Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 62-50

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Бербюк В. Е.

Исследуется задача синтеза оптимального управления движением нелинейной нестационарной системы. Качество управления оценивается функционалом смешанного типа (функционалом Больца [1]). Разработана методика синтеза оптимальных систем управления в вариационных задачах с фиксированным временем и свободным правым концом, основанная на использовании первых интегралов уравнений движения свободного неуправляемого объекта. Эффективность предложенной методики иллюстрируется примерами.

Задача синтеза, т. е. проблема представления оптимального управления как функции координат системы, рассматривалась во многих работах, например, [1—9] и др.

1. Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается уравнениями

$$x^{\cdot} = f(x, t) + b(x, t)\, u(x, t) \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор фазовых координат; точкой обозначено дифференцирование по времени t; $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — r-мерный вектор управляющих функций, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $b = (b_{ij})$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r)$ — соответственно n-мерная вектор-функция и функциональная матрица размера $n \times r$, заданные на некотором открытом множестве Ω евклидового пространства E_{n+1}, в котором координатами точки являются числа $x_1, \ldots, x_n, t$. В дальнейшем f, b, u предполагаем такими, что функция $f_* = f(x, t) + b(x, t)\, u(x, t)$ и ее частные производные $\partial f_*/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и непрерывны на открытом множестве Ω.

Произвольную вектор-функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям на $f_*(x, t)$, со значениями в евклидовом пространстве E_r будем называть допустимым управлением.

Пусть заданы t_1, t_2 — моменты начала и окончания процесса управления и начальное состояние объекта

$$x(t_1) = x_a \tag{1.2}$$

Обозначим через $v_1(x, t), \ldots, v_k(x, t)$, $k \leqslant n$ независимые первые интегралы [10] уравнений движения свободного (неуправляемого) объекта, т. е. системы уравнений

$$x^{\cdot} = f(x, t) \tag{1.3}$$

Пусть $W(y_1, \ldots, y_k)$ — произвольная заданная дифференцируемая функция. Выберем в качестве аргументов y_m первые интегралы $v_m(x, t)$ и рассмотрим функционал

$$\Phi = W\{v[x(t_2), t_2]\} + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{r} \left\{k_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W[v(x, t)]}{\partial x_i} b_{ij}(x, t)\right\}^2 dt + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{u_j(x, t)}{k_j}\right]^2 dt \tag{1.4}$$

где $v(x, t) = \{v_1(x, t), \ldots, v_k(x, t)\}$ — вектор первых интегралов, $k_1, \ldots, k_r$ — заданные коэффициенты.

Первое слагаемое функционала (1.4) (терминальная часть) — функция от значений фазовых координат в конце процесса управления и конечного момента времени t_2, второе — характеризует свойства как самого объекта, так и его системы управления. Третий член функционала Ф может быть интерпретирован как затраты на управление движением объекта [9].

Более полно физический смысл первых двух слагаемых критерия качества (1.4) может быть проявлен при конкретном выборе функции W и первых интегралов $v_m(x, t)$. Например, в случае, когда свободный объект является консервативной механической системой и в качестве функции $W[v(x, t)]$ выбран интеграл энергии, первое слагаемое функционала (1.4) определяет величину полной механической энергии объекта в конце процесса управления, а второе слагаемое характеризует скорость рассеивания механической энергии при управляемом движении рассматриваемой системы.

Задача 1. Определить допустимое управление $u_*(x, t)$, перемещающее объект за заданное время $t_2 - t_1$ в силу уравнений (1.1) из начального состояния (1.2) в некоторое конечное состояние

$$x(t_2) = x_b \tag{1.5}$$

и доставляющее функционалу (1.4) минимальное значение.

В данной постановке конечное состояние (1.5) заранее не задано, а определяется в процессе решения задачи, т. е. рассматривается вариационная задача с фиксированным временем управления и свободным правым концом.

Решение задачи 1 дает следующая

Теорема 1. Пусть движение объекта определяется уравнениями (1.1), начальным состоянием (1.2) и задана произвольная дифференцируемая функция $W(y_1, \ldots, y_k)$, $k \leqslant n$. Тогда управляющие воздействия

$$u_{*j} = -k_j^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W[v_1(x, t), \ldots, v_k(x, t)]}{\partial x_i} b_{ij}(x, t), \quad j = 1, \ldots, r \tag{1.6}$$

где $v_m(x, t)$ $(m = 1, \ldots, k)$ — независимые первые интегралы уравнений движения свободного объекта (1.3), доставляют абсолютный минимум функционалу (1.4) и этот минимум равен $W\{v_1[x(t_1), t_1], \ldots, v_k[x(t_1), t_1]\}$.

Для доказательства теоремы 1 преобразуем функционал (1.4) к виду

$$\Phi = W\{v[x(t_2), t_2]\} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{r} u_j(x, t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W[v(x, t)]}{\partial x_i} b_{ij}(x, t)\, dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{k_j^2} \left\{u_j(x, t) + k_j^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W[v(x, t)]}{\partial x_i} b_{ij}(x, t)\right\}^2 dt \tag{1.7}$$

Вычислим полную производную по времени от функции $W[v(x, t)]$ в силу уравнений движения (1.1). Получим

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial W}{\partial v_m} \left[\frac{\partial v_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \left(f_i + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j\right)\right] \tag{1.8}$$

Функции $v_m(x, t)$ — первые интегралы системы (1.3), следовательно, они удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} f_i = 0, \quad m = 1, \ldots, k \tag{1.9}$$

С учетом (1.9) из (1.8) окончательно имеем

$$\frac{dW}{dt}=\sum_{j=1}^{r} u_j(x,t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W\,[v\,(x,t)]}{\partial x_i}\,b_{ij}(x,t) \tag{1.10}$$

Проинтегрируем выражение (1.10) по времени в пределах от t_1 до t_2, будем иметь

$$W\,\{v\,[x\,(t_2),t_2]\}=W\,\{v\,[x\,(t_1),t_1]\}+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{r} u_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W\,[v\,(x,t)]}{\partial x_i}\,b_{ij}\,dt \tag{1.11}$$

Используя (1.7) и (1.11), для функционала (1.4) получим выражение

$$\Phi=W\,\{v\,[x\,(t_1),t_1]\}+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j^2}\left\{u_j+k_j^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W\,[v\,(x,t)]}{\partial x_i}\,b_{ij}\right\}^2 dt \tag{1.12}$$

Отметим, что величина $W\,\{v\,[x\,(t_1),\,t_1]\}$ от выбора управления $u\,(x,\,t)$ не зависит, так как $x\,(t_1)$, t_1 заранее заданы, а $v\,(x,\,t)$ — вектор первых интегралов уравнений движения свободного объекта. С учетом сказанного из анализа (1.12) следует, что функционал Φ достигает абсолютного минимума на управлениях (1.6), причем $\min_u\Phi\,(u)=\Phi\,(u_*)=W\,\{v\,[x\,(t_1),\,t_1]\}$. Теорема 1 доказана и тем самым задача 1 решена.

2. Рассмотрим объект, движение которого описывается уравнениями (1.1) и начальными условиями (1.2). Пусть задан функционал Больца в виде

$$\Phi=F\,[x\,(t_2),t_2]+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{Q\,(x,t)+\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{u_j\,(x,t)}{k_j}\right]^2\right\}dt \tag{2.1}$$

Здесь F — заданная неотрицательная функция значений фазовых координат в конечный момент времени, Q — заданная неотрицательная функция фазовых координат и времени, t_1, t_2, k_j — заданные постоянные.

Задача 2. Определить допустимое управление $u_*\,(x,\,t)$, перемещающее объект за заданное время t_2-t_1 в силу уравнений (1.1) из начального состояния (1.2) в некоторое конечное состояние (1.5) и доставляющее функционалу (2.1) минимум.

Известно [4, 6], что синтез оптимального управления в задаче 2 может быть получен по методу Летова—Калмана, который сводится к решению нелинейного уравнения в частных производных с граничным условием

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,f_i\,(x,\,t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\left[k_j\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\,(x,\,t)\,\frac{\partial V}{\partial x_i}\right]^2=-\frac{1}{2}\,Q\,(x,\,t) \tag{2.2}$$

$$V\,[x\,(t_2),\,t_2]=F\,[x\,(t_2),\,t_2] \tag{2.3}$$

Интегрирование уравнения (2.2) связано со значительными трудностями. Для нелинейных объектов известен лишь один общий метод приближенного его решения, относящийся к случаю аналитических функций f_i, b_{ij},— метод степенных рядов. Трудности решения уравнения (2.2) побудили создание другого варианта метода синтеза — аналитическое конструирование по критерию обобщенной работы [6]

$$\Phi^\circ=\Phi+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{r}\left(k_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,b_{ij}\right)^2 dt \tag{2.4}$$

где $\Phi\,(u)$ определяется формулой (2.1), а $V\,(x,\,t)$ — решение линейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,f_i\,(x,\,t)=-\frac{1}{2}\,Q\,(x,\,t) \tag{2.5}$$

с граничным условием (2.3). Как отмечено в [6], переход к критерию обобщенной работы коренным образом облегчает решение задачи получения оптимальных управлений (ввиду линейности уравнения в частных производных для функции $V(x, t)$). Возможности и результаты применения метода аналитического конструирования по критерию обобщенной работы (2.4) подробно рассматривались в [6] и др.

Следует отметить, что формулами (1.1), (1.2), (1.5), (2.1), (2.2) и (1.1), (1.2), (1.5), (2.4), (2.5) определяются, вообще говоря, разные задачи синтеза оптимального управления, так как в них разные функционалы, причем последний член функционала (2.4) определяется только после решения уравнения (2.5), т. е. синтез по критерию обобщенной работы является заранее полуопределенным.

Ниже на основании результатов п. 1 предлагается подход к решению задачи 2, использующий более простые по сравнению с (2.2), (2.3) соотношения для искомой синтезирующей функции.

Теорема 2. Пусть движение объекта описывается уравнениями (1.1) с начальными условиями (1.2) и существует дифференцируемая функция $W(y_1, \ldots, y_k)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{k_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W[v(x,t)]}{\partial x_i} b_{ij}(x,t)\right\}^2 = Q(x,t) \tag{2.6}$$

$$W\{v[x(t_2), t_2]\} = F[x(t_2), t_2] \tag{2.7}$$

где $v(x, t) = \{v_1(x, t), \ldots, v_k(x, t)\}$ — вектор независимых первых интегралов уравнений движения свободного объекта (1.3). Тогда управление вида (1.6) — решение задачи 2, т. е. определяет оптимальный синтез в задаче Больца с фиксированным временем и свободным правым концом.

Для доказательства теоремы 2 достаточно записать функционал (2.1) с учетом (2.6), (2.7) и непосредственно убедиться, что полученное выражение совпадает с функционалом (1.4), т. е. выполнены все условия теоремы 1, из которой следует справедливость теоремы 2.

Таким образом, для определения оптимального управления в задаче 2 необходимо решить относительно функции W функционально-дифференциальное уравнение (2.6) при условии (2.7).

Рассмотрим случай скалярного управляющего воздействия, т. е. примем $r = 1$. Предположим, что функции $Q(x, t)$, $b_{i1}(x, t)$ допускают следующие представления:

$$k_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_m(x,t)}{\partial x_i} b_{i1}(x,t) = \varphi_m[v_1(x,t), \ldots, v_k(x,t)]$$

$$\sqrt{Q(x,t)} = \Theta[v_1(x,t), \ldots, v_k(x,t)], \quad m = 1, \ldots, k$$

где φ_m, Θ — некоторые известные функции. Тогда для синтезирующей функции $W(v_1, \ldots, v_k)$ из (2.6) имеем уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{\partial W(v_1, \ldots, v_k)}{\partial v_m} \varphi_m(v_1, \ldots, v_k) = \Theta(v_1, \ldots, v_k) \tag{2.8}$$

Его общее решение в неявном виде записывается так:

$$\Psi[z_1(v_1, \ldots, v_k, W), \ldots, z_k(v_1, \ldots, v_k, W)] = 0 \tag{2.9}$$

где Ψ — произвольная дифференцируемая функция, $z_1, \ldots, z_k$ — независимые первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_1}{\varphi_1} = \ldots = \frac{dv_k}{\varphi_k} = \frac{dW}{\Theta}$$

Соотношение (2.9) позволяет определить искомую функцию W.

В случае наличия одного первого интеграла уравнений движения свободного объекта, т. е. при $k = 1$, для синтезирующей функции $W[v_1(x, t)]$ в силу (2.6)—(2.8) имеем выражение

$$W = \varphi_* [v_1(x, t)] + F[x(t_2), t_2] - \varphi_* \{v_1[x(t_2), t_2]\},$$
$$\varphi_* = \int \frac{\Theta(v_1)}{\varphi_1(v_1)} dv_1$$

Отметим, что для существования дифференцируемой функции $W(y_1, \ldots, y_k)$, удовлетворяющей соотношениям (2.6), (2.7), в вариационной задаче (1.1), (1.2), (1.5), (2.1) с необходимостью должно выполняться фазовое ограничение

$$\sum_{j=1}^{r} \left\{k_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i(t_2)} b_{ij}[x(t_2), t_2]\right\}^2 = Q[x(t_2), t_2]$$

Проведенные исследования позволяют составить следующий алгоритм синтеза оптимального управления в задаче Больца вида (1.1), (1.2), (1.5), (2.1):

1°. Определить независимые первые интегралы уравнений движения свободного объекта (1.3) (хотя бы один из интегралов).

2°. Решить вспомогательную краевую задачу (2.6), (2.7) и найти синтезирующую функцию первых интегралов.

3°. Рассчитать по формуле (1.6) оптимальное управление, а из (1.1), (1.2) определить соответствующий оптимальный закон движения объекта.

4°. Вычислить абсолютный минимум функционала (2.1) по формуле

$$\Phi_{\min} = \Phi(u_*) = W\{v[x(t_1), t_1]\}$$

3. Приведем примеры применения доказанных выше теорем в задачах синтеза оптимального управления движением механических систем.

Пример 1. Пусть движение объекта описывается соотношениями

$$x_1^{\cdot} = f_1(x_1, x_2, t, u),\ x_2^{\cdot} = u,\ x(t_1) = x_a \tag{3.1}$$

Качество управления будем оценивать функционалом

$$\Phi = F[x_2(t_2), t_2] + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [Q(x_2) + u^2(x, t)]\, dt \tag{3.2}$$

где F, Q — заданные неотрицательные функции своих аргументов, $u(x, t)$ — скалярное управляющее воздействие, t_1, t_2 — фиксированные моменты начала и окончания процесса управления. Требуется определить допустимое управление, перемещающее объект в силу (3.1) за заданное время $t_2 - t_1$ из начального состояния (3.1) в некоторое конечное состояние (1.5) и доставляющее функционалу (3.2) минимум.

Будем решать сформулированную задачу в соответствии с предложенным в п. 2 алгоритмом.

1°. Независимый первый интеграл уравнений движения свободного объекта $x_1^{\cdot} = f_1(x_1, x_2, t, 0)$, $x_2^{\cdot} = 0$ имеет вид $v \equiv x_2$;

2°. Вспомогательная краевая задача (2.6), (2.7) в данном примере сводится к определению функции $W(x_2)$, удовлетворяющей соотношениям

$$dW/dx_2 = \sqrt{Q(x_2)},\ W[x_2(t_2)] = F[x_2(t_2), t_2] \tag{3.3}$$

Из решения (3.3) имеем

$$W(x_2) = Q_*(x_2) + F[x_2(t_2), t_2] - Q_*[x_2(t_2)], \qquad Q_*(x_2) = \int \sqrt{Q(x_2)}\, dx_2$$

3°. На основании теоремы 2 заключаем, что абсолютный минимум функционалу (3.2) доставляет управление $u_*(x, t) = -dW/dx_2 = -\sqrt{Q(x_2)}$. Соответствующий оптимальный закон движения объекта определяется из решения задачи Коши

$$x_1^{\cdot} = f_1[x_1, x_2, t, -\sqrt{Q(x_2)}],\ x_2^{\cdot} = -\sqrt{Q(x_2)},\ x(t_1) = x_a$$

Минимум функционала (3.2) равен

$$W[x_2(t_1)] = Q_*[x_2(t_1)] + F[x_2(t_2), t_2] - Q_*[x_2(t_2)]$$

Пример 2. Рассмотрим движение материальной точки массы m вдоль оси Ox_1 под действием силы с потенциалом $\Pi(x_1)$ и управляющего воздействия $u(x_1, x_2, t)$. Уравнения движения имеют вид

$$(3.4)\qquad x_1^{\cdot} = x_2, \quad mx_2^{\cdot} = -\frac{d\Pi(x_1)}{dx_1} + u(x_1, x_2, t)$$

Требуется определить управление $u(x, t)$, перемещающее точку в силу уравнений (3.4) за заданное время $t_2 - t_1$ из начального состояния (1.2) в некоторое конечное состояние (1.5) и доставляющее минимум функционалу

$$(3.5)\qquad \Phi = \frac{1}{2} mx_2^2(t_2) + \Pi[x_1(t_2)] + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x_2^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} u^2(x, t)\,dt$$

Терминальная часть функционала Φ представляет собой величину полной механической энергии системы в конце процесса управления при $t = t_2$, третье слагаемое в (3.5) характеризует рассеивание механической энергии при управляемом движении, четвертое — затраты на управление.

Сформулированная задача может быть решена при помощи теоремы 1. Действительно, уравнения движения свободного объекта ((3.4) при $u \equiv 0$) имеют независимый первый интеграл — интеграл энергии $v = {}^1/_2 mx_2^2 + \Pi(x_1)$. Если в качестве синтезирующей функции $W(v)$ принять этот интеграл и учесть, что в данной задаче $b_1 = 0$, $b_2 = 1/m$, $n = 2$, $r = k_1 = 1$, то функционал (3.5) примет вид (1.4). В соответствии с теоремой 1 решением задачи будет

$$(3.6)\qquad u_*(x, t) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i = -x_2(t)$$

При этом функционал (3.5) на управлении $u_*(x, t)$ достигает абсолютного минимума, равного ${}^1/_2 mx_2^2(t_1) + \Pi[x_1(t_1)]$, т. е. значения полной механической энергии в момент времени начала процесса управления. Соответствующий оптимальный закон движения точки определяется из решения следующей задачи Коши:

$$(3.7)\qquad x_1^{\cdot} = x_2, \quad mx_2^{\cdot} = -d\Pi(x_1)/dx_1 - x_2, \quad x(t_1) = x_a$$

Для сравнения решим эту задачу методами классического вариационного исчисления. В соответствии с принципом Лагранжа [11] необходимо проделать следующие процедуры:

1°. Составить лагранжиан L и терминант l. В данной задаче они имеют вид

$$L = \frac{\lambda_0}{2}(x_2^2 + u^2) + p_1(x_1^{\cdot} - x_2) + p_2\left(x_2^{\cdot} + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dx_1} - \frac{u}{m}\right),$$

$$l = \frac{\lambda_0}{2}\{mx_2^2(t_2) + 2\Pi[x_1(t_2)]\} + \lambda_1 x_1(t_1) + \lambda_2 x_2(t_1)$$

($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$ — неопределенные множители Лагранжа).

2°. Выписать необходимые условия оптимальности процесса (x, u, t_1, t_2):

а) стационарности по x для лагранжиана L (уравнение Эйлера):

$$(3.8)\qquad p_1^{\cdot} - \frac{p_2}{m}\frac{d^2\Pi}{dx_1^2} = 0, \quad p_2^{\cdot} - \lambda_0 x_2 + p_1 = 0$$

б) трансверсальности по x для терминанта l:

$$(3.9)\qquad p_1(t_1) = \lambda_1, \quad p_1(t_2) = -\lambda_0\frac{d\Pi[x_1(t_2)]}{dx_1(t_2)}$$

$$p_2(t_1) = \lambda_2, \quad p_2(t_2) = -\lambda_0\, mx_2(t_2)$$

в) стационарности по u лагранжиана L:

$$(3.10)\qquad \lambda_0 u - p_2/m = 0$$

3°. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия (3.8)—(3.10) с множителями Лагранжа λ_j и p_j одновременно, не равными нулю. Среди всех найденных допустимых экстремальных процессов отыскать решение задачи или доказать, что решения нет.

Приступим к выполнению п. 3°. Рассмотрим сначала случай $\lambda_0 = 0$. Как следует из (3.8)—(3.10), обязательно $\lambda_1 = \lambda_2 = p_1 = p_2 = 0$, т. е. все множители Лагранжа — нули. Значит, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет. Положим $\lambda_0 = 1$. Из (3.10) получим

(3.11) $$u = p_2/m$$

С учетом (3.11) из (3.4), (3.8) для определения $x_i(t)$, $p_i(t)$ имеем уравнения

(3.12) $$x_1^{\cdot} = x_2, \quad m x_2^{\cdot} = -\frac{d\Pi}{dx_1} + \frac{p_2}{m}$$

$$p_1^{\cdot} - \frac{p_2}{m}\frac{d^2\Pi}{dx_1^2} = 0, \quad p_2^{\cdot} - x_2 + p_1 = 0$$

Выберем функции p_i в виде

(3.13) $$p_1 = -d\Pi/dx_1, \quad p_2 = -m x_2$$

Тогда, как следует из (3.11)—(3.13), $u_* = -x_2(t)$, а экстремали $x_*(t)$, как и ранее, должны быть решениями задачи Коши (3.7). Выполнение условий трансверсальности (3.9) гарантировано, если принять $\lambda_1 = -d\Pi\,[x_1(t_1)]/dx_1(t_1)$, $\lambda_2 = -m x_2(t_1)$. Для завершения решения данной задачи методами классического вариационного исчисления необходимо еще доказать, что найденное управление $u_* = -x_2$ доставляет минимум функционалу (3.5). Это уже было показано при помощи теоремы 1.

Рассмотренные примеры свидетельствуют об эффективности предложенной методики синтеза оптимального управления движением механических систем, основанной на использовании первых интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
5. *Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 225 с.
6. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560 с.
7. *Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н.* Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев: Наук. думка, 1973. 151 с.
8. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
9. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
11. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

Львов

Поступила в редакцию
11.IV.1985