = \begin{cases} (\underbrace{t - t_0, \ldots, t - t_0}_{n}), & t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_1}^N \\ (\underbrace{T_{i_1}^N - t_0,\ t - t_0, \ldots, t - t_0}_{n-1}), & T_{i_1}^N \leqslant t < T_{i_2}^N \\ (T_{i_1}^N - t_0,\ T_{i_2}^N - t_0,\ \underbrace{t - t_0, \ldots, t - t_0}_{n-2}), & t = T_{i_2}^N \end{cases}$$

Продолжая эти рассуждения до момента $T_{i_n}^N$, получим

$$\xi \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant T_{i_n}^N} [\tau(t) + C_V(\bar{x}(t))]$$

где $\tau(t) = (\tau_1(t), \ldots, \tau_n(t))$, $\tau_i(t) = \min\{\xi_i,\ t - t_0\}$. Теорема доказана.

5. Игра группового преследования на быстродействие. Ниже при помощи изложенной методики определяется и исследуется кооперативная дифференциальная игра четырех лиц на быстродействие, по постановке примыкающая к задачам простого преследования [6].

Игра между преследователями P_1, P_2 и убегающими E_1, E_2 протекает на плоскости. Игроки двигаются с постоянными скоростями (α_i для P_i и β_j для E_j) и имеют возможность в каждый момент времени изменить направление движения. Движения преследователей являются зависимыми и описываются уравнениями

(5.1) $$\dot{x}^1 = u_1^1 + u_2^1, \quad \dot{x}^2 = u_1^2 + u_2^2$$

(5.2) $$(u_i^1)^2 + (u_i^2)^2 = \alpha_i^2, \quad i = 1, 2$$

Уравнения движения убегающих игроков E_1 и E_2, соответственно, имеют вид

(5.3) $$\dot{y}^1 = v_1^1, \quad \dot{y}^2 = v_1^2$$

(5.4) $$\dot{z}^1 = v_2^1, \quad \dot{z}^2 = v_2^2$$

(5.5) $$(v_j^1)^2 + (v_j^2)^2 = \beta_j^2, \quad j = 1, 2$$

Таким образом, $u_i = (u_i^1,\ u_i^2)$ — вектор скорости преследователя P_i, а $v_j = (v_j^1,\ v_j^2)$ — вектор скорости убегающего E_j, и в каждый момент времени местоположение преследователей изображается одной точкой

$x = (x^1, x^2)$, а] местоположения убегающих E_1 и E_2 — точками $y = (y^1, y^2)$ и $z = (z^1, z^2)$ соответственно. Движения игроков начинаются в момент $t_0 = 0$ из начальных состояний

(5.6) $$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0$$

не лежащих на одной прямой.

Состояние информации в игре следующее. В каждый момент времени преследователь P_i знает свое местоположение, местоположение игрока E_i и направление его скорости. Убегающий E_j знает свое местоположение и имеет информацию о местоположении игрока P_j.

Определим стратегии игроков. Пара $(\Delta_i, u_i^{\Delta_i})$, где Δ_i — некоторое разбиение $t_i^{\Delta_i} = 0 < t_1^{\Delta_i} < \ldots < t_k^{\Delta_i} < \ldots$ полуинтервала времени $[0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, а $u_i^{\Delta_i}$ — любая вектор-функция, принимающая значения в круге (5.2), называется кусочно-постоянной стратегией (КПС) игрока P_i. Аналогично, КПС игрока E_1 (E_2) состоит из пары (σ, v_1^σ) $((\mu, v_2^\mu))$, где σ (μ) — некоторое разбиение полуинтервала времени $[0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, а v_1^σ (v_2^μ) — любая вектор-функция, принимающая значения в круге (5.5) при $j = 1$ $(j = 2)$.

КПС $(\Delta_1, u_1^{\Delta_1})$, $(\Delta_2, u_2^{\Delta_2})$, (σ, v_1^σ), (μ, v_2^μ) будем обозначать просто через u_1, u_2, v_1, v_2. Примерами КПС служат программные управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, если они выбираются из класса кусочно-постоянных вектор-функций. Эти управления называются программными стратегиями.

Пусть $x(\cdot, x_0, u_1, u_2)$, $y(\cdot, y_0, v_1)$, $z(\cdot, z_0, v_2)$ — траектории систем (5.1), (5.3), (5.4) в ситуации (u_1, u_2, v_1, v_2), исходящие из начальных состояний (5.6).

Назовем $T_1 = T_1(x_0, y_0; u_1, u_2, v_1)$ моментом встречи игроков P_1 и E_1 при стратегиях (u_1, u_2, v_1), если

(5.7) $$T_1 = \min\{t \geqslant t_0 \mid x(t) = y(t)\}$$

Назовем $T_2 = T_2(x_0, z_0; u_1, u_2, v_2)$ моментом встречи игроков P_2 и E_2 при стратегиях (u_1, u_2, v_2), если

(5.8) $$T_2 = \min\{t \geqslant t_0 \mid x(t) = z(t)\}$$

Если не существует такого $t \geqslant t_0$, что $x(t) = y(t)$ $(x(t) = z(t))$, то $T_1(x_0, y_0; u_1, u_2, v_1)$ $(T_2(x_0, z_0; u_1, u_2, v_2))$ полагаем равным $+\infty$. Если T_1 и T_2 существуют и конечны, то точку $x(T_1) = y(T_1)$ $(x(T_2) = z(T_2))$ назовем точкой встречи игрока P_1 (P_2) с игроком E_1 (E_2) при стратегиях (u_1, u_2, v_1) $((u_1, u_2, v_2))$.

Игрок P_i заинтересован во встрече с игроком E_i за кратчайшее время, т. е. P_i стремиться минимизировать величину T_i. Игрок E_j стремится оттянуть время встречи с P_j.

Таким образом, определена игра четырех лиц на быстродействие в нормальной форме, которую обозначим символом $\Gamma(x_0, y_0, z_0)$.

Рассмотрим случай кооперации преследователей и определим характеристическое множество V кооперативной игры согласно принципу построения множества (2.5). Множество $P = \{P_1, P_2\}$ будем называть коалицией преследователей. Стратегиями коалиции P являются вектор-функции вида $u = (u_1, u_2)$, компоненты которых принимают значения в кругах (5.2). Цель коалиции P — минимизация компонент вектора $T = (T_1, T_2)$.

Обозначим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Из (5.1)—(5.5) следует, что если $\alpha \leqslant \beta_1$ ($\alpha \leqslant \beta_2$), то $T_1 = +\infty$ ($T_2 = +\infty$), так как в этом случае, убегая вдоль прямой, проходящей через точки x_0 и y_0 (z_0), игрок E_1 (E_2) всегда может избежать встречи с P_1 (P_2). Поэтому будем считать, что

(5.9) $\alpha > \max\{\beta_1, \beta_2\}$

Известно [6], что для каждого программного управления $v_j(t)$ игрока E_j существует единственное постоянное управление $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ игрока P, которое гарантирует ему встречу с E_j за минимальное время. Это управление предписывает ему движение по лучу, направленному в точку встречи. Управление $\bar{u}$ называется быстродействием в точку встречи с E_j. Параллельным сближением с игроком E_j (Π_j-стратегией) [6] называется способ преследования игрока E_j коалицией P, при котором управление коалиции P в каждый момент времени совпадает с управлением, гарантирующим ему быстродействие в точку встречи с E_j. Π_j-Стратегию коалиции P будем обозначать $u^{\Pi_j} = (u_1^{\Pi_j}, u_2^{\Pi_j})$.

Стратегию $u^{\Pi} = (u_1^{\Pi}, u_2^{\Pi})$ коалиции P будем называть П-стратегией, если она предписывает игроку P параллельное сближение сначала с игроком E_1 (E_2), а затем с игроком E_2 (E_1).

Заметим, что состояние информации в игре $\Gamma(x_0, y_0, z_0)$ позволяет коалиции P использовать П-стратегию.

Построим характеристические множества $V(S, x_0, y_0, z_0)$, $S \subset P$. Для построения характеристического множества $V(P_1, x_0, y_0)$ рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma_{P_1/E_1}(x_0, y_0)$ между P_1 и E_1, в которой цель игрока P_1 — минимизация времени встречи с E_1. По теореме 5 ([6], с. 27) в игре $\Gamma_{P_1/E_1}(x_0, y_0)$ существует оптимальная П-стратегия для P_1 и оптимальная программная стратегия для E_1

$$v_1^* = \beta_1 \frac{y_0 - x_0}{\| y_0 - x_0 \|}, \quad \| y_0 - x_0 \| = \rho(x_0, y_0) =$$
$$= [(x_0^1 - y_0^1)^2 - (x_0^2 - y_0^2)^2]^{1/2}$$

Так как стратегия v_1^* предписывает игроку E_1 убегание от P_2 по прямой, проходящей через точки x_0 и y_0, то оптимальная П-стратегия игрока P_1 совпадает со стратегией погонного преследования, т. е. преследование осуществляется по прямой убегания E_1. Тогда существует обобщенное значение (см. теорему 4 [6], с. 25)

$$\operatorname{val} \Gamma_{P_1/E_1}(x_0, y_0) = \frac{\rho(x_0, y_0)}{\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1}$$

Полагаем (см. (2.5)) $V(P_1, x_0, y_0) = \rho(x_0, y_0)/(\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1)$. Аналогично получим $V(P_2, x_0, z_0) = \rho(x_0, z_0)/(\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2)$.

Вычислим характеристическое множество $V(P, x_0, y_0, z_0)$ в предположении, что коалиция P использует П-стратегию. Порядок преследования игроков E_1 и E_2 коалицией P определяется двумя перестановками $\pi_1 = \{E_1, E_2\}$, $\pi_2 = \{E_2, E_1\}$, т. е. множество всех перестановок в P есть $\pi_P = \{\pi_1, \pi_2\}$. При осуществлении преследования согласно перестановке π_1 игрок E_2 движется по прямой, проходящей через точки s и z_0, где s — точка встречи P и E_1 (оптимальная программная стратегия игрока E_2 в игре на быстродействие $\Gamma_{P/E_2}(s, z_0)$). Эту стратегию игрока E_2 обозначим $\bar{v}_2(s)$. Согласно [7], геометрическое место точек $\{s = (s^1, s^2)\}$ встречи P и E_1 при движении со скоростями α и β_1 и при применении коалицией

P Π_1-стратегии есть окружность Аполлония $A_1^{t_0}$:

$$\left(s^1-\frac{\alpha^2y_0^1-\beta_1^2x_0^1}{\alpha^2-\beta_1^2}\right)^2+\left(s^2-\frac{\alpha^2y_0^2-\beta_1^2x_0^2}{\alpha^2-\beta_1^2}\right)^2=\left(\frac{\alpha\beta_1}{\alpha^2-\beta_1^2}\rho(x_0,y_0)\right)^2$$

Определим, к какой точке $\bar{s}$ окружности $A_1^{t_0}$ должен двигаться E_1, чтобы время встречи с P было максимальным. Как показал В. Д. Ширяев ([6], с. 59), точка $\bar{s}$ является решением задачи

$$\max_{s\in A_1^{t_0}}(\|x_0-s\|+\|s-z_0\|)$$

Следовательно, игрок E_1 в условиях перестановки π_1 должен двигаться в направлении точки $\bar{s}=(\bar{s}^1,\bar{s}^2)$. Эту стратегию E_1 обозначим $\bar{v}_1$.

Лемма 2. Если порядок преследования игроков E_1 и E_2 коалицией P определен перестановкой $\pi_1=\{E_1,E_2\}$, то для любых v_1 и v_2 из (5.5) справедливы неравенства

$$\bar{T}^{E_1}=T^{E_1}(x_0,y_0;\bar{u}^{\Pi},\bar{v}_1)\leqslant T^{E_1}(x_0,y_0;\bar{u}^{\Pi},v_1')$$

$$\bar{T}^{E_2}=T^{E_2}(x_0,y_0,z_0;\bar{u}^{\Pi},\bar{v}_1,\bar{v}_2)\leqslant T^{E_2}(x_0,y_0,z_0;\bar{u}^{\Pi},\bar{v}_1,v_2)$$

где $\bar{u}^{\Pi}$ — П-стратегия коалиции P, предписывающая ему параллельное сближение сначала с E_1, затем с E_2; $\bar{v}_2=\bar{v}_2(\bar{s})$. Через $\bar{T}^{E_j}$ обозначен момент встречи коалиции P с игроком E_j.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству соответствующих неравенств в [6], с. 61.

Рассмотрим теперь перестановку π_2. Аналогично устанавливаем, что игрок E_1 двигается по прямой, проходящей через точки s и y_0, в противоположную от s сторону, где s — точка встречи P и E_2 (эту стратегию игрока E_1 обозначим $\bar{\bar{v}}_1(s)$). Игрок E_2 движется к точке $\bar{\bar{s}}=(\bar{\bar{s}}^1,\bar{\bar{s}}^2)$ (стратегия $\bar{\bar{v}}_2$) окружности Аполлония $A_2^{t_0}$:

$$\left(\bar{\bar{s}}^1-\frac{\alpha^2z_0^1-\beta_2^2x_0^1}{\alpha^2-\beta_2^2}\right)^2+\left(\bar{\bar{s}}^2-\frac{\alpha^2z_0^2-\beta_2^2x_0^2}{\alpha^2-\beta_2^2}\right)^2=\left(\frac{\alpha\beta_2}{\alpha^2-\beta_2^2}\rho(x_0,z_0)\right)^2$$

$$\max_{s\in A_2^{t_0}}(\|x_0-s\|+\|s-y_0\|)=\|x_0-\bar{\bar{s}}\|+\|{}^{=}-y_0\|$$

Лемма 3. Если порядок преследования игроков E_1 и E_2 коалицией P определен перестановкой $\pi_2=\{E_2,E_1\}$, то для любых v_1 и v_2 из (5.5) справедливы неравенства

$$\bar{\bar{T}}^{E_1}=T^{E_1}(x_0,y_0,z_0;\bar{\bar{u}}^{\Pi},v_1',v_2)\leqslant T^{E_1}(x_0,y_0,z_0;\bar{\bar{u}}^{\Pi},v_1',\bar{\bar{v}}_2)$$

$$\bar{\bar{T}}^{E_2}=E^{E_2}(x_0,z_0;\bar{\bar{u}}^{\Pi},\bar{\bar{v}}_2)\leqslant T^{E_2}(x_0,z_0;\bar{\bar{u}}^{\Pi},v_2)$$

где $\bar{\bar{u}}^{\Pi}$ — П-стратегия коалиции P, предписывающая ему параллельное сближение сначала с E_2, затем с E_1; $\bar{\bar{v}}_1=\bar{\bar{v}}_1(\bar{\bar{s}})$. Через $\bar{\bar{T}}^{E_j}$ обозначен момент встречи коалиции P с игроком E_j.

Леммы 2 и 3 показывают, что наилучшим способом убегания для E_1 и E_2 являются следующие способы: в условиях перестановки π_1 игрок E_1 движется в точку $\bar{s}\in A_1^{t_0}$, а игрок E_2 — в диаметрально противоположную от $\bar{s}$ сторону (фигура); в условиях перестановки π_2 игрок E_2 движется в точку $\bar{\bar{s}}\in A_2^{t_0}$, а игрок E_1 — в диаметрально противоположную от $\bar{\bar{s}}$ сторону (фигура). Отсюда (см. (2.5))

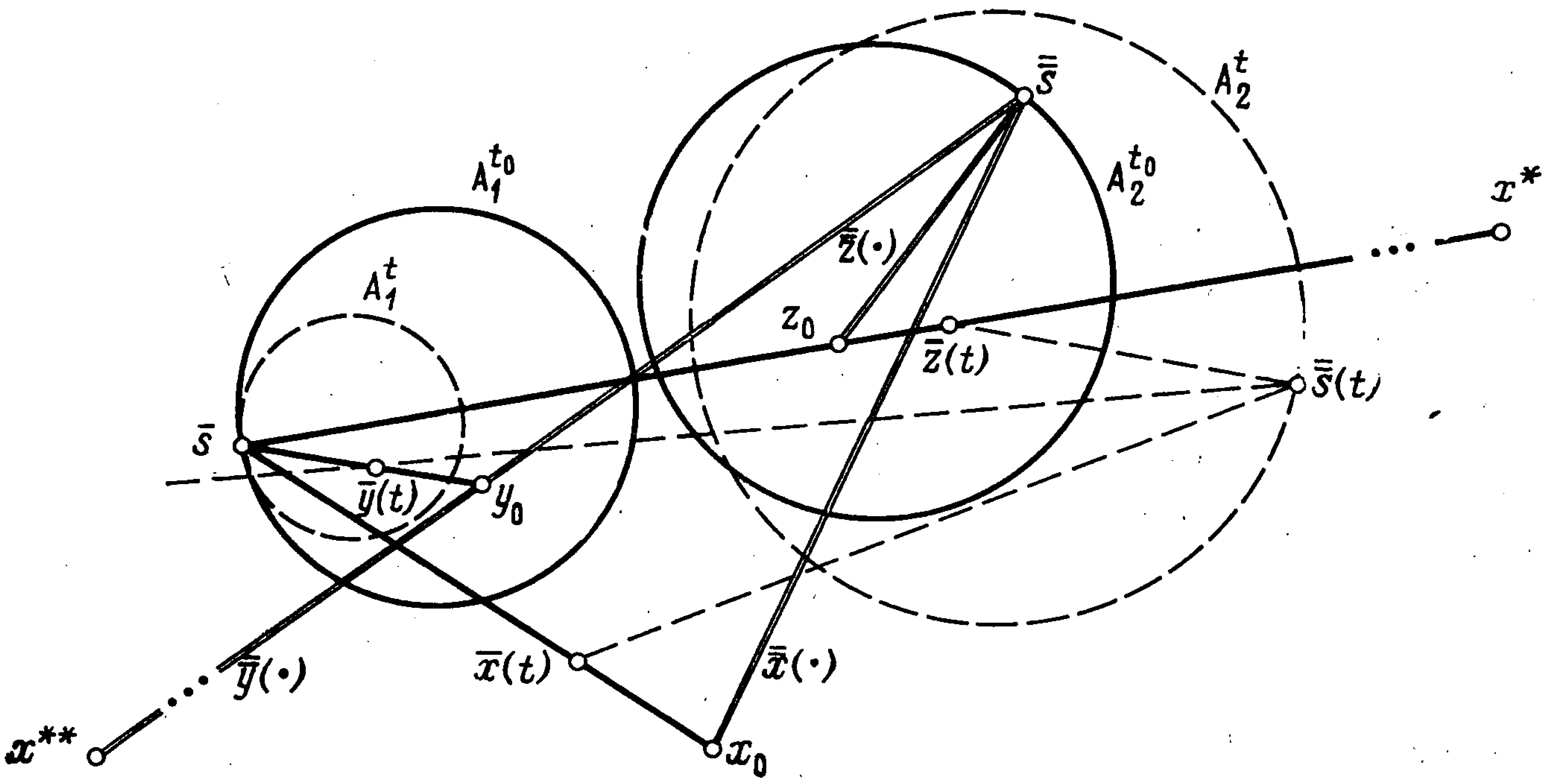
$$V(P,x_0,y_0,z_0)=\{(\bar{T}^{E_1},\bar{T}^{E_2}),(\bar{\bar{T}}^{E_1},\bar{\bar{T}}^{E_2})\}$$

Поскольку стратегии игроков, определяющие характеристические множества, предписывают им прямолинейные движения с постоянными скоростями, то справедливы следующие представления:

$$\bar{T}^{E_1} = \frac{\rho(x_0, \bar{s})}{\alpha} = \frac{\rho(y_0, \bar{s})}{\beta_1}, \qquad \bar{T}^{E_2} = \bar{T}^{E_1} + \frac{\rho(\bar{s}, z')}{\alpha - \beta_2}.$$

$$\bar{\bar{T}}^{E_1} = \bar{\bar{T}}^{E_2} + \frac{\rho(\bar{\bar{s}}, y')}{\alpha - \beta_1}, \qquad \bar{\bar{T}}^{E_2} = \frac{\rho(x_0, \bar{\bar{s}})}{\alpha} = \frac{\rho(z_0, \bar{\bar{s}})}{\beta_2}$$

где z' (y') — местоположение игрока E_2 (E_1) в момент встречи P и E_1 (E_2) в точке $\bar{s}$ $(\bar{\bar{s}})$ в условиях перестановки π_1 (π_2) (фигура). Поскольку $\rho(\bar{s}, z') = \rho(\bar{s}, z_0) + \rho(z_0, z')$, $\rho(z_0, z') = \beta_2 \bar{T}^{E_1}$, а $\rho(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{y}}) = \rho(\bar{\bar{s}}, y_0) + \rho(y_0, \bar{\bar{y}})$,



$\rho(y_0, \bar{\bar{y}}) = \beta_1 \bar{\bar{T}}^{E_2}$, то

$$\bar{T}^{E_2} = \frac{\rho(x_0, \bar{s}) + \rho(\bar{s}, z_0)}{\alpha - \beta_2}, \qquad \bar{\bar{T}}^{E_1} = \frac{\rho(x_0, \bar{\bar{s}}) + \rho(\bar{\bar{s}}, y_0)}{\alpha - \beta_1}$$

где $\bar{T}^{E_2}$ $(\bar{\bar{T}}^{E_1})$ — время встречи P и E_2 (E_1), соответствующее перестановке π_1 (π_2). Очевидно, что

(5.10) $\qquad \bar{T}^{E_1} \leqslant \bar{\bar{T}}^{E_1}, \quad \bar{\bar{T}}^{E_2} \leqslant \bar{T}^{E_2}$

Потребуем выполнения следующих неравенств:

(5.11) $$\frac{\rho(x_0, y_0)}{\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1} \geqslant \frac{\rho(x_0, \bar{\bar{s}}) + \rho(\bar{\bar{s}}, y_0)}{\alpha - \beta_1}$$

(5.12) $$\frac{\rho(x_0, z_0)}{\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2} \geqslant \frac{\rho(x_0, \bar{s}) + \rho(\bar{s}, z_0)}{\alpha - \beta_2}$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия (5.11) и (5.12). Тогда множество V супераддитивно по $S \subset P$, т. е.

(5.13) $\qquad V(P, x_0, y_0, z_0) \supseteq V(P_1, x_0, y_0) \times V(P_2, x_0, z_0)$

Доказательство. Так как множество $V(P_1, x_0, y_0) \times V(P_2, x_0, z_0)$ состоит из одного вектора

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\rho(x_0, y_0)}{\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1}, \frac{\rho(x_0, z_0)}{\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2}\right)$$

то для доказательства леммы достаточно показать справедливость хотя бы одной из двух пар неравенств:

(5.14) $\qquad \bar{T}^{E_j} \leqslant \eta_j, \quad j = 1, 2$

(5.15) $\qquad \bar{\bar{T}}^{E_j} \leqslant \eta_j, \quad j = 1, 2$

Видно, что неравенство (5.14) при $j = 1$ следует из (5.10) и (5.11), а при $j = 2$ — из (5.12). Можно показать также справедливость неравенств (5.15).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5.11) и (5.12). Тогда векторы $\bar{\xi} = (\bar{T}^{E_1}, \bar{T}^{E_2})$, $\bar{\bar{\xi}} = (\bar{\bar{T}}^{E_1}, \bar{\bar{T}}^{E_2})$ являются дележами и принадлежат c-ядру $C_V(x_0, y_0, z_0)$ кооперативной игры $\Gamma^V(x_0, y_0, z_0)$. Других дележей в игре $\Gamma_V(x_0, y_0, z_0)$ нет.

Доказательство. Поскольку $\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}} \in V(P, x_0, y_0, z_0)$, то из неравенств (5.14) и (5.15) следует, что векторы $\bar{\xi}$ и $\bar{\bar{\xi}}$ являются дележами в игре $\Gamma_V(x_0, y_0, z_0)$. Других таких векторов нет. Из неравенства (5.10) следует, что дележи $\bar{\xi}$ и $\bar{\bar{\xi}}$ не доминируют один над другим, т. е. они принадлежат c-ядру $C_V(x_0, y_0, z_0)$.

Определение 8. Траектория $\bar{x}(\cdot) = x(\cdot, x_0, \bar{u}^{\Pi})$ $(\bar{\bar{x}}(\cdot) = x(\cdot, x_0, \bar{\bar{u}}^{\Pi}))$ системы (5.1), соответствующая стратегии $\bar{u}^{\Pi}$ $(\bar{\bar{u}}^{\Pi})$ коалиции P, т. е. $\bar{x}(t_0) = x_0$, $\bar{x}(\bar{T}^{E_1}) = \bar{s}$, $\bar{x}(\bar{T}^{E_2}) = x^*$ $(\bar{\bar{x}}(t_0) = x_0$, $\bar{\bar{x}}(\bar{\bar{T}}^{E_2}) = \bar{\bar{s}}$, $\bar{\bar{x}}(\bar{\bar{T}}^{E_1}) = x^{**})$, где x^* (x^{**}) — точка встречи P и E_2 (E_1) в условиях перестановки π_1 (π_2), когда E_2 (E_1) применяет стратегию $\bar{v}_2 = \bar{v}_2(\bar{s})$ $(\bar{\bar{v}}_1 = \bar{\bar{v}}_1(\bar{\bar{s}}))$ (на фигуре эта траектория изображена ломаной $x_0\bar{s}x^*$ $(x_0\bar{\bar{s}}x^{**})$), называется условно-оптимальной траекторией.

Определение 9. Если при движении по траектории $\bar{x}(\cdot)(\bar{\bar{x}}(\cdot))$ дележ $\bar{\xi}$ $(\bar{\bar{\xi}})$ динамически устойчив (в смысле определения 5), то траектория $\bar{x}(\cdot)$ $(\bar{\bar{x}}(\cdot))$ называется оптимальной траекторией.

Через $\bar{y}(\cdot) = y(\cdot, y_0, \bar{v}_1)$ $(\bar{z}(\cdot) = z(\cdot, z_0, \bar{v}_2))$ будем обозначать траекторию системы (5.3) ((5.4)), соответствующую стратегии $\bar{v}_1(\bar{v}_2)$ игрока E_1 (E_2), применяемую им в условиях перестановки π_1, т. е. $\bar{y}(t_0) = y_0$, $\bar{y}(\bar{T}^{E_1}) = \bar{s}$ $(\bar{z}(t_0) = z_0$, $\bar{z}(\bar{T}^{E_2}) = x^*)$ (на фигуре траектория $\bar{y}(\cdot)$ $(\bar{z}(\cdot))$ изображена отрезком $y_0\bar{s}$ (z_0x^*)).

Пусть $t \in [t_0, \bar{T}^{E_1})$. Рассмотрим текущую игру $\Gamma_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$, начинающуюся из состояний $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$. По определению

$$V(P_1, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{y}(t))}{\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1}$$

$$V(P_2, \bar{x}(t), \bar{z}(t)) = \frac{\rho(\bar{x}(t)), \bar{z}(t))}{\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2}$$

Как следует из определения П-стратегии $\bar{u}^{\Pi}$, отрезок, соединяющий точки $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$, параллелен отрезку, соединяющему точки x_0 и y_0, для всех $t \in [t_0, \bar{T}^{E_1})$. Следовательно, геометрическое место точек встречи P и E_1 (окружность Аполлония A_1^t) в текущей игре $\Gamma_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ содержится внутри окружности $A_1^{t_0}$ и касается с ней в точке $\bar{s}$. Поэтому

$$V(P, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = \{\bar{\xi}^t, \bar{\eta}^t\}$$

$$\bar{\xi}^t = (\bar{\xi}_1^t, \bar{\xi}_2^t) = \left(\frac{\rho(\bar{y}(t), \bar{s})}{\beta_1}, \frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{s}) + \rho(\bar{s}, \bar{z}(t))}{\alpha - \beta_2}\right)$$

$$\bar{\eta}^t = (\bar{\eta}_1^t, \bar{\eta}_2^t) = \left(\frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{\bar{s}}(t)) + \rho(\bar{\bar{s}}(t), \bar{y}(t))}{\alpha - \beta_1}, \frac{\rho(\bar{z}(t), \bar{\bar{s}}(t))}{\beta_2}\right)$$

где $\bar{\bar{s}}(t)$ — точка окружности Аполлония A_2^t, такая, что

$$\max_{s(t) \in A_2^+} (\|\bar{x}(t) - s(t)\| + \|s(t) - \bar{y}(t)\|) = \|\bar{x}(t) - \bar{\bar{s}}(t)\| + \\ + \|\bar{\bar{s}}(t) - \bar{y}(t)\|$$

Здесь $\bar{\xi}_1^t$ $(\bar{\xi}_2^t)$ — время встречи P и E_1 (E_2) в игре $\Gamma_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ в условиях перестановки π_1, а $\bar{\eta}_1^t$ $(\bar{\eta}_2^t)$ — время встречи P и E_1 (E_2) в игре $\Gamma(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ в условиях перестановки π_2. Очевидно, что

(5.16) $\quad \bar{\xi}_1^t \leqslant \bar{\eta}_1^t, \quad \bar{\eta}_2^t \leqslant \bar{\xi}_2^t$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

(5.17) $$\frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{z}(t))}{\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2} \geqslant \frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{s}) + \rho(\bar{s}, \bar{z}(t))}{\alpha - \beta_2}$$

Обозначим через $\hat{y}$ точку встречи P_1 и E_1 в игре $\Gamma_{P_1/E_1}(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. Тогда

$$\frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{y}(t))}{\alpha_1-\alpha_2-\beta_1}=\frac{\rho(\bar{x}(t), y^\wedge)}{\alpha_1-\alpha_2}$$

Так как игрок E_1 в игре $\Gamma_{P_1/E_1}(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ добивается максимального времени встречи с P, убегая по прямой, проходящей через точки $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ (с постоянной скоростью β_1), то $\rho(\bar{y}(t), \hat{y}) \geqslant \rho(\bar{y}(t), \bar{s})$ (в противном случае E_1 должен был убегать в направлении точки $\bar{s}$). Отсюда следует, что $\rho(\bar{x}(t), \hat{y}) \geqslant \rho(\bar{x}(t), \bar{s})$. Поэтому

$$\frac{1}{\alpha}\rho(\bar{x}(t), \bar{s}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\rho(\bar{x}(t), y^\wedge) \leqslant \frac{1}{\alpha-\alpha_2}\rho(\bar{x}(t), y^\wedge)$$

Так как

$$\frac{1}{\alpha}\rho(\bar{x}(t), \bar{s})=\frac{1}{\beta_1}\rho(\bar{y}(t), \bar{s})$$

то получаем

(5.18) $$\frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{y}(t))}{\alpha_1-\alpha_2-\beta_1} \geqslant \frac{\rho(\bar{y}(t), \bar{s})}{\beta_1}$$

Неравенства (5.17) и (5.18) показывают, что вектор $\bar{\xi}^t$ является дележом в игре $\Gamma_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$. Из неравенств (5.16) следует, что дележ $\bar{\xi}^t$ не доминируется, т. е.

(5.19) $$\bar{\xi}^t \in C_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)), \quad t_0 \leqslant t < \bar{T}^{E_1}$$

Рассмотрим теперь отрезок $[\bar{T}^{E_1}, \bar{T}^{E_2}]$. На этом отрезке вектор $\bar{\eta}^t$ не определен, так как игрок E_1 уже пойман коалицией P (в момент $\bar{T}^{E_1}$ в точке $\bar{s}$) и потому преследование убегающих согласно перестановке π_2 не имеет смысла. Поскольку при $t \in [\bar{T}^{E_1}, \bar{T}^{E_2}]$ считаем, что $\rho(\bar{x}(t), \bar{s}) = \rho(\bar{y}(t), \bar{s}) = 0$, то вектор

$$\bar{\xi}^t=\left(0, \frac{\rho(\bar{x}(t), \bar{z}(t))}{\alpha-\beta_2}\right)$$

является единственным дележом в текущей игре $\Gamma_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$ и, следовательно

(5.20) $$\bar{\xi}^t \in C_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)), \quad \bar{T}^{E_1} \leqslant t \leqslant \bar{T}^{E_2}$$

Дележ $\bar{\xi} \in C_V(x_0, y_0, z_0)$ можно представить следующим образом:

(5.21) $$\bar{\xi}_i=\begin{cases} t+\bar{\xi}_i^t, & t_0 \leqslant t \leqslant \bar{T}^{E_1} \\ \tau_i(t)+\bar{\xi}_i^t, & \bar{T}^{E_1} < t \leqslant \bar{T}^{E_2}; \quad i=1,2 \end{cases}$$

$$\tau_1(t)=\bar{T}^{E_1}, \quad \tau_2(t)=t, \quad \bar{\xi}^t=(\bar{\xi}_1^t, \bar{\xi}_2^t) \in C_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$$

Из (5.19)—(5.21) получим

$$\bar{\xi} \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant \bar{T}^{E_2}} [\tau(t)+C_V(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))]$$

$$\tau(t)=(\tau_1(t), \tau_2(t)), \quad \tau_1(t)=\min\{\bar{T}^{E_1}, t\}, \quad \tau_2(t)=t$$

Следовательно, вдоль условно-оптимальной траектории $\bar{x}(\cdot)$ дележ $\bar{\xi}$, принадлежащий c-ядру $C_V(x_0, y_0, z_0)$, динамически устойчив.

Рассмотрим вместо $\bar{x}(\cdot)$ условно-оптимальную траекторию $\bar{\bar{x}}(\cdot)$ и, полагая, что на полуинтервале $[t_0, \bar{\bar{T}}^{E_2})$

(5.22) $$\frac{\rho(\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{y}}(t))}{\alpha_1-\alpha_2-\beta_1} \geqslant \frac{\rho(\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{s}})+\rho(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{y}}(t))}{\alpha-\beta_1}$$

(здесь $\bar{\bar{z}}(\cdot)$ ($\bar{\bar{y}}(\cdot)$) — траектории системы (5.4) ((5.3)), соответствующая стратегии $\bar{v}_2$ ($\bar{v}_1$) игрока E_2 (E_1), применяемой им в условиях перестановки

π_2), аналогично получим, что

$$\bar{\bar{\xi}} \in \bigcap_{t_0 \leqslant t \leqslant \bar{\bar{T}}^{E_1}} [\theta(t) + C_V(\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{y}}(t), \bar{\bar{z}}(t))]$$

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t)), \ \theta_1(t) = t, \ \theta_2(t) = \min\{\bar{\bar{T}}^{E_2}, t\}$$

Таким образом, справедлива теорема о динамической устойчивости c-ядра в игре $\Gamma_V(x_0, y_0, z_0)$.

Теорема 4. Пусть на полуинтервале $[t_0, \bar{T}^{E_1})$ выполнено условие (5.17), а на полуинтервале $[t_0, \bar{\bar{T}}^{E_2})$ условие (5.22). Тогда в игре $\Gamma_V(x_0, y_0, z_0)$ существует динамически устойчивое (в смысле определения 5) c-ядро $C_V(x_0, y_0, z_0) = \{(\bar{T}^{E_1}, \bar{T}^{E_2}), \ (\bar{\bar{T}}^{E_1}, \bar{\bar{T}}^{E_2})\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петросян Л. А., Данилов Н. Н.* Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами.— Вестн. ЛГУ, 1979, № 1, вып. 1, с. 52—59.
2. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 252 с.
3. *Нейман Дж., фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.
4. *Петросян Л. А.* Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками.— Вестн. ЛГУ, 1977, № 19, вып. 4, с. 46—52.
5. *Данилов Н. Н.* Принципы оптимальности в кооперативных дифференциальных играх с нетрансферабельными выигрышами.— Проблемы управления и теория информации, 1982, т. 11, № 1, с. 29—40.
6. *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983. 142 с.
7. *Петросян Л. А.* Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 1, с. 52—54.

Кемерово

Поступила в редакцию 2.II.1985