Для функций же $\lambda_i(t, \tau_i, s, v(s), z_i^3, m_i^3)$ после переключения, если выполняется условие

$$0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} \bigcup_{i=1}^{m} (z_{i1}^{\circ} + \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha\tau_i}) z_{i2}^{\circ} - M_i^3(t, \tau_i)) \tag{12}$$

справедливо условие

$$\inf_{v(\cdot)} \max_{i \in N} \int_{\tau_i}^{T} \lambda_i(t, \tau_i, s, v(s), z_i^{\circ}, M_i^3(t, \tau_i))\, ds \geqslant A > 0$$

для любого наперед заданного числа $A > 0$, если только взять T достаточно большим.

Пусть $m = 3$. Положим $\theta = 0{,}1R(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})^{-1}\alpha$ и в качестве примера возьмем следующие начальные позиции:

$$z_{11}^{\circ} = (-2R, R), \quad z_{21}^{\circ} = (0, 2R), \quad z_{31}^{\circ} = (2R, R), \quad z_{12}^{\circ} =$$
$$= (0, -2R(1 - e^{-\lambda\tau})^{-1}\alpha), \quad z_{22}^{\circ} = (0, 0), \quad z_{32}^{\circ} = z_{12}^{\circ}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \theta$$

Для этих начальных позиций, как легко видеть, условие (12) выполняется для $\tau_i = \tau$ $(i = 1, 2, 3)$. При этом из (11) получаем оценку

$$\int_{0}^{\tau_i} \lambda_i(t, \tau_i, s, v(s), z_i^{\circ}, m_i^3)\, ds < 1, \quad \forall \tau_i \in [0, \theta], \quad i = 1, 2, 3$$

Следовательно, поимка убегающего в данной игре возможна только в случае, когда момент переключения $\tau_i \in (0, \theta]$, например $\tau_i = \tau$ $(i = 1, 2, 3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский М. С.* Линейные дифференциальные игры с переменной структурой.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 4, с. 791—794.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Григоренко Н. Л.* Дифференциальные игры преследования несколькими объектами. М.: Изд-во МГУ, 1983. 79 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.II.1985

УДК 62–50

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Баймурзаева Ж. Х.

Задача построения функционала в теории управления материальными системами рассматривается как обратная задача динамики [1]. На практическую ценность обратных задач оптимального управления впервые обратил внимание А. М. Летов [2]. Им был решен ряд обратных задач выбора оптимизируемого функционала в задачах управления движением летательных аппаратов. Этот подход был успешно использован также в задачах робототехники [3]. Процедура решения обратных задач позволяет соединить достоинства инженерных приемов, основанных на формулировании законов управления из условий движения по заданной программе, с возможностями методов теории оптимального управления.

Рассмотрим управляемый объект, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot} = f(x, u, t), \quad x \in R^n, \quad u \in R^r \tag{1}$$

где f — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, u — кусочно-непрерывное управление, $0 \leqslant t \leqslant T$. Начальное условие $a = x(0)$ и время T будем считать заданными. Пару $\{u(t), x(t)\}$ назовем допустимым процессом, если $u(t)$, $x(t)$ удовлетворяют (1).

Обратную задачу оптимального управления для рассматриваемого объекта определим как задачу нахождения непрерывно дифференцируемой функции $f_0(x, u)$, такой, что решение задачи максимизации функционала

$$
J = \int_0^T f_0(x, u)\,dt \tag{2}
$$

приводило бы к заданному допустимому процессу $\{u^*(t), x^*(t)\}$.

Представим неизвестную функцию $f_0(x, u)$ как сумму непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_s(x, u)$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$ в виде

$$
f_0(x, u) = \sum_{s=1}^{p} c_s \varphi_s(x, u)
$$

В этом случае обратная задача оптимального управления будет заключаться в нахождении всех таких коэффициентов c_s $(s = 1, 2, \ldots, p)$, чтобы максимизация функционала

$$
J = \int_0^T \sum_{s=1}^{p} c_s \varphi_s(x, u)\,dt \tag{3}
$$

при выполнении (1) приводила к заданному допустимому процессу $\{u^*(t), x^*(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Чтобы исключить тривиальный случай равенства нулю всех коэффициентов c_s (в этом случае любой допустимый процесс будет оптимальным для функционала, тождественно равного нулю), введем понятие невырожденного решения обратной задачи: решение обратной задачи назовем невырожденным, если среди коэффициентов c_s есть хотя бы один ненулевой.

Предположим, что найдены коэффициенты, решающие обратную задачу. Тогда необходимыми условиями оптимальности заданного допустимого процесса $\{u^*(t), x^*(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ для функционала (3) при выполнении (1) являются условия принципа максимума Л. С. Понтрягина [4]: если $\{u^*(t), x^*(t)\}$ — оптимальный процесс, то существует ненулевое решение системы сопряженных уравнений

$$
\dot\psi_l(t) = -\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t) \frac{\partial f_\nu(*)}{\partial x_l} - \sum_{s=1}^{p} c_s \frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial x_l} \tag{4}
$$

с краевым условием $\psi_l(T) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, такое, что

$$
u^*(t) = \operatorname{Arg}\max_{u \in R^r} \Big[\sum_{s=1}^{p} c_s \varphi_s(x^*, u) + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_l(t) f_\nu(x^*, u, t)\Big]
$$

В рассматриваемом случае (множество допустимых управлений открыто) из (4) следует, что

$$
\sum_{s=0}^{p} c_s \frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t) \frac{\partial f_\nu(*)}{\partial u_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{5}
$$

где звездочка означает, что значения аргументов производных выбираются на траектории $\{u^*(t), x^*(t)\}$.

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$
\dot\psi_l(t) = -\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t) \frac{\partial f_\nu(*)}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}
$$

Фундаментальную матрицу решений однородной системы уравнений (6), обращающуюся в единичную при заданном значении времени перехода $t = T$, обозначим $\Psi(t)$. Тогда решение системы (4) с указанным краевым условием можно записать в виде $\Psi(t) = \Psi_c(t)\,c$, где $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_r(t))^T$ — вектор-столбец сопряженных переменных, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^T$ — вектор-столбец с координатами — неизвестными коэффициентами в функционале (3), матрица $\Psi_c(t)$ имеет вид

$$
\Psi_c(t) = \Psi(t) \int_0^T \Psi^{-1}(t)\, \Phi_x(t)\,dt
$$

а входящая сюда матрица $\Phi_x(t)$ будет следующей:

$$(7)\qquad \Phi_x(t) = \left[\frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial x_l}\right] \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, p)$$

Введем также матрицы, определенные по заданному процессу $\{u^*(t), x^*(t)\}$, в форме

$$\Phi_u(t) = \left[\frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial u_j}\right], \quad F_u(t) = \left[\frac{\partial f_\nu(*)}{\partial u_j}\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

В этих обозначениях уравнение (5) принимает вид

$$\Phi_u(t)\, c + F_u(t)\, \Psi(t) = 0$$

Подставляя найденное решение для $\Psi(t)$ в полученное соотношение, приходим к уравнению

$$(8)\qquad K(t)\, c = 0, \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^T, \quad K(t) = [k_{js}] = \Phi_u(t) + F_u(t)\, \Psi_c(t)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы, предполагая выполненными приведенные вначале условия на функции f, φ_s.

Теорема 1. Любое решение обратной задачи оптимального управления (1), (3) является решением при $0 \leqslant t \leqslant T$ системы линейных однородных уравнений (8). Если функции $k_{j1}(t), k_{j2}(t), \ldots, k_{jp}(t)$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant r$ линейно независимы, то обратная задача не имеет невырожденного решения.

Для определения возможных значений коэффициентов, удовлетворяющих системе (8), рассмотрим i-е уравнение этой системы, которое имеет вид

$$(9)\qquad k_{i1}(t)\, c_1 + k_{i2}(t)\, c_2 + \ldots + k_{ip}(t)\, c_p = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Введя в рассмотрение скалярное произведение

$$(x(t), y(t)) = \int_0^T x(t)\, y(t)\, dt$$

последовательно умножим уравнения (9) на $k_{i1}(t), k_{i2}(t), \ldots, k_{ip}(t)$. Получим системы линейных однородных уравнений. Обозначая матрицы этих систем (матрицы Грама системы функций $k_{i1}(t), k_{i2}(t), \ldots, k_{ip}(t)$ на интервале $(0, T)$) через Γ_i, запишем их в виде

$$(10)\qquad \Gamma_i c = 0$$

Рассмотрим первую систему из (10). Пусть $\rho_1 = \operatorname{rank} \Gamma_1$. Общее решение однородной системы (10) найдем в виде $c = R_1 w_1$, где $w_1 \in R^{p-\rho_1}$ — произвольный вектор, а столбцы матрицы R_1 являются фундаментальной системой решений системы однородных уравнений (10). Если ранг ρ_1 равен p, то ненулевого решения у рассматриваемой системы нет и обратная задача не имеет невырожденного решения.

Допустим, что найден вектор c, удовлетворяющий j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ системам однородных уравнений (10), т. е. известна матрица R_j в представлении решения

$$(11)\qquad c = R_j w_j$$

при произвольном векторе w_j. Подставив (11) в $(j+1)$-е уравнение (10), получим линейную однородную систему для определения вектора w_j, такого, что вектор c будет являться решением не только j-й системы, но и $(j+1)$-й системы (10) вида

$$(12)\qquad \Gamma_{j+1} R_j w_j = 0$$

Найдя общее решение (12) в виде $w_j = W_j w_{j+1}$ (столбцы матрицы W_j — фундаментальная система решений, w_{j+1} — произвольный вектор), получим решение для $(j+1)$-й системы (10) в виде

$$c = R_{j+1} w_{j+1}, \quad R_{j+1} = R_j W_j$$

Полагая последовательно $j = 1, 2, \ldots, r$, получим окончательно $c = R_r w_r$. Полученная формула решает вопрос о нахождении всех векторов c, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Если при некотором $j = 1, 2, \ldots, r-1$ получим, что у системы (12) нет решения, кроме тривиального, то невырожденного решения у обратной задачи нет.

Рассмотрим тот же управляемый объект, описываемый системой уравнений (1) с заданным начальным условием $a = x(0)$ и известным временем перехода T. Будем теперь считать, что на управления $u_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ наложены ограничения вида

(13) $$\alpha_j \leqslant u_j(t) \leqslant \beta_j,\ 0 \leqslant t \leqslant T$$

Обратную задачу оптимального управления для такого объекта определим как задачу нахождения таких коэффициентов c_s $(s = 1, 2, \ldots, p)$ в функционале (3), чтобы максимизация этого функционала при выполнении (1), (13) приводила бы к заданному процессу $\{u^*(t), x^*(t)\}$. В рассматриваемом случае условие (5) уже не является необходимым условием максимума функции Гамильтона на оптимальном управлении и для формулировки таких условий определим по заданному допустимому процессу и ограничениям (13) множества

$$T_j^\alpha = \{t \mid u_j(t) = \alpha_j\},\quad T_j^\beta = \{t \mid u_j(t) = \beta_j\},\quad T_j = \{t \mid \alpha_j < u_j(t) < \beta_j\}$$
$$t \in [0, T],\ j = 1, 2, \ldots, r$$

Будем считать, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$ введенные множества T_j^α, T_j^β, T_j либо пусты, либо представимы в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся интервалов T_{jk}^α, T_{jk}^β, T_{jk}, т. е. справедливо разложение

$$T_j^\alpha = \bigcup_{k=1}^{n_i^\alpha} T_{jk}^\alpha,\quad T_j^\beta = \bigcup_{k=1}^{n_i^\beta} T_{jk}^\beta,\quad T_j = \bigcup_{k=1}^{n_i} T_{jk}$$
$$T_{jk}^\alpha = \{t \mid t_{jk}^{(\alpha_1)} \leqslant t \leqslant t_{jk}^{(\alpha_2)}\},\quad T_{jk}^\beta = \{t \mid t_{jk}^{(\beta_1)} \leqslant t \leqslant t_{jk}^{(\beta_2)}\}$$
$$T_{jk} = \{t \mid t_{jk}^{(1)} \leqslant t \leqslant t_{jk}^{(2)}\}$$

При сделанных предположениях сформулируем необходимые условия того, что коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_p$ решают поставленную обратную задачу оптимального управления.

Теорема 2. Пусть коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_p$ являются решением обратной задачи оптимального управления с ограничениями (13) для заданного допустимого процесса $\{u^*(t), x^*(t)\}$. Тогда эти коэффициенты удовлетворяют соотношениям

(14) $$\Sigma = 0,\ t \in T_j;\ \Sigma \leqslant 0,\ t \in T_j^\alpha$$
$$\Sigma \geqslant 0,\ t \in T_j^\beta;\ \Sigma = \sum_{s=1}^{p} k_{js}(t)\, c_s$$

в которых коэффициенты $k_{js}(t)$ имеют вид

(15) $$k_{js}(t) = \frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_{\nu s}^c(t) \left[\frac{\partial f_\nu(*)}{\partial u_j}\right]$$

Элементы $\psi_{\nu s}{}^c(t)$ матрицы $\Psi_c(t)$ определяются из ее вида

(16) $$\Psi_c(t) = \Psi(t) \int_0^T \Psi^{-1}(t)\, \Phi_x(t)\, dt$$

где $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы однородных дифференциальных уравнений (6), обращающаяся в единичную при $t = T$, а $\Phi_x(t)$ есть матрица (7).

Доказательство. Необходимые условия оптимальности процесса $\{u^*(t), x^*(t)\}$ для функционала (3) при выполнении условий (13) можно сформулировать следующим образом: если допустимый процесс $\{u^*(t), x^*(t)\}$ оптимален, то существует ненулевое решение системы сопряженных уравнений

(17) $$\psi_l^{\cdot}(t) = -\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t)\left[\frac{\partial f_\nu(*)}{\partial x_l}\right] - \sum_{s=1}^{p} c_s \left[\frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial x_l}\right]$$
$$\psi_l(T) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, n$$

такое, что для всех, кроме конечного числа значений t $(0 \leqslant t < T)$, выполняются соотношения

(18) $$E = 0,\ t \in T_j;\ E \leqslant 0,\ t \in T_j^\alpha;\ E \geqslant 0,\ t \in T_j^\beta$$
$$E = \sum_{s=1}^{p} c_s \frac{\partial \varphi_s(*)}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(t) \frac{\partial f_\nu(*)}{\partial u_j}$$

Соотношения (18) являются условиями типа Куна—Таккера достижения функцией Гамильтона максимума на оптимальном управлении и могут быть получены из теоремы 4.14 [5] для рассматриваемого типа ограничений на управления.

Решение системы дифференциальных уравнений (17) с указанным краевым условием имеет вид

$$\Psi(t) = \psi_c(t)\, c \tag{19}$$

где введены обозначения (16) и (7).

Входящая сюда метрица $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы однородных уравнений (17), обращающаяся в единичную при $t = T$, $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))^T$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)^T$.

Подставляя (19) в соотношения (18) и вводя обозначения (15), приходим к утверждению теоремы.

Следствие. Пусть для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ и $k \in (1, 2, \ldots, n_j)$ система функций $k_{j1}(t), k_{j2}(t), \ldots, k_{jp}(t)$ линейно независима на интервале T_{jk}. Тогда обратная задача не имеет невырожденного решения.

Замечание. В некоторых случаях обратная задача ставится как задача нахождения неотрицательных коэффициентов $c_s \geqslant 0$ в функционале (3). Очевидно, что и в этом случае справедливо необходимое условие оптимальности существования невырожденного решения, сформулированное в утверждении теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 144 с.
2. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. *Белецкий В. В.* Двуногая ходьба: Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Д.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Ташауз

Поступила в редакцию 2.I.1985

УДК 531.36

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Озиранер А. С.

Получены условия существования функции Ляпунова в виде определенно-положительной по части переменных квадратичной формы с постоянными коэффициентами, необходимые для нелинейных систем, а также необходимые и достаточные для линейных стационарных систем. Рассмотрены примеры.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения [1]

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)^T, \; m > 0, \; p \geqslant 0, \; n = m + p$$

Предполагаем, что: а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \; \|\mathbf{y}\| \leqslant H > 0, \; \|\mathbf{z}\| < +\infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, определенного начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$; б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы.

Предположим, что для системы (1.1) известны k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ первых интегралов

$$V_i(t, \mathbf{x}) = \text{const} \quad (V_i(t, 0) \equiv 0), \; i = 1, \ldots, k \tag{1.3}$$

Г. К. Пожарицким [2] получены необходимые и достаточные условия существования определенно-положительной функции

$$V(t, \mathbf{x}) = F(V_1(t, \mathbf{x}), \ldots, V_k(t, \mathbf{x})) \tag{1.4}$$

образованной из интегралов (1.3). Эти результаты распространяются на задачу устойчивости относительно части переменных. Именно: