Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 539.3 : 534.1

КЛАССИФИКАЦИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рогачева Н. Н.

Рассматриваются свободные колебания пьезокерамических оболочек произвольной формы, предварительно поляризованных вдоль одного из семейств координатных линий срединной поверхности. Асимптотическим методом проведена классификация различных видов колебаний, получены приближенные уравнения и граничные условия, соответствующие каждому виду колебаний.

1. Выберем на срединной поверхности оболочки координатные линии α_1 и α_2 совпадающими с линиями кривизны. Будем считать, что пьезокерамическая оболочка предварительно поляризована вдоль α_2-линий, а лицевые поверхности оболочки не имеют электродов.

Выпишем исходную систему уравнений.

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}+qk_j(T_i-T_j)-q2k_iS-$$
$$-qp\frac{N_i}{R_i}+q2h\rho\Omega^2u_i=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}+p\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2}+qk_2N_1+qk_1N_2\right)+$$
$$+2h\rho\Omega^2w=0 \tag{1.2}$$

$$N_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}+qk_j(G_i-G_j)-2k_iH \tag{1.3}$$

Соотношения пьезоупругости и уравнения электростатики

$$T_i=2hn_{ii}(\varepsilon_i+\nu_i\varepsilon_j)-2hc_iE_2,\quad S=\frac{2h}{s_{44}{}^E}(\omega-d_{15}E_1) \tag{1.4}$$

$$G_i=-\frac{2h^3n_{ii}}{3}(\varkappa_i+\nu_i\varkappa_j),\quad H=\frac{2h^3}{3s_{44}{}^E}\tau \tag{1.5}$$

$$D_1=\varepsilon_{11}{}^TE_1+\frac{d_{15}}{2h}S,\quad D_2=\varepsilon_{33}{}^TE_2+\frac{d_{31}}{2h}T_1+\frac{d_{33}}{2h}T_2 \tag{1.6}$$

$$\varepsilon_{11}{}^T\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}+\varepsilon_{33}{}^T\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2}=\frac{d_{15}}{2h}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}A_1S+$$
$$+\frac{d_{31}}{2h}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1T_1+\frac{d_{33}}{2h}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}A_1T_2 \tag{1.7}$$

$$E_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \tag{1.8}$$

Формулы деформации — перемещения

$$\varepsilon_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}+qk_iu_j-\frac{w}{R_i} \tag{1.9}$$
$$\omega=\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-q(k_1u_1+k_2u_2)$$

$$\varkappa_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i}-qk_i\gamma_j,\quad \gamma_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}-q\frac{u_i}{R_i} \tag{1.10}$$
$$\tau=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i}+qk_i\gamma_i+q\frac{1}{R_i}\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}-k_ju_j\right)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$n_{11}=\frac{s_{33}{}^E}{\delta},\quad n_{12}=n_{21}=\frac{s_{13}{}^E}{\delta},\quad n_{22}=\frac{s_{11}{}^E}{\delta},$$

$$c_1=\frac{d_{31}s_{33}{}^E-d_{33}s_{13}{}^E}{\delta}$$

$$c_2=\frac{d_{33}s_{11}{}^E-d_{31}s_{13}{}^E}{\delta},\quad \delta=s_{11}{}^E s_{33}{}^E-(s_{13}{}^E)^2,$$

$$\nu_1=\frac{n_{12}}{n_{11}},\quad \nu_2=\frac{n_{12}}{n_{22}},\quad k_i=\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}$$

Здесь и в дальнейшем каждое равенство, содержащее индексы i и j, следует рассматривать как два равенства, первое получается, если положить $i=1$, $j=2$, второе — если $i=2$, $j=1$. Числа p, q, которые будут использованы ниже следует считать равными единице.

В формулах (1.1), (1.2) учтено, что оболочка совершает колебания по закону $e^{-i\Omega\tau}$, где $i=\sqrt{-1}$, τ — время, Ω — круговая частота колебаний.

Уравнения равновесия и формулы деформации — перемещения такие же, как в теории неэлектрических оболочек [1]. Двумерные соотношения пьезоупругости и уравнения электростатики получены в [2].

Используемые обозначения совпадают с обозначениями, принятыми в [1, 2].

Как показано в [2, 3], для оболочек с рассматриваемой предварительной поляризацией с неэлектродированными лицевыми поверхностями полная двумерная задача, вообще говоря, не расчленяется на механическую и электрическую. Система дифференциальных уравнений теории электроупругих оболочек десятого порядка, поэтому на каждом краю оболочки должно удовлетворяться по пять граничных условий — четыре механических совпадающих с условиями, принятыми в теории неэлектрических оболочек, и одно электрическое.

Ограничимся рассмотрением оболочек с двумя видами электрических условий на краях. На неэлектродированном краю $\alpha_i=\alpha_{i0}$ в вакууме или воздухе нормальная к торцевой поверхности компонента вектора электрической индукции должна быть равна нулю: $D_i=0$. На электродированном краю $\alpha_i=\alpha_{i0}$ с накоротко замкнутыми электродами равен нулю электрический потенциал: $\psi=0$.

2. Исследование спектра свободных установившихся колебаний будет производиться асимптотическим методом, подобно тому, как это делалось в [4]. Асимптотическое интегрирование уравнений пьезоупругих оболочек, как правило, сводится к двум итерационным процессам — основному, приводящему к главной краевой задаче (ГЗ), заключающейся в интегрировании вырожденной задачи с выполнением некоторых граничных условий (из уравнений главной задачи определяются, в частности, собственные частоты), и дополнительной краевой задаче (ДЗ), соответствующей итерационному процессу, позволяющему снять невязки в остальных граничных условиях.

Свободные колебания произвольной пьезокерамической оболочки можно подразделить на квазипоперечные, квазитангенциальные и сверхнизкочастотные колебания релеевского типа. Здесь сохранена терминология теории неэлектрических оболочек [4], несмотря на то, что уравнения ГЗ и ДЗ включают электрические величины.

Выполним обычную для асимптотических методов замену независимых переменных α_i по формулам

$$(2.1)\qquad \alpha_i=\eta^t R\xi_i$$

Здесь η — относительная полутолщина оболочки, R — характерный размер, t — показатель изменяемости электроупругого состояния. Безразмерные координаты ξ_i выбираются таким образом, чтобы дифференцирование по ним не приводило к существенному увеличению или уменьшению искомых функций.

Вместо искомых величин введем безразмерные величины одного порядка (обозначим их звездочками) следующим образом:

$$(2.2)\qquad \frac{u_i}{R}=\eta^{t+r}u_{i*},\quad \frac{w}{R}=\eta^0 w_*$$
$$\left(\frac{T_i}{2hn_{11}},\ \frac{S}{2hn_{11}}\right)=\eta^{c+r}(T_{i*},\ S_*),$$
$$\left(\frac{G_i}{2hRn_{11}},\ \frac{H}{2hRn_{11}}\right)=\eta^{2-2t}\quad (G_{i*},\ H_*)$$
$$\frac{N_i}{2hn_{11}}=\eta^{2-3t}N_{i*},\quad \frac{\varepsilon_{11}{}^T}{d_{15}n_{11}R}\psi=\eta^{t+r+c}\psi_*,\quad \frac{\rho\Omega^2R^2}{n_{11}}=\eta^{b+t}\Omega_*{}^2$$

Числа r, b, c принимают различные значения в зависимости от вида колебаний.

Для каждого вида колебаний асимптотическое представление искомых величин выбирается таким образом, чтобы оно имело физический смысл и приводило в первом приближении к непротиворечивой системе уравнений, в которой число неизвестных равно числу уравнений. Кроме того, граничные условия ГЗ и ДЗ должны расчленяться таким образом, чтобы для дополнительной задачи граничные условия были неоднородными, а вновь появившиеся после решения дополнительной задачи невязки в граничных условиях главной задачи были малы.

Подставим (2.1), (2.2) в систему уравнений (1.1) — (1.10). В результате получим уравнения, в которых порядок каждого члена уравнения явно определяется стоящим перед ним множителем η в некоторой степени.

3. Под квазипоперечными колебаниями с малой изменяемостью будем понимать колебания, при которых показатель изменяемости электроупругого состояния меньше $^1/_2$ и прогиб w существенно больше тангенциальных перемещений u_1, u_2. Числа r, c, b следует выбирать таким образом:

$$(3.1)\qquad r=b=c=0$$

В результате подстановки асимптотики (2.2), (3.1) и замены переменных (2.1) из уравнений (1.1) — (1.10) после отбрасывания малых членов получим систему уравнений ГЗ. Она включает в себя безмоментные уравнения равновесия (1.1), (1.2) (в них надо положить $p=0$, $q=1$), соотношения пьезоупругости и уравнения электростатики (1.4), (1.6) — (1.8), формулы (1.9). Эта система уравнений служит для определения перемещений, тангенциальных усилий, собственных частот. Она является исходным приближением основного итерационного процесса.

ГЗ описывает безмоментное электроупругое состояние. Вблизи краев его следует дополнить электроупругим состоянием с изменяемостью, равной $^1/_2$, в направлении, ортогональном к краю и t (t — показатель изменяемости в ГЗ) — вдоль края. Это напряженное состояние определяется при помощи дополнительного итерационного процесса. Выпишем его асимптотику и уравнения первого приближения.

Вблизи края $\alpha_i = \alpha_{i0}$ вместо искомых величин следует ввести безразмерные величины со звездочками и безразмерные координаты

$$(3.2)\qquad \frac{u_i}{R} = \eta^{1/2} u_{i*}, \quad \frac{u_j}{R} = \eta^{1-t} u_{j*}, \quad \frac{w}{R} = w_*$$

$$\left(\frac{G_1}{2hRn_{11}}, \frac{G_2}{2hRn_{11}}\right) = \eta^1 (G_{1*}, G_{2*}), \quad \frac{H}{2hRn_{11}} = \eta^{3/2-t} H_*$$

$$\frac{N_i}{2hn_{11}} = \eta^{1/2} N_{i*}, \quad \frac{N_j}{2hn_{11}} = \eta^{1-t} N_{j*}, \quad \frac{T_j}{2hn_{11}} = \eta^0 T_{j*}$$

$$\frac{S}{2hn_{11}} = \eta^{1/2-t} S_*, \quad \frac{T_i}{2hn_{11}} = \eta^{1/2} T_{i*}, \quad d_i\psi = \eta^{1-t}\psi_*$$

$$(3.3)\qquad \alpha_i = \eta^{1/2} R\xi_i, \quad \alpha_j = \eta^t R\xi_j$$

Учитывая (3.2), (3.3), получим следующие основные соотношения дополнительного электроупругого состояния в первом приближении:

$$(3.4)\qquad \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_i^4} + 4g_i^4 w = 0$$

$$u_i = -\left(\frac{1}{R_i} + \frac{\nu_i + b_i}{R_j}\right)\frac{A_i}{4g_i^4}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha_i^3}, \quad \varkappa_i = \frac{1}{A_i^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i^2}$$

$$T_j = -2hn_{jj}\frac{a_i}{R_j} w, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(A_i T_j)$$

$$G_i = -\frac{2h^3 n_{ii}}{3}\varkappa_i, \quad G_j = \nu_i G_i, \quad N_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = F_i$$

В (3.2), (3.4) приняты обозначения

$$(3.5)\qquad 4g_i^4 = \frac{3A_i^4}{h^2 n_{11}}\left(\frac{n_{jj} a_i}{R_j^2} - \rho\Omega^2\right)$$

$$a_1 = 1 - \nu_1\nu_2, \quad a_2 = \frac{a_1 \varepsilon_{33}^T}{\varepsilon_{33}^T + d_{31}(\nu_2 c_2 - c_1)}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{c_2 d_{31} n_{11} a_2}{n_{22}\varepsilon_{33}^T}$$

$$d_1 = \frac{\varepsilon_{11}^T}{d_{15} n_{11} R}, \quad d_2 = \frac{\varepsilon_{33}^T}{d_{31} n_{11} R}, \quad F_1 = \frac{d_{15} - d_{33}}{2h\varepsilon_{11}^T} S, \quad F_2 = \frac{d_{31}}{2h\varepsilon_{33}^T} T_1$$

На краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ в формулах дополнительного электроупругого состояния (3.2) — (3.5) следует положить $i = 1$, $j = 2$, на краю $\alpha_2 = \alpha_{20}$ — $i = 2$, $j = 1$. Частота Ω, входящая в уравнения (3.5),— величина известная. Она найдена при решении ГЗ.

Характер решения уравнения (3.4) зависит от знака g_i^4: если $g_i^4 > 0$, то решение затухает при удалении от края, если $g_i^4 < 0$, решение осциллирующее. Случай $g_i^4 = 0$ требует особого рассмотрения.

Дополнительное электроупругое состояние описывается уравнениями, аналогичными уравнениям дополнительного напряженного состояния неэлектрических оболочек. Разрешающее уравнение и формулы для механических величин совпадают с известными формулами теории неэлектрических оболочек с точностью до постоянных коэффициентов. В случае статики уравнения (3.4) переходят в уравнения простого краевого эффекта для пьезокерамических оболочек.

Уравнения ГЗ позволяют удовлетворить трем условиям на каждом краю. Невязки, возникающие в двух отброшенных граничных условиях, можно устранить при помощи произволов дополнительного электроупругого состояния.

Граничные условия для ГЗ и ДЗ получим по схеме, приведенной в [5]. В результате расчленения полных граничных условий получим для ГЗ два тангенциальных механических условия, совпадающих с условиями для безмоментной теории неэлектрических оболочек, и одно электрическое условие. Решение ДЗ снимает невязки в двух оставшихся механических нетангенциальных условиях. Например, на жестко заделанном неэлектродированном краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ полные граничные условия расчленяются следующим образом:

$$u_1^{(b)} = 0, \quad u_2^{(b)} = 0, \quad D_1^{(b)} = 0, \quad w^{(c)} = -w^{(b)}, \quad \gamma_1^{(c)} = 0 \tag{3.6}$$

Индексы b и c означают принадлежность величины к ГЗ и ДЗ соответственно. Первые три условия (3.6) выполняются при решении ГЗ, последние два — при решении ДЗ.

Анализируя все допущенные при выводе уравнений и граничных условий погрешности, можно показать, что ГЗ и ДЗ построены с погрешностью порядка $\eta^{1/2-t}$.

4. Рассмотрим квазипоперечные колебания с большой изменяемостью $t > 1/2$. Асимптотика главной и дополнительной задач получается из (2.2) при $r = 0$, $b = 2 - 4t$, $c = 0$. С учетом принятой асимптотики из системы уравнений (1.1) — (1.10) получим с точностью до величин $0\,(\eta^t + \eta^{2-2t})$ уравнения ГЗ и ДЗ.

Система уравнений ГЗ

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + 2h\rho\Omega^2 w = 0, \quad N_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H}{\partial \alpha_j} \tag{4.1}$$

$$H = \frac{2h^3}{3s_{44}{}^E}\tau, \quad G_i = -\frac{2h^3 n_{ii}}{3}(\varkappa_i + \nu_i \varkappa_j), \quad \varkappa_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i},$$

$$\tau = -\frac{1}{A_j}\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j}, \quad \gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}$$

отличается от соответствующей системы уравнений теории неэлектрических оболочек только смыслом постоянных коэффициентов n_{ii}, ν_i, $s_{44}{}^E$ в соотношениях упругости для моментов. Она описывает изгибные колебания.

Уравнения дополнительной задачи записываются следующим образом:

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = 0, \quad \varepsilon_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} - \frac{w}{R_i} \tag{4.2}$$

$$\omega = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}$$

$$\frac{\varepsilon_{11}{}^T}{A_1{}^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1{}^2} + \frac{\varepsilon_{33}{}^T}{A_2{}^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2{}^2} = \frac{d_{15}}{2h}\frac{1}{A_1}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} + $$

$$+ \frac{1}{2h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(d_{31}T_1 + d_{33}T_2)$$

Чтобы получить замкнутую систему, к этим уравнениям следует добавить (1.4), (1.6), (1.8).

После того как проинтегрирована главная система уравнений (4.1), находится решение системы уравнений дополнительной задачи, при этом считается, что w — известная функция, найденная при решении главной задачи.

Порядок системы уравнений ГЗ — четвертый, ДЗ — шестой. Асимптотическое расчленение граничных условий, выполненное по схеме [5], показывает, что при интегрировании уравнений ГЗ на каждом краю следует удовлетворять двум нетангенциальным механическим граничным условиям, а для ДЗ — двум тангенциальным механическим граничным условиям и одному электрическому условию. Например, на жестко заделанном неэлектродированном краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничные условия расчленяются следующим образом: $w^{(b)} = 0$, $\gamma_1^{(b)} = 0$, $u_1^{(c)} = 0$, $u_2^{(c)} = 0$, $D_1^{(c)} = 0$. В результате решения ГЗ и ДЗ искомые величины будут определены с погрешностью $O(\eta^t)$, где $t > {}^1/_2$.

Квазипоперечные колебания с изменяемостью $t = {}^1/_2$ в первом приближении описываются уравнениями, которые являются обобщением динамических уравнений теории неэлектрических оболочек с большой изменяемостью. Эти уравнения получаются, если в (1.1) — (1.10) положить $p = 0$, $q = 1$. Кроме того, в первом приближении коэффициенты первой и второй квадратичной форм срединной поверхности следует считать постоянными по α_1, α_2.

В случае квазипоперечных колебаний с изменяемостью $t = {}^1/_2$ задача даже в исходном приближении не расчленяется на ГЗ и ДЗ, поэтому при интегрировании полученной упрощенной системы уравнений на каждом краю должны учитываться все пять граничных условий. Погрешность теории первого приближения есть величина $O(\eta^{1/2})$.

5. Квазитангенциальные колебания характеризуются тем, что для них тангенциальные перемещения существенно больше прогиба. Для искомых величин имеет место асимптотика (2.2) при $r = -2t$, $b = -2t$, $c = 0$. Она пригодна для $0 < t < 1$. Асимптотическое интегрирование уравнений (1.1) — (1.10) приводит к ГЗ и ДЗ. Система уравнений ГЗ состоит из уравнений равновесия (1.1), в которых следует отбросить перерезывающие усилия, соотношений пьезоупругости (1.4), формул (1.6) — (1.8), соотношений тангенциальные деформации — перемещения, в которых следует отбросить w. Эту систему уравнений можно рассматривать как уравнения плоской теории пьезоупругости. Система уравнений имеет шестой порядок, поэтому на каждом краю надо ставить три граничных условия.

После того как решена ГЗ, из оставшихся неиспользованных уравнений (1.2), (1.10), (1.5), (1.3) можно доопределить все остальные искомые величины при помощи прямых действий. Из упрощенного с учетом асимптотики уравнения (1.2) следует найти

$$w = -\frac{1}{2h\rho\Omega^2}\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right)$$

затем по формулам (1.10), (1.5), (1.3) определить последовательно деформации изгиба и кручения, моменты и перерезывающие силы. Уравнения ДЗ квазипоперечных колебаний (3.4) сохраняют свою силу и для ДЗ квазитангенциальных колебаний. Исключение представляет формула для $4g_i^4$, которую надо взять в следующем виде:

$$4g_i^4 = -\frac{3A_i^4}{h^2 n_{ii}}\rho\Omega^2$$

Изменяемость электроупругого состояния, описываемого ДЗ, в направлении, ортогональном к краю, равна $(1 + t)/2$ (t — изменяемость электроупругого состояния, определяемого ГЗ). Граничные условия расчленяются так же, как в случае квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью. Решение ГЗ удовлетворяет двум тангенциальным механическим условиям и одному электрическому; образовавшиеся при этом невязки в нетангенциальных механических условиях снимаются за счет произволов ДЗ.

6. Если края оболочки свободны от закреплений, то она может совершать сверхнизкие колебания релеевского типа. Асимптотический анализ уравнений показывает, что полная задача распадается на ГЗ и ДЗ.

Для величин ГЗ имеет место асимптотика (2.2) при $r = 0$, $c = b = 2-4t$. Система уравнений ГЗ состоит из уравнений (1.1) — (1.3) ($p = q = 1$) (1.5) — (1.8) и уравнений

$$\varepsilon_i = 0, \quad \omega = 0 \tag{6.1}$$

которыми заменяются соотношения электроупругости (1.4).

Заметим, что электрические величины входят только в уравнения (1.6) — (1.8). Остальные уравнения ГЗ составляют полную систему уравнений относительно механических величин, совпадающую с точностью до постоянных коэффициентов с системой уравнений свободных неэлектрических оболочек. Поэтому интегрировать уравнения ГЗ следует в два этапа: сначала надо найти решение механической задачи, затем проинтегрировать уравнение (1.7) относительно электрического потенциала ψ, считая усилия известными. Величины E_i, D_i определяются по ψ и усилиям прямыми действиями.

Уравнения ДЗ являются уравнениями простого краевого эффекта. Они получаются из (3.4) при $\omega = 0$.

Выполним расчленение граничных условий на граничные условия для ГЗ и простого краевого эффекта. Все искомые величины, входящие в граничные условия, следует представить в виде суммы величин ГЗ и простого краевого эффекта с учетом их асимптотического представления. Например, на неэлектродированном краю $\alpha_1 = \alpha_{10}$ граничные условия запишутся в виде

$$\eta^{2-4t}T_{1*}^{(b)} + \eta^{a+1/2}T_{1*}^{(c)} = 0, \quad \eta^{2-4t}S_*^{(b)} + \eta^{a+1/2-t}S_*^{(c)} = 0$$

$$\eta^{2-4t}D_{1*}^{(b)} + \eta^{a+1/2-t}D_{1*}^{(c)} = 0, \quad \eta^{2-2t}G_{1*}^{(b)} + \eta^{a+1}G_{1*}^{(c)} = 0$$

$$\eta^{2-3t}N_{1*}'^{(b)} + \eta^{a+1/2}N_{1*}^{(c)} = 0$$

Здесь N_1' — приведенное краевое усилие [1].

Величины простого краевого эффекта определяются из однородных уравнений, поэтому перед ними стоит масштабный множитель η^a, где a подбирается таким образом, чтобы для простого краевого эффекта имели место неоднородные граничные условия. В данном случае следует взять a равным $(1-2t)$. Тогда граничные условия для простого краевого эффекта примут вид

$$G_1^{(c)} = -G_1^{(b)}, \quad N_1^{(c)} = -\eta^{1/2-t}N_1'^{(b)}$$

Подобно тому, как это было сделано в [1, 6], выразим $T_1^{(c)}$, $S^{(c)}$, $D_1^{(c)}$ при помощи решения простого краевого эффекта через $G_1^{(b)}$ и $N_1'^{(b)}$. В результате для ГЗ на краю $\alpha_i = \alpha_{i0}$ получим два механических граничных условия (6.2), совпадающих с соответствующими условиями теории неэлектрических оболочек, и одно электрическое условие ((6.3) на электродированном краю или (6.4) на неэлектродированном)

$$T_i^{(b)} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}(R_jG_i^{(b)}) + k_jR_jN_1'^{(b)} = 0 \tag{6.2}$$

$$S^{(b)} + k_j\frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}(R_jG_i^{(b)}) - \frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}(R_jN_i'^{(b)}) = 0$$

$$\psi^{(b)} = \frac{d_{15} - d_{33}}{2h\varepsilon_{11}{}^T}\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{R_2}{A_1}G_1^{(b)}\right) \quad (\alpha_1 = \alpha_{10}) \tag{6.3}$$

$$\psi^{(b)} = -\frac{R_1}{2h\varepsilon_{33}{}^T}\left(d_{31}N_1'^{(b)} + d_{33}k_1G_2^{(b)}\right) \quad (\alpha_2 = \alpha_{20})$$

$$D_1^{(b)} = \frac{1}{2h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(d_{31}k_2R_2G_1^{(b)} + d_{33}R_2N_1'^{(b)}\right) \quad (\alpha_1 = \alpha_{10}) \tag{6.4}$$

$$D_2^{(b)} = -\frac{1}{2h}\left(\frac{\varepsilon_{11}{}^T d_{31}}{\varepsilon_{33}{}^T} + d_{15}\right)\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{R_1}{A_2}G_2^{(b)} \quad (\alpha_2 = \alpha_{20})$$

7. Проведенный асимптотический анализ показывает, что свободные колебания пьезокерамических оболочек с предварительной поляризацией вдоль α_2-линий с неэлектродированными лицевыми поверхностями можно подразделить на: 1) квазипоперечные с малой изменяемостью $(0 \leqslant t < {}^1/_2)$, 2) квазипоперечные с большой изменяемостью $({}^1/_2 < t < 1)$, 3) квазипоперечные с изменяемостью $t = {}^1/_2$, 4) квазитангенциальные $(0 < t < 1)$, 5) сверхнизкочастотные релеевского типа $(0 \leqslant t < {}^1/_2)$.

Каждый из этих типов колебаний описывается соответствующей системой уравнений. Такая классификация физически понятна и существенно упрощает вычисление собственных частот и других искомых величин.

Отметим, что при той же классификации свободных колебаний, что и в теории неэлектрических оболочек, системы уравнений главной и дополнительной краевой задач качественно отличаются от соответствующих задач неэлектрических оболочек более высоким порядком систем уравнений, большим числом исходных величин, граничными условиями. Поэтому полученную классификацию свободных колебаний пьезокерамических оболочек следует рассматривать как обобщение классификации свободных колебаний неэлектрических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Рогачева Н. Н.* Уравнения состояния пьезокерамических оболочек.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 902—911.
3. *Рогачева Н. Н.* О граничных условиях в теории пьезокерамических оболочек, поляризованных вдоль координатных линий.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 263—270.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 591—603.
5. *Антропова Н. Н., Гольденвейзер А. Л.* Погрешности построения основного напряженного состояния и простого краевого эффекта в теории оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5, с. 142—150.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. II. Л. Изд-во ЛГУ, 1962. 395 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1984