УДК 531.53

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ О ТЯЖЕЛОМ ДВУХЗВЕННОМ ПЛОСКОМ МАЯТНИКЕ

Буров А. А.

Методом расщепления сепаратрис доказывается несуществование аналитического по фазовым переменным дополнительного первого интеграла, независимого с интегралом энергии. При помощи теоремы Пуанкаре доказывается существование некоторых классов периодических решений.

Вопрос о несуществовании дополнительного линейного по импульсам интеграла в случае, когда плоский маятник составлен из двух одинаковых звеньев, рассмотрен в работе [1]. Несуществование дополнительного квадратичного, а следовательно, и линейного по импульсам интеграла в случае, когда плоский математический маятник составлен из двух произвольных звеньев, доказано в работе [2].

1. Рассмотрим двухзвенный тяжелый плоский маятник, совершающий колебания в вертикальной плоскости. Предположим, что первое звено вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси A_1, а второе — вращается вокруг горизонтальной оси A_2, жестко связанной с первым звеном и параллельной оси A_1.

Пусть G_i — центр масс i-го звена, m_i — масса, I_i — момент инерции относительно оси A_i. Если $l = |A_1A_2|$, $l_1 = |A_1G_1|$, $l_2 = |A_2G_2|$, $\alpha = \angle G_1A_1A_2$, q_1, q_2 — углы, образуемые отрезками A_1A_2, A_2G_2 с вертикалью, то выражения для кинетической энергии и силовой функции имеют вид

$$T = {}^1/_2\,((I_1 + m_2l^2)\,q_1^{\cdot 2} + 2m_2l_2l\cos(q_1 - q_2)\,q_1^{\cdot}q_2^{\cdot} + I_2q_2^{\cdot 2})$$
$$V = g\,(m_1l_1\cos(q_1 + \alpha) + m_2\,(l\cos q_1 + l_2\cos q_2))$$

где g — ускорение свободного падения.

При выполнении условий

$$\alpha = \pi,\ m_2l = m_1l_1 \tag{1.1}$$

силовая функция V не зависит от угла q_1. Если хотя бы одно из условий (1.1) не выполнено, то силовую функцию можно представить в виде

$$V = Gg\cos(q_1 + \beta) + gm_2l_2\cos q_2$$
$$G = [(m_1l_1\cos\alpha + m_2l)^2 + (m_1l_1\sin\alpha)^2]^{1/2}$$
$$\cos\beta = (m_1l_1\cos\alpha + m_2l)/G,\ \ \sin\beta = m_1l_1\sin\alpha/G$$

Пусть $p_i = \partial T/\partial q_i$ — канонические импульсы, сопряженные координатам q_i. Тогда движение системы описывается уравнениями Гамильтона

$$q_i^{\cdot} = \partial H/\partial p_i,\ p_i^{\cdot} = -\partial H/\partial q_i,\ i = 1,\ 2 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} H = {}^1/_2\,((I_1 + m_2l^2)\,I_2 - m_2^2l_2^2l^2\cos^2(q_1 - q_2))^{-1} \times \\ \times (I_2p_1^2 - 2m_2l_2l\cos(q_1 - q_2)\,p_1p_2 + (I_1 + m_2l^2)\,p_2^2) - \\ - g\,(m_1l_1\cos(q_1 + \alpha) + m_2\,(l\cos q_1 + l_2\cos q_2)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из условий (1.1) не выполнено. Введем в систему уравнений движения безразмерный параметр $\varepsilon_1 \geqslant 0$, полагая $l_2 = L_2\varepsilon_1$, где $L_2 > 0$ — постоянная, имеющая размерность длины.

Гамильтониан (1.3) — аналитическая функция импульсов p_i, координат q_i и параметра $\varepsilon_1 \in [0,\ [(I_1 + m_2l^2)\,I_2\,(m_2l_2l)^{-2}]^{1/2})$. Ее разложение в ряд по степеням параметра ε_1 имеет вид

$$H\,(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0\,(p_1, p_2, q_1) + \varepsilon_1H_1\,(p_1, p_2, q_1, q_2) + \ldots \tag{2.1}$$

$$H_0 = {}^1/_2\,(a_1p_1^2 + a_2p_2^2) - Gg\cos(q_1 + \beta) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} H_1 = -a_0^{-1}a_1a_2p_1p_2\cos(q_1 - q_2) - gm_2L_2\cos q_2 \\ a_0 = (m_2L_2l)^{-1},\ a_1 = (I_1 + m_2l^2)^{-1},\ a_2 = I_2^{-1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При $\varepsilon_1 = 0$ система уравнений движения (1.2) с функцией Гамильтона (2.1) интегрируема по Лиувиллю: помимо интеграла энергии $F_1 = H_0$ она обладает интегралом $F_2 = p_2$, соответствующим циклической координате q_2. В этом случае первое звено движется как физический маятник, а второе звено при $F_2 = P_2 \neq 0$ совершает равномерные вращения вокруг оси A_2 с угловой скоростью $\omega_2 = P_2/I_2$.

При $\varepsilon_1 = 0$ система (1.2) обладает двумя частными периодическими решениями ($P_2 \neq 0$)

$$x_\pi(t, 0) = \{p_1 = 0,\ p_2 = P_2,\ q_1 = \pi - \beta,\ q_2 = \omega_2 t + q_{20}\}$$

$$x_0(t, 0) = \{p_1 = 0,\ p_2 = P_2,\ q_1 = -\beta,\ q_2 = \omega_2 t + q_{20}\}$$

периода $T_2 = 2\pi\omega_2^{-1}$, расположенными на уровнях интеграла энергии $h_\pi = {}^1/_2 I_2\omega_2^2 + Gg$, $h_0 = {}^1/_2 I_2\omega_2^2 - Gg$ соответственно. Выясним, существуют ли при достаточно малых значениях ε_1 однопараметрические семейства периодических, аналитически зависящих от параметра ε_1 решений системы (1.2), расположенных на уровнях интеграла энергии $\{H = h_\pi\}$ и $\{H = h_0\}$ и переходящих в решения $x_\pi(t, 0)$ и $x_0(t, 0)$ при $\varepsilon_1 = 0$.

Пусть

$$Z_\sigma(T_2) = \begin{Vmatrix} X_\sigma(T_2) & f_\sigma \\ \Psi_\sigma & 0 \end{Vmatrix}$$

где $X_\sigma(T_2)$ — матрица монодромии периодического решения $x_\sigma(t, 0)$, $\sigma = 0, \pi$

$$f_\sigma = \mathrm{col}\,(-\partial H_0/\partial q_1,\ \partial H_0/\partial p_1,\ -\partial H_0/\partial q_2,\ \partial H_0/\partial p_2)_{x_\sigma(T_2, 0)}$$

$$\psi_\sigma = (\partial H_0/\partial p_1,\ \partial H_0/\partial q_1,\ \partial H_0/\partial p_2,\ \partial H_0/\partial q_2)_{x_\sigma(T_2, 0)}$$

Следуя теореме Пуанкаре о периодических решениях систем, допускающих первые интегралы [3, 4], вычислим ранг матриц $Z_\sigma(T_2)$. Ранг матрицы $Z_\pi(T_0)$ равен четырем: минор

$$M_{34} = 2\omega_2^2\,(1 - \mathrm{ch}\,(2\pi\lambda_1\omega_2^{-1})),\quad \lambda_1 = (a_1 Gg)^{1/2}$$

отличен от нуля. Следовательно, согласно теореме Пуанкаре, на уровне интеграла энергии $\{H = h_\pi\}$ при достаточно малых значениях ε_1 существует однопараметрическое семейство периодических решений $x_\pi(t, \varepsilon_1)$, аналитически зависящих от параметра ε_1 и переходящих в $x_\pi(t, 0)$ при $\varepsilon_1 = 0$.

Ранг матрицы $Z_0(T_2)$ не больше четырех: минор

$$M_{34} = 2\omega_2^2\,(1 - \cos\,(2\pi\lambda_1\omega_2^{-1}))$$

отличен от нуля, если

(2.4) $\qquad \lambda_1 \neq \omega_2 k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$

В этом случае $\mathrm{rank}\, Z_0(T_2) = 4$ и по теореме Пуанкаре при достаточно малых значениях ε_1 существует однопараметрическое семейство периодических решений $x_0(t, \varepsilon_1)$, расположенных на уровне интеграла энергии $\{H = h_0\}$ и переходящих в $x_0(t, 0)$ при $\varepsilon_1 = 0$.

Замечание. Если условия (2.4) не выполнены, то существование при малых $\varepsilon_1 \neq 0$ периодических решений, близких к $x_0(t, 0)$, следует из теории Колмогорова — Арнольда — Мозера. Однако вопрос о том, образуют ли эти решения семейство, аналитически зависящее от ε_1, требует дополнительного исследования.

3. Рассмотрим однопараметрическое семейство периодических решений $x_\pi(t, \varepsilon_1)$. Решение $x_\pi(t, 0)$ является неустойчивым периодическим решением гиперболического типа. Следовательно, при достаточно малых значениях ε_1 периодические решения $x_\pi(t, \varepsilon_1)$ — также гиперболические. Для этих решений существуют сепаратрисы — две двумерные инвариантные асимптотические поверхности

$$\Lambda_u(\varepsilon_1) = \Lambda_u^+(\varepsilon_1) \cup \{x_\pi(t, \varepsilon_1)\} \cup \Lambda_u^-(\varepsilon_1)$$

$$\Lambda_s(\varepsilon_1) = \Lambda_s^+(\varepsilon_1) \cup \{x_\pi(t, \varepsilon_1)\} \cup \Lambda_s^-(\varepsilon_1)$$

сплошь заполненные траекториями, асимптотически приближающимися к $x_\pi(t, \varepsilon_1)$ при $t \to \mp\infty$.

При $\varepsilon_1 = 0$ ветви сепаратрис $\Lambda_u^+(0)$ и $\Lambda_s^+(0)$, $\Lambda_u^-(0)$ и $\Lambda_s^-(0)$ совпадают и состоят из решений $x_a^\pm(t, q_{20})$:

$$\sin q_1^\pm = \pm 2\,\mathrm{sh}\,\tau_1/\mathrm{ch}^2\tau_1,\quad \cos q_1 = 2/\mathrm{ch}^2\tau_1 - 1$$

$$p_1^\pm = \pm 2a_1^{-1}\lambda_1/\mathrm{ch}\,\tau_1,\quad q_2 = \gamma_1\tau_1 + q_{20},\quad p_2 = P_2$$

$$\tau_1 = \lambda_1 t,\quad \gamma_1 = \lambda_1^{-1}\omega_2$$

Теорема 1. Если хотя бы одно из условий (1.1) не выполнено, то при достаточно малых значениях $\varepsilon_1 \neq 0$ ветви сепаратрис $\Lambda_u^+(\varepsilon_1)$ и $\Lambda_s^+(\varepsilon_1)$, $\Lambda_u^-(\varepsilon_1)$ и $\Lambda_s^-(\varepsilon_1)$ трансверсально пересекаются и система уравнений (1.2) не имеет дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла.

Доказательство. Согласно (2.3), функция H_1 имеет вид

$$H_1 = h_1^* \exp(iq_2) + h_{-1}^* \exp(-iq_2) = h_1 + h_{-1}$$

где

$$h^*_{\pm 1} = -{}^1/_2 \, (a_0^{-1} a_1 a_2 p_1 p_2 \exp(\mp i q_1) + m_2 L_2 g)$$

Следуя [5], найдем функции

$$J^{\pm}(q_2) = \sum_k J_k^{\pm} \exp(ikq_2)$$

$$J_k^{\pm} = -2\pi k \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi k}{\lambda_1}\frac{\partial H_0}{\partial P_2}\right)\right) \sum_{\Pi_1} \operatorname{res} h_k (z_a^{\pm}(t))$$

Здесь $z_a^{\pm}(t)$ — аналитическое продолжение решения $x_a^{\pm}(t, 0)$ на полосу

$$\Pi_1:\ 0 \leqslant \operatorname{Im} t < 2\pi/\lambda_1$$

Вычисляя коэффициенты $J_k^{\pm}$ с помощью вычетов, получаем

$$J^{\pm}(q_2) = 2\pi a_0^{-1} \omega_2^2 \gamma_1^{-1} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\gamma_1/2)} \pm \frac{1}{\operatorname{sh}(\pi\gamma_1/2)}\right) \sin(q_2 + \beta)$$

Так как функции $J^{\pm}(q_2)$ имеют изолированные нули, то согласно [5] (теорема 1) при достаточно малых значениях $\varepsilon_1 \neq 0$ пары ветвей сепаратрис $\Lambda_u^+(\varepsilon_1)$ и $\Lambda_s^+(\varepsilon_1)$, $\Lambda_u^-(\varepsilon_1)$ и $\Lambda_s^-(\varepsilon_1)$ расщепляются и трансверсально пересекаются, а система уравнений движения не имеет дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла.

4. Рассмотрим случай, когда оба условия (1.1) выполнены. Введем в систему уравнений движения безразмерный параметр $\varepsilon_2 \geqslant 0$, полагая $l = L_0 \varepsilon_2$, $l_1 = L_1 \varepsilon_2$, где $L_0 > 0$, $L_1 > 0$ — постоянные, имеющие размерность длины и удовлетворяющие в силу второго соотношения (1.1) условию $m_1 L_1 = m_2 L_0$.

Функция Гамильтона (1.3) — аналитическая по фазовым переменным p_i, q_i и параметру $\varepsilon_2 \in [0, (I_1 m_2^{-1} L_0^{-2})^{1/2})$, ее разложение в ряд по степеням ε_2 имеет вид

$$\mathrm{H}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \mathrm{H}_0(p_1, p_2, q_2) + \varepsilon_2 \mathrm{H}_1(p_1, p_2, q_1, q_2) + \ldots$$

$$\mathrm{H}_0 = {}^1/_2 \, (I_1^{-1} p_1^2 + I_2^{-1} p_2^2) - m_2 l_2 g \cos q_2 \tag{4.1}$$

$$\mathrm{H}_1 = -m_2 l_2 L_0 \cos(q_1 - q_2) p_1 p_2 \tag{4.2}$$

При $\varepsilon_2 = 0$ система уравнений (1.2) с гамильтонианом (4.1) вполне интегрируема: помимо интеграла энергии $\Phi_0 = \mathrm{H}_0$ она обладает интегралом $\Phi_1 = p_1$, соответствующим циклической координате q_1. В этом случае при $\Phi_1 = P_1 \neq 0$ первое звено совершает равномерные вращения вокруг оси A_1 с угловой скоростью $\omega_1 = P_1/I_1$, а второе звено колеблется как физический маятник.

На уровнях интеграла энергии

$$\eta_\pi = I_1 \omega_1^2/2 + m_2 l_2 g, \quad \eta_0 = I_1 \omega_1^2/2 - m_2 l_2 g$$

при $\varepsilon_2 = 0$ существуют периодические решения $(P_1 \neq 0)$

$$y_\pi(t, 0) = \{p_1 = P_1,\ p_2 = 0,\ q_1 = \omega_1 t + q_{10},\ q_2 = \pi\}$$

$$y_0(t, 0) = \{p_1 = P_1,\ p_2 = 0,\ q_1 = \omega_1 t + q_{10},\ q_2 = 0\}$$

периода $T_1 = 2\pi\omega_1^{-1}$. При этом, согласно теореме Пуанкаре, решение $y_\pi(t, 0)$ принадлежит семейству периодических решений гиперболического типа $\{y_\pi(t, \varepsilon_2)\}$, аналитически зависящих от малого параметра ε_2 и расположенных на $\{H = \eta_\pi\}$. Решение $y_0(t, 0)$ при выполнении условия

$$(m_2 l_2 g / I_2)^{1/2} \neq \omega_1 k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

также принадлежит семейству аналитически зависящих от малого параметра ε_2 периодических решений $\{y_\pi(t, \varepsilon_2)\}$, расположенных на $\{H = \eta_0\}$.

При достаточно малых значениях ε_2 периодические решения $y_\pi(t, \varepsilon_2)$ также обладают инвариантными асимптотическими поверхностями — сепаратрисами, причем справедлива

Теорема 2. Если выполнены условия (1.1), то при достаточно малых значениях $\varepsilon_2 \neq 0$ ветви сепаратрис гиперболического периодического решения $y_\pi(t, \varepsilon_2)$ трансверсально пересекаются и уравнения (1.2) не имеют дополнительного аналитического по фазовым переменным первого интеграла.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Отсутствие в общем случае дополнительного интеграла для уравнений движения двузвенного маятника позволяет прояснить природу сложного характера движения этой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Илиев И.* О линейных интегралах голономной механической системы.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 751—755.
2. *Сумбатов А. С.* Об интегрируемости уравнения Гамильтона—Якоби в обобщенных координатах.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 1, с. 13—19.
3. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М: Наука, 1971. 771 с.
4. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
5. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1980, т. 41, с. 287—303.

Москва

Поступила в редакцию 25.X.1984

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОСРЕДНЕНИЯ

Андрианов И. В.

Описывается последовательная процедура вывода уравнений типа уравнений Бергера (УБ), опирающаяся на метод осреднения [1—3], для прямоугольных и круглых изотропных пластин, изотропных и трехслойных пологих оболочек. Показано, что малость второго инварианта тензора деформаций имеет случайный характер. Гипотеза Бергера (ГБ) [4] в чистом виде справедлива лишь для изотропных однослойных и трансверсально-изотропных трехслойных пластин, а для последовательного построения упрощенной теории по Бергеру нужна идея осреднения.

1. Приведем сначала несколько интуитивных соображений (их полезность наглядно продемонстрирована в [5], где приведены соображения о применении метода осреднения при наличии быстрой изменяемости в нелинейных колебательных системах). Справедливость ГБ для изотропных прямоугольных пластин подтверждена большим количеством расчетов [4—6, 7], и не вызывает сомнения, что вклад в потенциальную энергию второго инварианта тензора деформаций I_2 существенно меньше вклада первого инварианта I_1. Учитывая, что

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 - {}^1/_4\varepsilon_{12}{}^2$$
$$\varepsilon_1 = u_x + {}^1/_2 w_x{}^2,\ \varepsilon_2 = v_y + {}^1/_2 w_y{}^2$$
$$\varepsilon_{12} = u_y + v_x + w_x w_y$$

соответствующее неравенство для прямоугольной ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$) пластины можно переписать так:

$$\int\limits_0^b\int\limits_0^a (A + B_1 + C)\,dx\,dy \leqslant (1-\nu)\int\limits_0^b\int\limits_0^a (A - B_2)\,dx\,dy \tag{1.1}$$

$$A = 2u_x y_y + w_y{}^2 u_x + w_x{}^2 v_y,\ B_1 = B_{11} + B_{12},\ B_2 = {}^1/_2 B_{11} + B_{22}$$
$$B_{11} = u_x{}^2 + u_y{}^2,\ B_{12} = u_x w_x{}^2 + v_y w_y{}^2$$
$$B_{22} = (u_y + v_x)\, w_x w_y,\ C = {}^1/_4 (w_x{}^2 + w_y{}^2)^2$$

Основное различие между левой и правой частями неравенства (1.1) связано со слагаемым C. Действительно, пусть на краях пластины равны нулю перемещения и изгибающие моменты и рассматривается задача о собственных колебаниях. Применяя метод Бубнова — Галеркина с аппроксимацией первого приближения

$$(u, v, w) = A_i(t) \sin (m\pi x/a) \sin (n\pi y/b)$$