

Отсутствие в общем случае дополнительного интеграла для уравнений движения двузвенного маятника позволяет прояснить природу сложного характера движения этой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илев И. О линейных интегралах голономной механической системы.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 751—755.
2. Сумбатов А. С. Об интегрируемости уравнения Гамильтона—Якоби в обобщенных координатах.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 13—19.
3. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М: Наука, 1971. 771 с.
4. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
5. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1980, т. 41, с. 287—303.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1984

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

Андрианов И. В.

Описывается последовательная процедура вывода уравнений типа уравнений Бергера (УБ), опирающаяся на метод осреднения [1—3], для прямоугольных и круглых изотропных пластин, изотропных и трехслойных пологих оболочек. Показано, что малость второго инварианта тензора деформаций имеет случайный характер. Гипотеза Бергера (ГБ) [4] в чистом виде справедлива лишь для изотропных однослойных и трансверсально-изотропных трехслойных пластин, а для последовательного построения упрощенной теории по Бергеру нужна идея осреднения.

1. Приведем сначала несколько интуитивных соображений (их полезность наглядно продемонстрирована в [5], где приведены соображения о применении метода осреднения при наличии быстрой изменяемости в нелинейных колебательных системах). Справедливость ГБ для изотропных прямоугольных пластин подтверждена большим количеством расчетов [4—6, 7], и не вызывает сомнения, что вклад в потенциальную энергию второго инварианта тензора деформаций I_2 существенно меньше вклада первого инварианта I_1 . Учитывая, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1/4 \varepsilon_{12}^2 \\ \varepsilon_1 &= u_x + 1/2 w_x^2, \quad \varepsilon_2 = v_y + 1/2 w_y^2 \\ \varepsilon_{12} &= u_y + v_x + w_x w_y \end{aligned}$$

соответствующее неравенство для прямоугольной ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) пластины можно переписать так:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \int_0^b \int_0^a (A + B_1 + C) dx dy &\ll (1 - \nu) \int_0^b \int_0^a (A - B_2) dx dy \\ A &= 2u_x u_y + w_y^2 u_x + w_x^2 v_y, \quad B_1 = B_{11} + B_{12}, \quad B_2 = 1/2 B_{11} + B_{22} \\ B_{11} &= u_x^2 + u_y^2, \quad B_{12} = u_x w_x^2 + v_y w_y^2 \\ B_{22} &= (u_y + v_x) w_x w_y, \quad C = 1/4 (w_x^2 + w_y^2)^2 \end{aligned}$$

Основное различие между левой и правой частями неравенства (1.1) связано со слагаемым C . Действительно, пусть на краях пластины равны нулю перемещения и изгибающие моменты и рассматривается задача о собственных колебаниях. Применяя метод Бубнова — Галеркина с аппроксимацией первого приближения

$$(u, v, w) = A_i(t) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

убеждаемся, что вклад в потенциальную энергию выражений $(A + B_1)$ и $(A - B_2)$ примерно одинаков (во всяком случае, по порядку величин), за исключением специального случая $a = b$, $m = n$. Значит, для выполнения неравенства (1.1) необходимо, чтобы вклад слагаемого C в потенциальную энергию был преобладающим. Это будет при $m \approx n \gg 1$. Тогда составляющая C велика по абсолютной величине за счет дифференцирования ($C \gg B_{11}$). Кроме того, член C содержит среднюю часть, а члены B_{11} , B_{22} — только быструю, поэтому интегралы от них малы. Приведенные соображения наводят на мысль использовать для построения УБ метод осреднения [1—3] при большой изменчивости по пространственным переменным.

Идея об использовании метода осреднения в рассматриваемом случае высказывалась ранее [8, 9], однако последовательная реализация ее проведена не была.

2. Уравнения движения прямоугольной пластины запишем в безразмерном виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & [12(1 - \nu^2)]^{-1} \varepsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 w' + \varepsilon (F_{\xi\xi}' w_{\eta\eta}' - 2F_{\xi\eta}' w_{\xi\eta}' + F_{\eta\eta}' w_{\xi\xi}') + w_{\tau\tau}' = 0 \\ & \nabla^2 \nabla^2 F' + \varepsilon (w_{\xi\xi}' w_{\eta\eta}' - w_{\xi\eta}'^2) = 0 \\ & F_{\eta\eta}' = (1 - \nu^2)^{-1} [u_{\xi\xi}' + 1/2 \varepsilon w_{\xi\xi}'^2 + \nu (v_{\eta\eta}' + 1/2 w_{\eta\eta}'^2)] \\ & F_{\xi\xi}' = (1 - \nu^2)^{-1} [v_{\eta\eta}' + 1/2 \varepsilon w_{\eta\eta}'^2 + \nu (u_{\xi\xi}' + 1/2 w_{\xi\xi}'^2)] \\ & F_{\xi\eta}' = -1/2 (1 + \nu)^{-1} (u_{\eta\eta}' + v_{\xi\xi}' + \varepsilon w_{\xi\eta}' w_{\eta\xi}') \\ & \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad (\xi, \eta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right), \quad F' = \frac{F}{Eha} \\ & (u', v', w') = \frac{(u, v, w)}{h}, \quad \tau = at \sqrt{\frac{\rho(1 - \nu^2)}{E}}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Понятие быстрой изменчивости в нелинейной системе естественнее всего ввести при помощи новой быстрой переменной, $\varepsilon^\alpha \theta(\xi, \eta)$ ($\alpha < 0$), рассматривая ее как независимую. Конкретное значение α определяется в процессе построения предельных ($\varepsilon \rightarrow 0$) систем. Теперь, в соответствии с методом двух масштабов [1—3], получаем (оставляя за медленными переменными обозначения ξ, η)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^\alpha \theta_\xi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon^\alpha \theta_\eta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Представим функции F', w', u', v' в виде сумм медленных (т. е. зависящих только от медленных независимых переменных) и быстрых периодических с неизвестным периодом $\theta_0(\xi, \eta)$ составляющих [1—3]

$$F' = F^0 + \varepsilon^{\beta_1} F^1, \quad w' = w^0 + \varepsilon^{\beta_2} w^1, \quad u' = u^0 + \varepsilon^{\beta_3} u^1, \quad v' = v^0 + \varepsilon^{\beta_4} v^1$$

Здесь величины с индексом 0 — функции от переменных ξ, η , а с индексом 1 — от $\xi, \eta, \varepsilon^\alpha \theta$.

Введем также соотношения

$$F^0 \sim \varepsilon^{\gamma_1} w^0, \quad w^0 \sim \varepsilon^{\gamma_2}, \quad u^0 \sim \varepsilon^{\gamma_3}, \quad v^0 \sim \varepsilon^{\gamma_4}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (\dots) \sim \varepsilon^\delta (\dots)$$

где $\beta_i, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta$ — параметры асимптотического интегрирования.

Подбор непротиворечивых значений этих параметров осуществляется из условий непротиворечивости предельных ($\varepsilon \rightarrow 0$) систем.

Нетривиальная предельная система получается из исходной (2.1) при $\alpha = -1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 < 0$, $\beta_3, \beta_4 \geq -1/2$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3, \gamma_4 > 0$, $\delta = 0$ и имеет вид

$$(2.2) \quad [12(1 - \nu^2)]^{-1} w_{\theta\theta\theta\theta}^1 (\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2)^2 + \Lambda w_{\theta\theta}^1 + w_{\tau\tau}^1 = 0$$

$$(2.3) \quad F_{\theta\theta\theta\theta}^1 (\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2) = 0$$

$$\Lambda = F_{\xi\xi}^0 \theta_\eta^2 - 2F_{\xi\eta}^0 \theta_\xi \theta_\eta + F_{\eta\eta}^0 \theta_\xi^2$$

$$\varepsilon^{-1} F_{\theta\theta}^1 \theta_\eta^2 + F_{\eta\eta}^0 = 1/2 (1 - \nu^2)^{-1} (w_\theta^1)^2 (\theta_\xi^2 + \nu \theta_\eta^2)$$

$$\varepsilon^{-1} F_{\theta\theta}^1 \theta_\xi^2 + F_{\xi\xi}^0 = 1/2 (1 - \nu^2)^{-1} (w_\theta^1)^2 (\theta_\eta^2 + \nu \theta_\xi^2)$$

$$\varepsilon^{-1} F_{\theta\theta}^1 \theta_\xi \theta_\eta + F_{\xi\eta}^0 = -1/2 (1 + \nu)^{-1} (w_\theta^1)^2 \theta_\xi \theta_\eta$$

Отметим, что предельные [системы, описывающие динамику и статику линейного и нелинейного стержней, линейной пластины в данном случае интереса не представляют и поэтому не приводятся.

Определить член Λ в уравнении (2.2) можно при помощи оператора усреднения по θ

$$\langle \cdot \rangle = \theta_0^{-1} \int_0^{\theta_0} (\cdot) d\theta$$

При этом

$$\langle F_{\theta\theta} \rangle = 0, \quad \langle F_{\xi\xi}^0, F_{\eta\eta}^0, F_{\xi\eta}^0 \rangle = (F_{\xi\xi}^0, F_{\eta\eta}^0, F_{\xi\eta}^0)$$

$$\langle \Lambda \rangle = 1/2 (1 - \nu^2)^{-1} \langle w^{Q1} \rangle^2 (\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2)$$

В исходных переменных

$$\langle w_\theta^1 \rangle^2 (\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2) = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a (w_x^2 + w_y^2) dx dy + O(\epsilon)$$

и уравнение (2.2) переходит в УБ

$$(2.4) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w + N \nabla^2 w + \rho h w_{tt} = 0$$

$$N = \frac{B}{2ab} \int_0^b \int_0^a (w_x^2 + w_y^2) dx dy$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{E h^2 B}{12}, \quad B = \frac{E h}{1 - \nu^2}$$

которое получается следовательно, без использования ГБ. В отличие от работы [10] уравнение (2.4) получено непосредственно из уравнений Кармана.

Уравнение совместности деформаций линеаризуется

$$(2.5) \quad \nabla^4 F = 0$$

Подобное упрощение при расчете нелинейных пластин предлагал еще Сен-Венан [11], однако уравнение равновесия сохранялось им в прежней форме, что, как видно из приведенных выкладок, непоследовательно.

Аналогично описанному можно получить УБ для вязкоупругой пластины (R — ядро релаксации)

$$D \Gamma \nabla^2 \nabla^2 w - \Gamma N \nabla^2 w + \rho h w_{tt} = 0, \quad \Gamma \varphi = \varphi + \int_0^{\tau_1} R (\tau - \tau_1) \varphi d\tau_1$$

Для круглых пластин ($r_0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) получаем уравнение (2.4), где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad N = \frac{B}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (w_r^2 + w_\theta^2) dr d\theta$$

3. Рассмотрим теперь пологую изотропную оболочку с кривизнами k_1 , k_2 и линейными размерами в плане a , b . Считая, что $a \sim b$, $k_i \sim 1$ и проводя выкладки, аналогичные случаю пластины, приходим к уравнениям типа УБ для пологой оболочки

$$(3.1) \quad D \nabla^4 w + h \nabla_k F + N \nabla^2 w + \frac{B}{ab} \left[w_{xx} \int_0^b \int_0^a (k_1 + \nu k_2) w dx dy + \right.$$

$$\left. + w_{yy} \int_0^b \int_0^a (k_2 + \nu k_1) w dx dy \right] + \rho h w_{tt} = 0, \quad \nabla^4 F + E \nabla_k w = 0, \quad \nabla_k = k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Подчеркнем, что уравнения (3.1) допускают все естественные предельные переходы: к пластине Бергера, нелинейному стержню Кирхгоффа [12, 13], пологой арке [12] и, наконец (камень преткновения основанных на ГБ уравнений пологих оболочек [6, 7, 14—20]), к линейным уравнениям пологих оболочек. Отметим также, что для уравнений (3.1) ГБ не верна (энергия второго инварианта тензора деформаций не мала по сравнению с энергией первого инварианта).

Получим еще приближенные уравнения для трансверсально-изотропных трехслойных оболочек. Исходные нелинейные уравнения приведены в [21], а оценки входящих в них параметров — в [22, 23]. Введем соотношения

$$D_0 = D \theta_0, \quad \mu = h^2 k_1 \beta^{-2}, \quad \rho_1 = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k$$

где θ и μ — параметры, характеризующие изгибную жесткость несущих слоев и податливость трехслойного пакета сдвигу (формулы для подсчета θ , θ_0 , β приведены в [21]); ρ_k , h_k — удельные плотности материалов и толщины k -го слоя.

Если принять оценки $\theta_0 \sim 1$, $\mu \sim h/R$, $\theta \sim 1$, то приближенные уравнения примут вид

$$(3.2) \quad D_0 (1 - \{\theta\beta^{-1}R^2\nabla^2\}) \nabla^2\nabla^2X + h\nabla_k F + N\nabla^2w + \\ + \frac{B}{ab} \left[w_{xx} \int_0^b \int_0^a (k_1 + \nu k_2) w dx dy + w_{yy} \int_0^b \int_0^a (k_2 + \nu k_1) w dx dy \right] + \rho_1 w_{tt} = 0$$

$$(3.3) \quad \nabla^4 F + E\nabla_k w = 0$$

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} (1 - \nu) \mu R^2 \nabla^2 \varphi = \varphi, \quad w = (1 - \mu R^2 \nabla^2) X$$

Для пластины ($k_1 = k_2 = 0$) уравнения (3.2), (3.4) совпадают с полученными ранее в [24, 25] на основе ГБ. Если $\theta < 1$, в уравнении (3.2) должен быть отброшен член в фигурных скобках.

Итак, ГБ в ее первоначальном виде верна только для изотропных однослойных и трансверсально-изотропных слоистых пластин. Истинный смысл УБ состоит в том, что они представляют собой первые приближения метода осреднения при быстрой изменчивости по пространственным переменным. Это дает возможность эффективно использовать УБ при обобщении асимптотического метода В. В. Болотина на нелинейный случай [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Luke J. C. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1966, v. 292, No. 1430, p. 403—412.
2. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Нелинейные волны/Под ред. Л. С. Лейбовича и А. Сиббасса. М.: Мир, 1977. 319 с.
4. Berger H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates.— J. Appl. Mech., 1955, v. 22, No. 4, p. 465—472.
5. Блехман И. К., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наук. думка, 1976. 269 с.
6. Prathar G. On the Berger approximation: a critical re-examination.— J. Sound and Vibr., 1979, v. 66, No. 2, p. 149—154.
7. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек.— В кн.: Некоторые прикладные задачи теории упругих пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1981 с. 94—121.
8. Сибукеев Ш. М. Колебания упругих пластин при больших прогибах.— Тр. Ташкент. ун-та, 1966, вып. 275, с. 132—138.
9. Корнев В. М. Об упрощенной модели нелинейной теории оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1981, вып. 49, с. 56—62.
10. Андрианов И. В. К теории пластин Бергера.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 174—176.
11. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Приближенный анализ анизотропных трехслойных пластин конечного прогиба.— Механика композитн. материалов, 1980, № 1, с. 42—48.
12. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777с.
13. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Приближенные уравнения осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1981, т. 17, вып. 8, с. 25—30.
14. Jones R. Remarks on the approximate analysis of the nonlinear behavior of shallow shells.— J. Struct. Mech., 1975, v. 3, No. 2, p. 157—161.
15. Nowinski J. L., Ismail I. A. Certain approximate analyses of large deflections of cylindrical shells.— Z. angew. Math. und Phys., 1964, B. 15, N 15, S. 449—455.
16. Nash W. A., Modeer J. R. Certain approximate analyses of the nonlinear behavior of plates and shallow shells.— In: Proc. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells. Delft, 1959. Amsterdam: North-Holland, 1960, p. 331—354.
17. Аннин Б. Д., Хлуднев А. М. Существование и единственность решения задач о нелинейных колебаниях стержня и пластинки.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 39—43.
18. Хлуднев А. М. Об одном уравнении теории пологих оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, вып. 21, с. 84—98.
19. Ramachandran J. Vibration of shallow spherical shells of large amplitudes.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 3, p. 811—812.
20. Vucso D., Jones R., Masumdar J. The dynamic analysis of shallow spherical shells.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1978, v. 45, No. 3, p. 690—691.
21. Григолюк Э. И., Чулков В. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170с.

22. Григолюк Э. И., Корнев В. М. Асимптотическое исследование уравнений несимметричного изгиба многослойной цилиндрической оболочки. — В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, с. 74—82.
23. Вахромеев Ю. М., Корнев В. М. К асимптотическому расчленению напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, вып. 22, с. 188—194.
24. Алексеева Н. К. Приближенный метод определения собственных частот гибких прямоугольных пластин. — Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 6, с. 68—72.
25. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Приближенный анализ нелинейных трансверсально-изотропных трехслойных пластин. — Механика композитн. материалов, 1980, № 2, с. 272—276.
26. Андрианов И. В., Маневич Л. И., Холод Е. Г. О нелинейных колебаниях прямоугольных пластин. — Строит. механика и расчет сооружений, 1979, № 5, с. 48—51.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
9.X.1984

II ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО УСТОЙЧИВОСТИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Научный совет АН СССР по проблемам прочности и пластичности, Секция математики, механики и астрономии НТС Минвуза СССР, Хозрасчетное научное объединение Минвуза РСФСР и Калининский политехнический институт проводят в Калининске 27—30 июня 1986 г. II Всесоюзный симпозиум по устойчивости в механике деформируемого твердого тела.

Работа симпозиума будет проходить в трех секциях.

1. Устойчивость при пластических деформациях.
2. Устойчивость при ползучести.
3. Устойчивость при упругих деформациях (нелинейные проблемы).

На пленарные и секционные заседания будут вынесены заказные обзорные доклады и доклады, содержащие существенно новые результаты и представляющие достаточно общий интерес. В рамках каждой секции будут представлены также стендовые доклады с их обсуждением на заседаниях.

К заявке на участие в работе симпозиума необходимо прилагать: — сопроводительное письмо от организации с разрешением на участие в работе симпозиума и документы, необходимые для опубликования тезисов;

— подписанные автором тезисы доклада, дающие ясное представление о содержании доклада, сути проблемы, методах исследований и новизне полученных результатов (в 2 экз., объемом не более 2 стр. машинописного текста через 2 интервала без формул и иллюстраций); в названии рекомендуется избегать оборотов: «К вопросу...», «О влиянии...», «Об исследовании...» и т. п.;

— сведения об авторах: фамилия, имя, отчество, ученая степень, звание, место работы, должность, служебные и домашний телефоны, адрес для переписки.

В связи с регламентированным числом участников Оргкомитет отберет ограниченное число докладов. От каждого автора в программу может быть включено не более двух докладов (в том числе один в соавторстве). Не допускается представление одного доклада от имени более чем трех авторов.

Заявки на участие в работе симпозиума направлять по адресу: 170035 Калинин, Первомайская наб., 22, Калининский политехнический институт, Оргкомитет II Всесоюзного симпозиума по устойчивости. Телефоны для справок: 1-15-35, 1-63-63.

ОРГКОМИТЕТ

Технический редактор В. М. Пахомова

Сдано в набор 22.11.85 Подписано к печати 14.01.86 Т-03413 Формат бумаги 70×108^{1/16}
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Усл. кр.-отт. 34,7 тыс. Уч.-изд. л. 16,2 Бум. л. 5,5
Тираж 2225 экз. Зак. 2026

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6