цией Гамильтона максимума на оптимальном управлении и могут быть получены из теоремы 4.14 [5] для рассматриваемого типа ограничений на управления.

Решение системы дифференциальных уравнений (17) с указанным краевым условием имеет вид

$$(19)\qquad \Psi(t) = \psi_c(t)\, c$$

где введены обозначения (16) и (7).

Входящая сюда метрица $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы однородных уравнений (17), обращающаяся в единичную при $t = T$, $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))^T$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^T$.

Подставляя (19) в соотношения (18) и вводя обозначения (15), приходим к утверждению теоремы.

Следствие. Пусть для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ и $k \in (1, 2, \ldots, n_j)$ система функций $k_{j1}(t), k_{j2}(t), \ldots, k_{jp}(t)$ линейно независима на интервале T_{jk}. Тогда обратная задача не имеет невырожденного решения.

Замечание. В некоторых случаях обратная задача ставится как задача нахождения неотрицательных коэффициентов $c_s \geqslant 0$ в функционале (3). Очевидно, что и в этом случае справедливо необходимое условие оптимальности существования невырожденного решения, сформулированное в утверждении теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 144 с.
2. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. *Белецкий В. В.* Двуногая ходьба: Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Д.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Ташауз

Поступила в редакцию 2.I.1985

УДК 531.36

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Озиранер А. С.

Получены условия существования функции Ляпунова в виде определенно-положительной по части переменных квадратичной формы с постоянными коэффициентами, необходимые для нелинейных систем, а также необходимые и достаточные для линейных стационарных систем. Рассмотрены примеры.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения [1]

$$(1.1)\qquad \mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0)$$

$$\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)^T, \; m > 0, \; p \geqslant 0, \; n = m + p$$

Предполагаем, что: а) правые части системы (1.1) в области

$$(1.2)\qquad t \geqslant 0, \; \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \; \|\mathbf{z}\| < +\infty$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, определенного начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$; б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы.

Предположим, что для системы (1.1) известны k ($1 \leqslant k \leqslant n$) первых интегралов

$$(1.3)\qquad V_i(t, \mathbf{x}) = \text{const} \quad (V_i(t, 0) \equiv 0), \; i = 1, \ldots, k$$

Г. К. Пожарицким [2] получены необходимые и достаточные условия существования определенно-положительной функции

$$(1.4)\qquad V(t, \mathbf{x}) = F(V_1(t, \mathbf{x}), \ldots, V_k(t, \mathbf{x}))$$

образованной из интегралов (1.3). Эти результаты распространяются на задачу устойчивости относительно части переменных. Именно:

1°. Для существования какой-либо y-определенно-положительной функции (1.4) необходимо и достаточно, чтобы функция

(1.5) $$V_0(t, \mathbf{x}) \equiv F_0(V_1(t, \mathbf{x}), \ldots, V_k(t, \mathbf{x}) = V_1^2(t, \mathbf{x}) + \ldots + V_k^2(t, \mathbf{x})$$

была y-определенно-положительной.

2°. Функция (1.5) y-определенно положительна тогда и только тогда, когда хотя бы для одного из интегралов, пусть $V_i(t, \mathbf{x})$, существует такая пара функций $\mu_i(r) \in K$ и $\nu_i(r) \in K$, что $V_i^2(t, \mathbf{x}) \geqslant \mu_i(\|\mathbf{y}\|)$, как только $V_i^2 + \ldots + V_{i-1}^2 + V_{i+1}^2 + \ldots + V_k^2 \leqslant \nu_i(\|\mathbf{y}\|)$ (по определению [3] функция $a(r) \in K$, если $a(r)$ непрерывна, монотонно возрастает и $a(0) = 0$).

Отметим [2], что если такую пару функций можно подобрать для одного интеграла, то ее можно подобрать и для любого другого.

В случае аналитических и не зависящих от времени интегралов (1.3) получены [4] условия, позволяющие построить из этих интегралов функцию, разложение которой в ряд Маклорена начинается с определенно-положительной квадратичной формы. Результаты работы [4] не могут быть распространены на задачу устойчивости относительно части переменных, поскольку из y-знакоопределенности квадратичной части функции Ляпунова нельзя, вообще говоря, сделать какие бы то ни было выводы о знакоопределенности (по всем или по части переменных) самой функции.

В связи с этим представляется целесообразным установить условия (как необходимые, так и достаточные) существования у системы (1.1) функции Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами.

Здесь и в дальнейшем функция $V(t, \mathbf{x})$ называется функцией Ляпунова, если [1,5] $V(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|)$ и $V^{\cdot}(t, \mathbf{x}) \leqslant 0$ в силу системы (1.1).

2. *Теорема* 1. Для того чтобы квадратичная форма $v(\mathbf{x})$ с постоянными коэффициентами была y-определенно-положительной, необходимо и достаточно существование числа $\lambda > 0$, при котором $v(\mathbf{x})$ представима в виде

(2.1) $$v(\mathbf{x}) = \lambda(y_1^2 + \ldots + y_m^2) + \xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(2.2) $$\xi_i = \alpha_{i1}y_1 + \ldots + \alpha_{im}y_m + \beta_{i1}z_1 + \ldots + \beta_{ip}z_p \quad (i = 1, \ldots, n; \alpha_{ij}, \beta_{ij} - \text{const})$$

Доказательство. Достаточность условий очевидна; докажем необходимость. Пусть $v(\mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|)$, $a(r) \in K$; положим $\lambda = a(1) > 0$, тогда $v(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$ на поверхности $\|\mathbf{y}\| = 1$. Каждой точке $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})^T$ с $\mathbf{y} \neq 0$ поставим в соответствие точку $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)^T$ по правилу $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \|\mathbf{y}\|$; при этом, очевидно, $\|\mathbf{y}^*\| = 1$ и, следовательно, $v(\mathbf{x}^*) \geqslant \lambda$. Поскольку для квадратичной формы $v(c\mathbf{x}) = c^2 v(\mathbf{x})$ $(c = \text{const})$, получаем $v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}^*\|\mathbf{y}\|) = \|\mathbf{y}\|^2 v(\mathbf{x}^*) \geqslant \lambda\|\mathbf{y}\|^2$, откуда следует, что $v(\mathbf{x}) - \lambda(y_1^2 + \ldots + y_m^2) \geqslant 0$. В левой части этого неравенства стоит неотрицательная квадратичная форма. Как известно [6], невырожденным линейным преобразованием (2.2) она может быть приведена к виду (2.1).

Из доказательства следует, что если функция $v(\mathbf{x})$ представима в виде (2.1), (2.2) при некотором $\lambda = \lambda_0 > 0$, то она представима в таком же виде и при любом $\lambda \in (0, \lambda_0)$, причем постоянные α_{ij}, β_{ij} и k зависят от λ.

Теорема 2. Если существует квадратичная форма $v(\mathbf{x})$ с постоянными коэффициентами, являющаяся функцией Ляпунова для системы (1.1), то система (1.1) имеет q-мерное $(0 \leqslant q \leqslant p)$ положительно инвариантное равномерно устойчивое подпространство, расположенное в $\mathbf{R}_\mathbf{z}^p = \{\mathbf{x}: \mathbf{y} = 0\}$.

Явный вид этого подпространства будет указан ниже.

Доказательство. По теореме 1 функция $v(\mathbf{x})$ представима в виде (2.1), (2.2). Рассмотрим множество $M = \{\mathbf{x}: v(\mathbf{x}) = 0\}$; согласно (2.1), (2.2)

(2.3) $$M = \{\mathbf{x}: \mathbf{y} = 0, \beta_{i1}z_1 + \ldots + \beta_{ip}z_p = 0 \ (i = 1, \ldots, k)\}$$

Покажем, что M удовлетворяет требуемым условиям.

Очевидно, M — подпространство, его размерность $q = p - \operatorname{rank}\|\beta_{ij}\|$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, p)$, $M \subset \mathbf{R}_\mathbf{z}^p$, $0 \leqslant q \leqslant p$. Если $\mathbf{x}_0 \in M$, то $v(\mathbf{x}_0) = 0$; поскольку $v \geqslant 0$, а $v^{\cdot} \leqslant 0$, то $v(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \equiv 0$ при всех $t \geqslant t_0$ и, следовательно [7], $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in M$ для любого $t \geqslant t_0$, т. е. M — положительно инвариантно. Можно показать, что форма (2.1), (2.2) определенно положительна по отношению к расстоянию $\rho(\mathbf{x}, M)$ от множества M. Поскольку v не зависит от t и $v^{\cdot} \leqslant 0$ в силу системы (1.1), отсюда вытекает [8], что инвариантное множество (2.3) равномерно устойчиво. Теорема доказана.

Очевидно, что при любом q, $0 \leqslant q \leqslant p$, равномерная устойчивость множества (2.3) влечет за собой равномерную у-устойчивость движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Если $\operatorname{rank} \| \beta_{ij} \| = p$, то $q = 0$, множество M переходит в точку $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а $v(\mathbf{x})$ определенно положительна; в этом случае движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно устойчиво по всем переменным (в частности, по у). Если же все $\beta_{ij} = 0$ ($\operatorname{rank} \| \beta_{ij} \| = 0$), то $q = p$, а множество M переходит в подпространство $\mathbf{R}_\mathbf{z}^p$; в этом случае квадратичная форма (2.1), (2.2) зависит лишь от у, а $\mathbf{R}_\mathbf{z}^p$ равномерно устойчиво [1,9].

Замечание. Функция

$$v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y}) + \xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2 \tag{2.4}$$

где $w(\mathbf{y})$ — у-определенно-положительная квадратичная форма, а функции ξ_i определены согласно (2.2), приводится к виду, аналогичному (2.1). В самом деле, функция (2.4) отличается от (2.1) следующим дополнительным слагаемым в правой части:

$$w(\mathbf{y}) - \lambda (y_1^2 + \ldots + y_m^2) \tag{2.5}$$

При достаточно малом $\lambda > 0$ квадратичная форма (2.5) у-определенно-положительна и потому приводится к сумме квадратов линейных по y_i форм. Очевидно, что множества (2.3) для функций (2.1) и (2.4) совпадают.

Теорема 2 дает необходимые условия существования функции Ляпунова $v(\mathbf{x})$. Оказывается, что для линейной системы

$$\begin{aligned} y_i^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l \quad (i = 1, \ldots, m) \\ z_s^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{m} c_{sj} y_j + \sum_{l=1}^{p} d_{sl} z_l \quad (s = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{2.6}$$

с постоянными коэффициентами эти условия являются также и достаточными (устойчивость автономных систем всегда равномерна, поэтому в дальнейшем указание на равномерность для краткости опускается).

Теорема 3. Если нулевое решение системы (2.6) у-устойчиво, то существует квадратичная форма с постоянными коэффициентами, являющаяся функцией Ляпунова для этой системы.

Доказательство. Если все $b_{il} = 0$, то теорема очевидна. Предположим, что существует $b_{il} \neq 0$. Тогда, как показано в [10], введением новых переменных

$$\mu_i = \sum_{l=1}^{p} \beta_{il} z_l \quad (i = 1, \ldots, r;\ r \leqslant p) \tag{2.7}$$

где β_{il} выражаются через коэффициенты системы (2.6), эта система может быть приведена к μ-виду

$$\begin{aligned} y_i^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + \sum_{l=1}^{r} e_{il} \mu_l \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \mu_s^{\cdot} &= \sum_{j=1}^{m} a_{sj}^* y_j + \sum_{l=1}^{r} e_{sl}^* \mu_l \quad (s = 1, \ldots, r) \end{aligned} \tag{2.8}$$

причем нулевое решение системы (2.6) у-устойчиво тогда и только тогда, когда нулевое решение системы (2.8) устойчиво по всем переменным у, μ. Из устойчивости нулевого решения системы (2.8) вытекает [11–13] существование определенно-положительной квадратичной формы $w(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$, такой, что $\dot{w}_{(2.8)} \leqslant 0$. В силу свойств функции w существует такое $\lambda > 0$, что $w(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \geqslant \lambda (\| \mathbf{y} \|^2 + \| \boldsymbol{\mu} \|^2) \geqslant \lambda \| \mathbf{y} \|^2$. Следовательно, заменив аргументы μ_i функции $w(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ согласно (2.7), получим у-определенно-положительную квадратичную форму $v(\mathbf{y}, \mathbf{z})$, причем $\dot{v}_{(2.6)} \leqslant 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если нулевое решение системы (2.6) у-устойчиво, то эта система имеет q-мерное ($0 \leqslant q \leqslant p$) положительно инвариантное устойчивое подпространство $M \subset \mathbf{R}_\mathbf{z}^p$.

Это утверждение вытекает из теорем 2 и 3. Отметим, что $M = \{(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) : w(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) = 0\}$; следовательно, $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = 0,\ \beta_{i1} z_1 + \ldots + \beta_{ip} z_p = 0\ (i = 1, \ldots, r)\}$, где β_{il} — коэффициент из (2.7), а $q = p - r$.

Следствие 2. Для системы (2.6) следующие утверждения эквивалентны:

1°. Нулевое решение у-устойчиво.

2°. Каждое решение у-ограничено.

3°. Нулевое решение системы μ-вида, соответствующей системе (2.6), устойчиво.

4°. Существует q-мерное $(0 \leqslant q \leqslant p)$ положительно инвариантное устойчивое подпространство $M \subset \mathbf{R}_z^p$.

5°. Существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами.

Отношение 1° ⇔ 2° доказано в [14], а 1° ⇔ 3° — в [10]; отношения 1° ⇔ 4° и 1° ⇔ ⇔ 5° получаются из теорем 2, 3 и следствия 1.

Если выполнены условия теоремы 2, то согласно [15], положительно инвариантное в силу системы (1.1) множество (2.3) равномерно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых интегрально в окрестности этого множества. Если, кроме того, $\dot{v}_{(1.1)}$ определенно отрицательна по отношению к ρ (x, M), то множество (2.3) равномерно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем либо малых в каждый момент времени в окрестности этого множества. Заметим также, что если существует y-определенно-положительная квадратичная форма v (x), такая, что $\dot{v}_{(2.6)}$ определенно отрицательна по отношению к ρ^2 (x, M), то [12, 16] для любой системы

$$y_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j + \sum_{l=1}^{p} b_{il}z_l + Y_i(t, y, z) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_s^{\cdot} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_j + \sum_{l=1}^{p} d_{sl}z_l + Z_s(t, y, z) \quad (s = 1, \ldots, p)$$

в которой $\| \mathbf{Y}(t, y, z) \| + \| \mathbf{Z}(t, y, z) \| \leqslant A\rho(\mathbf{x}, M)$ с достаточно малой постоянной $A > 0$, множество (2.3) положительно инвариантно и экспоненциально асимптотически устойчиво по линейному приближению.

3. *Пример* 1 [5, 17]. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа допускает бесконечное множество перманентных вращений. Уравнения возмущенного движения имеют первые интегралы (в обозначениях [5])

$$V_1 = A\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2p_0\xi_1 + 2q_0\xi_2) + C\,(\xi_3^2 + 2r_0\xi_3) + 2Pz_0\eta_3$$
$$V_2 = A\,(p_0\eta_1 + \alpha\xi_1 + q_0\eta_2 + \beta\xi_2 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + C\,(r_0\eta_3 + \gamma\xi_3 + \xi_3\eta_3)$$
$$V_3 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 2\,(\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3), \quad V_4 = \xi_3$$

Функция [5] $V = V_1 - 2\omega V_2 + A\omega^2 V_3 + C\mu V_4^2$ приводится к виду

$$V = C\,(1 + \mu)\,\xi_3^2 - 2C\omega\xi_3\eta_3 + A\omega^2\eta_3^2 + A\,(\xi_1 - \omega\eta_1)^2 + A\,(\xi_2 - \omega\eta_2)^2 \tag{3.1}$$

Существует $\mu > 0$, такое, что квадратичная форма $C\,(1 + \mu)\,\xi_3^2 - 2C\omega\xi_3\eta_3 + A\omega^2\eta_3^2$ определенно положительна. Следовательно, функция (3.1) определенно положительна по ξ_3, η_3 и представлена в виде, аналогичном (2.4). На основании теоремы 2 и замечания, сделанного в п. 2, заключаем, что уравнения возмущенного движения имеют инвариантное устойчивое множество

$$\xi_3 = \eta_3 = 0, \quad \xi_1 - \omega\eta_1 = 0, \quad \xi_2 - \omega\eta_2 = 0 \tag{3.2}$$

лежащее в подпространстве $\xi_3 = \eta_3 = 0$. Отсюда, в частности, вытекает устойчивость невозмущенного движения относительно ξ_3, η_3 [5]. Отметим, что инвариантное множество (3.2) соответствует подмножеству множества перманентных вращений.

Пример 2 [18]. Движение голономной механической системы с нормальными координатами $x_1, \ldots, x_n$, которая находится под действием диссипативных, гироскопических сил и сил радиальной коррекции, при отсутствии нелинейных членов описывается системой уравнений

$$x_i^{\cdot\cdot} = -b_i x_i + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j^{\cdot} + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, n;\ g_{ij} = -g_{ji};\ e_{ij} = -e_{ji}) \tag{3.3}$$

Предположим, что $e_{ij} = \alpha g_{ij}$ $(\alpha > 0)$, и рассмотрим функцию [18]

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\cdot 2} + \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{\cdot} \tag{3.4}$$

Ее производная по времени в силу системы (3.3) $V^{\cdot} = -\sum_{i=1}^{n} (b_i - \alpha)\, x_i^{\cdot 2}$.

Пусть [18] $b_1 = \ldots = b_m = \alpha$, $b_{m+1} > \alpha, \ldots, b_n > \alpha$. В этом случае $V^{\cdot} \leqslant 0$, а функция (3.4) преобразуется к виду

$$V = \left\{\frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{n} x_i^{\cdot 2} + \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=m+1}^{n} b_i x_i^2 + \alpha \sum_{i=m+1}^{n} x_i x_i^{\cdot}\right\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{\cdot} + \alpha x_i)^2$$

Квадратичная форма, стоящая в фигурных скобках, определенно положительна по отношению к $x_{m+1}, \ldots, x_n, \dot{x}_{m+1}, \ldots, x_n^{\cdot}$. Учитывая замечание из п. 2, на основании теоремы 2 заключаем, что система (3.3) имеет положительно инвариантное устойчивое множество

$$x_i = x_i^{\cdot} = 0,\ x_j^{\cdot} + \alpha x_j = 0\ (i = m + 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$$

(этот вывод остается в силе и в том случае, когда $g_{ij} = g_{ij}(\mathbf{x})$, $e_{ij} = \alpha g_{ij}$).

Отсюда, в частности, вытекает устойчивость невозмущенного движения относительно $x_{m+1}, \ldots, x_n, \dot{x}_{m+1}, \ldots, x_n^{\cdot}$ [18]. Можно показать, что устойчивость относительно $\dot{x}_{m+1}, \ldots, x_n^{\cdot}$ при этом является асимптотической.

Пример 3 [10]. Рассмотрим линейную стационарную систему третьего порядка

(3.5) $$y^{\cdot} = -y + z_1 - 2z_2,\quad z_1^{\cdot} = 4y + z_1,\quad z_2^{\cdot} = 2y + z_1 - z_2$$

и y-определенно-положительную квадратичную форму $v = y^2 + (z_1 - 2z_2)^2$. Ее производная в силу системы (3.5) $v^{\cdot} = -y^2 - (y - z_1 + 2z_2)^2 - (z_1 - 2z_2)^2$.

На основании теоремы 2 заключаем, что система (3.5) имеет положительно инвариантное устойчивое множество

(3.6) $$\{(y, z_1, z_2):\ y = 0,\ z_1 - 2z_2 = 0\}$$

Учитывая, что $v^{\cdot} \leqslant -v$, можно показать, что множество (3.6) экспоненциально асимптотически устойчиво. Отсюда, в частности, вытекает экспоненциально асимптотическая y-устойчивость нулевого решения системы (3.5) [10].

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 364—384.
2. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 145—154.
3. *Hanh W.* Stability of motion. B. etc.: Springer, 1967. 446p.
4. *Risito C.* On the Chetayev method for the construction of a positive definite first integral.— Ann. Soc. scient. Bruxelles. Ser. 1, 1975, v. 89, No. 1, p. 3—10.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных.— Вестн. МГУ. Сер. Матем., механ., физ., астрон., хим., 1957, № 4, с. 9—16.
6. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971, 271 с.
7. *Озиранер А. С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных.— Вестн. МГУ. Матем., механ., 1971, № 1, с. 92—100.
8. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities. Theory and Applications. N.—Y.: Acad. Press, 1969, v. 1. 390 p.; v. 2. 319 p.
9. *Rouche N., Peiffer K.* Le théorème de Lagrange — Dirichlet et la deuxième méthode de Liapounoff.— Ann. Soc. scient. Bruxelles. Ser. 1, 1967, v. 81, No. 1, p. 19—33.
10. *Воротников В. И., Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 2, с. 268—271.
11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. *Кривошеев Ю. А., Луценко А. В.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем с постоянной и почти постоянной матрицей.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 205—210.
15. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 419—427.
16. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 659—665.
17. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 1, с. 51—66.
18. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем.— Вестн. МГУ. Матем., механ., 1972, № 4, с. 87—90.

Москва

Поступила в редакцию
30.XI.1984