Прикладная математика и механика. Том 50, вып. 1, 1986

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ле Хань Чау

Формулируется вариационная постановка задачи о равновесии полностью анизотропных пьезоэлектрических оболочек. При помощи вариационно-асимптотического метода выводится система двумерных уравнений статики пьезоэлектрических оболочек. Доказывается асимптотическая точность построенной двумерной теории.

1. Вариационные принципы теории пьезоэлектричества. Рассмотрим в трехмерном пространстве R_3 линейное диэлектрическое тело, занимающее в исходном состоянии область V. Введем в V лагранжевы координаты точек ξ^a, которые связаны с декартовыми координатами x^i равенствами $x^i = x^i(\xi^a)$. Пусть граница тела ∂V — объединение двумерных поверхностей $S_\varphi^{(1)}, \ldots, S_\varphi^{(N)}$ (электродов) и остальной части границы S_τ. Рассмотрим для простоты случай чисто электрического нагружения тела, которое соответствует заданию значений электрического потенциала на электродах. Тогда основной вариационный принцип электростатики диэлектриков [1] гласит: среди всех возможных полей перемещений w_i и всех возможных полей электрической индукции D^a, удовлетворяющих условиям

$$\nabla_a D^a = 0 \text{ в } V, \quad D^a \nu_a = 0 \text{ на } S_\tau \tag{1.1}$$

истинные функции $\bar{w}_i$, $\bar{D}^a$ в положении равновесия доставляют минимум функционалу энергии тела

$$I = \int_V U(\varepsilon_{ab}, D_a)\, dv + \sum_{n=1}^{N} \varphi_n \int_{S_\varphi^{(n)}} D_a \nu^a\, d\omega \tag{1.2}$$

В формулах (1.1), (1.2) ν_a — компоненты вектора внешней нормали к ∂V, dv — элемент объема, $d\omega$ — элемент площади, $\varphi_n = \text{const}$ — значения потенциала на n-м электроде $S_\varphi^{(n)}$, $\varepsilon_{ab} = x_{(a}^{\ i} w_{i,\,b)}$ — компоненты тензора деформации ($x_a^{\ i} = dx^i/\partial\xi^a$). Здесь и в дальнейшем индексы a, b, c, $d, \ldots$ соответствуют проекциям на оси сопутствующей системы координат ξ^a, а индексы i, j, k, $l, \ldots$ — проекциям на оси декартовой системы координат x^i. Запятой в индексах обозначается частное дифференцирование, символом ∇_a — ковариантное дифференцирование по метрике g_{ab}, скобками в идексах — операция симметризации. Жонглирование индексами осуществляется при помощи метрики g_{ab}; по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование.

Пьезоэлектриком называется диэлектрическое тело, у которого функция $U(\varepsilon_{ab}, D_a)$ — строго положительная квадратичная форма по ε_{ab} и D_a

$$U(\varepsilon_{ab}, D_a) = \frac{1}{2} c_D^{abcd} \varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd} - h^{abc}\varepsilon_{bc} D_a + \frac{1}{2}\beta_S^{ab} D_a D_b \tag{1.3}$$

Для этого случая, варьируя функционал (1.2) при ограничениях (1.1), получим уравнения и граничные условия

$$\nabla_a D^a = 0, \quad E_a = -\nabla_a \varphi, \quad \nabla_b \sigma^{ab} = 0, \quad \varepsilon_{ab} = x_{(a}^{\ i} w_{i,\,b)} \tag{1.4}$$
$$\sigma^{ab} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ab}} = c_D^{abcd}\varepsilon_{cd} - h^{cab} D_c, \quad E^a = \frac{\partial U}{\partial D_a} = -h^{abc}\varepsilon_{bc} + \beta_S^{ab} D_b$$

$$(1.5)\qquad D^a v_a = 0 \text{ на } S_\tau, \quad \varphi = \varphi_n \text{ на } S_\varphi^{(n)}, \quad n = 1, \ldots, N$$
$$\sigma^{ab} v_b = 0 \text{ на } \partial V$$

Здесь E_a — электрическое поле, φ — электрический потенциал (суть лагранжевый множитель для ограничения (1.1)), σ^{ab} — компоненты тензора напряжения.

Применив технику двойственности [2], можно переформулировать принцип (1.1), (1.2) в следующий минимаксный принцип: истинные функции $\overline{w}_i$, $\overline{\varphi}$ в положении равновесия доставляют максимум по φ и минимум по w_i функционалу

$$(1.6)\qquad I = \int_V H(\varepsilon_{ab}, E_a)\, dv$$

при ограничениях

$$(1.7)\qquad \varphi = \varphi_n \text{ на } S_\varphi^{(n)},\ n = 1, \ldots, N$$

где $E_a = -\nabla_a \varphi$. Функция $H(\varepsilon_{ab}, E_a)$, называемая плотностью электрической энтальпии [3], это преобразование Лежандра функции $U(\varepsilon_{ab}, D_a)$ по переменной D_a, взятое с обратным знаком. Если U задается формулой (1.3) то

$$(1.8)\qquad H = \frac{1}{2} c_E^{abcd} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} - e^{abc} \varepsilon_{bc} E_a - \frac{1}{2} \mathrm{e}_S^{ab} E_a E_b$$
$$(\mathrm{e}_S^{ab} = (\beta_S^{ab})^{-1},\ e^{abc} = \mathrm{e}_S^{ad} h_d^{\cdot bc},\ c_E^{abcd} = c_D^{abcd} - e_g^{\cdot ab} h^{gcd})$$

Согласно определению $H(\varepsilon_{ab}, E_a)$, имеем соотношения

$$(1.9)\qquad \sigma^{ab} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ab}} = c_E^{abcd} \varepsilon_{cd} - e^{cab} E_c, \quad D^a = -\frac{\partial H}{\partial E_a} = e^{abc} \varepsilon_{bc} + \mathrm{e}_S^{ab} E_b$$

которые вместе с уравнениями статики (1.4) и граничными условиями (1.5) образуют корректно поставленную краевую задачу.

В дальнейшем будем рассматривать минимаксный принцип (1.6), (1.7), наиболее удобный для применения вариационно-асимптотического анализа в задаче о равновесии пьезоэлектрических оболочек. О других вариационных принципах в теории пьезоэлектричества см. [4, 5].

2. Трехмерные задачи теории пьезоэлектрических оболочек. Рассмотрим в R_3 область V специального вида

$$(2.1)\qquad x^i(\xi^\alpha, \xi^3) = r^i(\xi^\alpha) + \xi^3 n^i(\xi^\alpha)$$

где $x^i = r^i(\xi^\alpha)$ — уравнение гладкой поверхности Ω, ограниченной контуром Γ, n^i — компоненты единичного вектора нормали к Ω. Координаты ξ^α, ξ^3 изменяются в цилиндре с высотой h: $\xi^\alpha \in \Omega$, $|\xi^3| \leqslant h/2$; область изменения ξ^α, так же как и срединная поверхность, обозначается Ω; малые греческие индексы пробегают значения 1, 2 и соответствуют проекциям на оси ξ^α, индекс 3 обычно опускается ($\xi^3 \equiv \xi$). Пьезоэлектрическое тело, занимающее в исходном состоянии область V, называют пьезоэлектрической оболочкой со срединной поверхностью Ω и толщиной h.

Обозначим через $\Omega_\pm$ лицевые поверхности оболочки, заданные уравнениями (2.1) при $\xi = \pm h/2$. Будем рассматривать два наиболее часто встречающихся способа электрического нагружения оболочки [3]:

А. Нет электродов на лицевых поверхностях. На краю оболочки имеются электроды, т. е. контур Γ — объединение кривых $\Gamma_\varphi^{(1)}, \ldots, \Gamma_\varphi^{N}$ (где имеются электроды) и остальной части Γ_τ. При $\xi^a \in \Gamma_\varphi^{(n)} \times [-h/2, h/2]$ заданы значения электрического потенциала

$$(2.2)\qquad \varphi = \varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots, N$$

Б. Лицевые поверхности $\Omega_{\pm}$ покрыты электродами. На них заданы значения электрического потенциала

(2.3) $$\varphi = \pm\varphi_0/2 \text{ при } \xi = \pm h/2$$

Согласно вариационному принципу (1.6), (1.7), истинные перемещения $\overline{w}_i$ и электрический потенциал $\overline{\varphi}$ соответствуют экстремали функционала

(2.4) $$I = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{-h/2}^{h/2} H(\varepsilon_{ab}, E_a)\,\varkappa\, d\xi\, d\omega$$

при ограничениях (2.2) (в задаче А) и ограничениях (2.3) (в задаче Б).

В функционале (2.4) $H(\varepsilon_{ab}, E_a)$ — плотность электрической энтальпии, заданная формулой (1.8); $\varkappa = 1 - 2\overline{H}\xi + \overline{K}\xi^2$, $d\omega = \sqrt{a}d\xi^1 d\xi^2$, $a = \det\|a_{\alpha\beta}\|$, где $a_{\alpha\beta}$ — первая квадратичная форма (метрика) Ω, $\overline{H}$ и $\overline{K}$ — средняя и гауссова кривизны Ω. В системе координат (2.1) верны следующие геометрические и кинематические соотношения [2]:

(2.5) $$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta}\xi + c_{\alpha\beta}\xi^2, \quad g_{\alpha 3} = 0, \quad g_{33} = 1$$

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\varkappa^2}\left[(1 - 2\overline{H}\xi)a^{\alpha\beta} + 2\xi(1 - 2\overline{H}\xi)b^{\alpha\beta} + \xi^2 c^{\alpha\beta}\right],$$

$$g^{\alpha 3} = 0, \quad g^{33} = 1$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \overset{i}{x}_{(\alpha} w_{i,\beta)} = \overset{i}{r}_{(\alpha} w_{i,\beta)} - \xi b^{\lambda}_{(\alpha} \overset{i}{r}_{\lambda} w_{i,\beta)}, \quad \varepsilon_{33} = \overset{i}{n} w_{i,\xi}$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = x_{\alpha}{}^{i} w_{i,\xi} + n^{i} w_{i,\alpha} = r_{\alpha}{}^{i} w_{i,\xi} - \xi b_{\alpha}{}^{\lambda} r_{\lambda}{}^{i} w_{i,\xi} + n^{i} w_{i,\alpha}$$

где $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ — вторая и третья квадратичные формы Ω.

Задача состоит в замене трехмерного функционала (2.4) приближенным двумерным функционалом, в который входят функции, зависящие только от продольных координат ξ^1, ξ^2.

Возможность перехода от трехмерной задачи к двумерной связана с малостью отношений толщины h к характерному радиусу кривизны срединной поверхности оболочки R [2] и к характерному масштабу изменения деформации и электрического поля по продольным координатам l. Ниже при помощи вариационно-асимптотического метода [2] будет построен двумерный функционал электрической энтальпии пьезоэлектрических оболочек, в котором пренебрегаются членами порядка h/R и h/l по сравнению с единицей («классическое» приближение). Распространяя технику оценки погрешности [6—8] на статику пьезоэлектриков, докажем теорему, согласно которой построенная в работе теория пьезоэлектрических оболочек действительно допускает погрешность $h/R + h/l$ при определении электроупругого напряженного состояния.

В некоторых частных случаях пьезоэлектрических оболочек двумерные теории были построены в [9—15] (см. также обзор [16]). Из них пьезоэлектрическим оболочкам посвящены работы [9, 10, 14, 15], пьезоэлектрическим пластинам — работы [11—13]. Асимптотически точная теория полностью анизотропных пьезоэлектрических оболочек была построена в [17] (в настоящей работе дополнительно рассмотрен случай пьезоэлектрических оболочек с электродами на лицевых поверхностях).

3. Двумерные модули. Представим плотность электрической энтальпии $H(\varepsilon_{ab}, E_a)$ в следующей форме:

(3.1) $$H = H_{\parallel} + H_{\perp}; \quad H_{\parallel} = \min_{\varepsilon_{\alpha 3},\, \varepsilon_{33}} \max_{E_3} H$$

Представление $H(\varepsilon_{ab}, E_a)$ в форме (3.1) оказывается удобным при асимптотическом анализе функционала (2.4). Простые вычисления покавывают, что

$$(3.2)\qquad H_{\parallel}=\frac{1}{2}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}-e_N^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}E_\gamma-\frac{1}{2}\epsilon_N^{\alpha\beta}E_\alpha E_\beta$$

$$H_{\perp}=\frac{1}{2}c_E^{3333}\gamma^2+c_E^{\alpha333}\gamma\gamma_\alpha+\frac{1}{2}c_E^{3\alpha3\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta-e^{333}\gamma F-$$

$$-e^{3\alpha3}\gamma_\alpha F-\frac{1}{2}\epsilon_S{}^{33}F^2$$

$$(3.3)\qquad \gamma=\varepsilon_{33}+r^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}-r^\alpha E_\alpha,\quad \gamma_\alpha=2\varepsilon_{\alpha3}+t_\alpha^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}-t_\alpha{}^\mu E_\mu$$

$$F=E_3+q^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}+q^\alpha E_\alpha$$

Коэффициенты $c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $e_N^{\gamma\alpha\beta}$, $\epsilon_N{}^{\alpha\beta}$, $c_E^{\alpha333}$, c_E^{3333}, e^{333} $e^{3\alpha3}$, $\epsilon_S{}^{33}$, $r^{\alpha\beta}$, r^α, $t_\alpha{}^{\mu\nu}$, $t_\alpha{}^\mu$, $q^{\alpha\beta}$, q^α при преобразованиях системы координат на срединной поверхности ведут себя как поверхностные тензоры. Будем называть их «двумерными» модулями. Они вычисляются через трехмерные модули по формулам

$$(3.4)\qquad c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}=c_P^{\alpha\beta\gamma\delta}+q^{\alpha\beta}e_P^{3\gamma\delta},\quad e_N^{\gamma\alpha\beta}=e_P^{\gamma\alpha\beta}-q^{\alpha\beta}\epsilon_P^{\gamma3}$$

$$\epsilon_N^{\alpha\beta}=\epsilon_P^{\alpha\beta}-q^\alpha\epsilon_P^{\beta3},\quad q^{\alpha\beta}=e_P^{3\alpha\beta}/\epsilon_P^{33},\quad q^\alpha=\epsilon_P^{\alpha3}/\epsilon_P^{33}$$

$$c_P^{\alpha\beta\gamma\delta}=c^{\alpha\beta\gamma\delta}-k_\nu^{\alpha\beta}\bar{c}^{\gamma\delta\nu3},\quad e_P^{a\alpha\beta}=\bar{e}^{a\alpha\beta}-k_\nu^{\alpha\beta}\bar{e}^{a\nu3}$$

$$\epsilon_P^{\alpha b}=\bar{\epsilon}^{\alpha b}+k_\nu{}^\alpha\bar{e}^{b\nu3},\quad \epsilon_P^{33}=\bar{\epsilon}^{33}+k_\nu\bar{e}^{3\nu3}$$

$$k_\alpha^{\mu\nu}=H_{\alpha\beta}\bar{c}^{\mu\nu\beta3},\quad k_\alpha{}^\mu=H_{\alpha\beta}\bar{e}^{\mu\beta3},\quad k_\alpha=H_{\alpha\beta}\bar{e}^{3\beta3},\quad H_{\alpha\beta}=(\bar{c}^{3\alpha3\beta})^{-1}$$

$$\bar{c}^{a\alpha b\beta}=c_E^{a\alpha b\beta}-c_E^{a\alpha33}c_E^{b\beta33}/c_E^{3333},\quad \bar{e}^{ab\beta}=e^{ab\beta}-c_E^{b\beta33}e^{a33}/c_E^{3333}$$

$$\bar{\epsilon}^{ab}=\epsilon_S^{ab}+e^{a33}e^{b33}/c_E^{3333};\quad t_\alpha^{\mu\nu}=k_\alpha^{\mu\nu}+k_\alpha q^{\mu\nu}$$

$$t_\alpha{}^\mu=k_\alpha{}^\mu-k_\alpha q^\mu,\quad r^{\alpha\beta}=f^{\alpha\beta}+fq^{\alpha\beta},\quad r^\alpha=f^\alpha+fq^\alpha$$

$$f^{\alpha\beta}=\frac{c_E^{\alpha\beta33}-c_E^{\lambda333}k_\lambda^{\alpha\beta}}{c_E^{3333}},\quad f^\alpha=\frac{e^{\alpha33}-c_E^{\lambda333}k_\lambda{}^\alpha}{c_E^{3333}},\quad f=\frac{e^{333}-c_E^{\lambda333}k_\lambda}{c_E^{3333}}$$

Далее рассмотрим для простоты случай однородных по толщине пьезоэлектрических оболочек. Можно показать, что для таких оболочек любые двумерные модули обладают свойствами

$$\mathrm{A}(\xi^\alpha,\xi)=\overline{\mathrm{A}}(\xi^\alpha)+O\left(\frac{h}{R}\right)\overline{\mathrm{A}}(\xi^\alpha)$$

Следовательно, при построении классической теории оболочек, имеющей погрешность h/R и h/l по сравнению с единицей, можно считать, что $\mathrm{A}=\overline{\mathrm{A}}$, т. е. двумерные модули однородных по толщине оболочек не зависят от поперечной координаты.

Выделим некоторые частные случаи симметрии.

1°. *Плоскости симметрии, параллельные срединной поверхности.* Если свойства среды инвариантны при отражениях относительно плоскостей, параллельных срединной поверхности, то следующие двумерные тензоры обращаются в нуль:

$$c_E^{\alpha333}=0,\quad e^{333}=0,\quad t_\alpha^{\mu\nu}=0,\quad t_\alpha{}^\mu=0,\quad q^{\mu\nu}=0,\quad q^\mu=0$$

2°. *Трансверсальная изотропия.* При инвариантности свойств среды относительно вращения вокруг вектора нормали к срединной поверхности (модель пьезокерамической оболочки, поляризованной по нормали с симметрией $\infty\cdot m$ [3]), можно показать, что все двумерные тензоры с нечетным числом индексов обращаются в нуль, тензор $c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет вид

$$c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}=c_1{}^N a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}+c_2{}^N(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma})$$

все двумерные тензоры второго ранга шаровые.

4. Асимптотический анализ функционала электрической энтальпии. *Задача А*. Для того чтобы фиксировать область изменения поперечной координаты в предельном переходе $h \to 0$, сделаем замену переменной $\xi = h\zeta$, $|\zeta| \leqslant 1/2$. Тогда h войдет явно в функционал (2.4). Будем искать поле перемещений w^i и потенциал φ в виде

$$w^i = u^i - hr_\alpha{}^i\psi^\alpha\zeta + hy^i(\xi^\alpha, \zeta), \quad \psi_\alpha = n^i u_{i,\alpha} \tag{4.1}$$
$$\varphi = \psi + h\chi(\xi^\alpha, \zeta)$$

где u^i, ψ не зависят от ζ. За счет переопределения u^i, ψ можно на y^i, χ наложить следующие ограничения:

$$\langle y^i \rangle = 0, \ \langle \chi \rangle = 0 \tag{4.2}$$

где $\langle\cdot\rangle$ — интеграл по ζ в пределах $[-1/2, 1/2]$. Формулы (4.1), (4.2) устанавливают взаимно однозначную зависимость между w^i, φ и набором функции u^i, ψ, y^i, χ и определяют замену искомых функций $\{w^i, \varphi\} \to \{u^i, \psi, y^i, \chi\}$.

Асимптотический анализ позволяет установить порядки малости y^i, χ. Если этими членами пренебречь, то формулы (4.1) представляют собой обобщение известных гипотез Кирхгофа — Лява на пьезоэлектрическую оболочку. При этом электроупругое напряженное состояние оболочки полностью характеризуется мерой растяжения $A_{\alpha\beta} = r_{(\alpha}{}^i u_{i,\beta)}$, мерой изгиба $B_{\alpha\beta} = \psi_{(\alpha;\beta)} + b_{(\alpha}{}^\lambda r_\lambda{}^i u_{i,\beta)}$ и поверхностным электрическим полем $F_\alpha = -\psi_{,\alpha}$; точкой с запятой в индексах обозначается ковариантное дифференцирование по метрике $a_{\alpha\beta}$.

Введем следующие обозначения:

$$e_A = \max_\Omega (A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta})^{1/2}, \quad e_B = \frac{h}{2}\max_\Omega (B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta})^{1/2},$$
$$f_F = \max_\Omega (F_\alpha F^\alpha)^{1/2}$$
$$y_\alpha = r_\alpha{}^i y_i, \quad y = n^i y_i$$
$$\Delta_\alpha = \max_V |y_{\alpha,\zeta}|, \quad \Delta = \max_V |y_{,\zeta}|, \quad \Pi = \max_V |\chi_{,\zeta}|$$

Рассмотрим некоторую точку Ω. Наилучшую постоянную l в неравенствах

$$|A_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{e_A}{l}, \quad h|B_{\alpha\beta,\gamma}| \leqslant \frac{e_B}{l}, \quad |F_{\alpha,\beta}| \leqslant \frac{f_F}{l} \tag{4.3}$$
$$\max_\zeta |y_{\alpha,\beta}| \leqslant \frac{\Delta_\alpha}{l}, \quad \max_\zeta |y_{,\alpha}| \leqslant \frac{\Delta}{l}, \quad \max_\zeta |\chi_{,\alpha}| \leqslant \frac{\Pi}{l}$$

назовем характерным масштабом изменения деформации электрического поля по продольным координатам. Определим внутреннюю область Ω_2 как подобласть Ω, в которой имеют место следующие неравенства:

$$h_* = h/R \ll 1, \quad h_{**} = h/l \ll 1 \tag{4.4}$$

Предположим, что область Ω состоит из внутренней области Ω_2 и области Ω_1, примыкающей к контуру Γ с шириной порядка h (погранслой). Тогда функционал (2.4) можно разбить на сумму двух функционалов — внутренний, для которого будет строиться итерационный процесс, и погранслойный. Аналогично теории упругих оболочек [2], в классическом приближении погранслойным функционалом можно пренебречь. Таким образом, задача сводится к нахождению минимаксной точки внутреннего функционала, который можно отождествить с функционалом (2.4) ($\Omega_2 \equiv \Omega$).

Зафиксируем u^i, ψ и будем искать y_i, χ. Из предположения (4.4) и формул (2.6), (4.3) следует, что в первом приближении

(4.5) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = y_{\alpha,\zeta}, \quad \varepsilon_{33} = y_{,\zeta}, \quad E_\alpha = F_\alpha,$$
$$E_3 = -\chi_{,\zeta}$$

Подставляя формулы (4.5) в функционал (2.4) с плотностью электрической энтальпии в форме (3.1), (3.2), получим функционал

(4.6) $$I = \int\limits_\Omega [\Psi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, F_\alpha) + J_\perp(y_\alpha, y, \chi)]\, d\omega$$

$$\Psi = \frac{h}{2}\langle c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta)(A_{\gamma\delta} - hB_{\gamma\delta}\zeta) -$$
$$- 2e_N^{\gamma\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta)F_\gamma - \epsilon_N^{\alpha\beta}F_\alpha F_\beta\rangle$$

$$J_\perp = \frac{h}{2}\langle c_E^{3333}\gamma^2 + 2c_E^{\alpha 333}\gamma\gamma_\alpha + c_E^{3\alpha 3\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2e^{333}\gamma F - 2e^{3\alpha 3}\gamma_\alpha F - \epsilon_S^{33}F^2\rangle$$

$$\gamma = y_{,\zeta} + r^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta) - r^\alpha F_\alpha$$
$$\gamma_\alpha = y_{\alpha,\zeta} + t_\alpha^{\mu\nu}(A_{\mu\nu} - hB_{\mu\nu}\zeta) - t_\alpha{}^\mu F_\mu$$
$$F = -\chi_{,\zeta} + q^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta) + q^\alpha F_\alpha$$

Функции y_α, y, χ войдут только в функционал $J_\perp$ через γ, γ_α, F.

Минимизируем функционал (4.6) по y_α, y и максимизируем по χ при ограничениях (4.2). Очевидно, что минимаксное значение I достигается при $\gamma = \gamma_\alpha = F \equiv 0$, т. е. при

(4.7) $$y = -(r^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - r^\alpha F_\alpha)\zeta + \frac{1}{2}hr^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)$$
$$y_\alpha = -(t_\alpha^{\mu\nu}A_{\mu\nu} - t_\alpha{}^\mu F_\mu)\zeta + \frac{1}{2}ht_\alpha^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)$$
$$\chi = (q^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + q^\alpha F_\alpha)\zeta - \frac{1}{2}hq^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)$$

На экстремали функционал $J_\perp$ обращается в нуль и усредненный функционал электрической энтальпии примет вид

(4.8) $$J = \int\limits_\Omega \Psi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, F_\alpha)\, d\omega$$

$$\Psi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, F_\alpha) = \frac{h}{2}\Big(c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta} -$$
$$- 2e_N^{\gamma\alpha\beta}A_{\alpha\beta}F_\gamma - \epsilon_N^{\alpha\beta}F_\alpha F_\beta\Big)$$

Задача Б. В этой задаче электрический потенциал φ должен удовлетворять ограничениям (2.3), поэтому сделаем замену искомых функций, отличающуюся от (4.1) подстановкой $\varphi_0\zeta$ вместо ψ. На функции y^i, χ наложим ограничения

(4.9) $$\langle y^i\rangle = 0, \quad \chi|_{\zeta=\pm 1/2} = 0$$

Проделав аналогичную процедуру асимптотического анализа, можно показать, что в первом приближении верны соотношения

(4.10) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = y_{\alpha,\zeta}, \quad \varepsilon_{33} = y_{,\zeta}$$
$$E_\alpha = 0, \; E_3 = -\varphi_0/h - \chi_{,\zeta}$$

Подставив формулы (4.10) в функционал (2.4) и отыскав его минимаксное значение по y_α, y, χ, получим двумерный функционал

(4.11) $$J = \int\limits_\Omega [\Psi_\parallel(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}) + \Psi_\perp(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})]\, d\omega$$

(4.12) $$\Psi_\parallel = \frac{h}{2}\left(c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta}\right)$$

$$\Psi_\perp = \inf_{y_\alpha, y}\sup_{\chi} J_\perp = \inf_{y_\alpha, y}\sup_{\chi} \frac{h}{2}\langle c_E^{3333}\gamma^2 + 2c_E^{\alpha 333}\gamma\gamma_\alpha +$$
$$+ c_E^{3\alpha 3\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2e^{333}\gamma F - 2e^{3\alpha 3}\gamma_\alpha F - \epsilon_S^{33}F^2\rangle$$
$$\gamma = y_{,\zeta} + r^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta), \quad \gamma_\alpha = y_{\alpha,\zeta} + t_\alpha^{\mu\nu}(A_{\mu\nu} - hB_{\mu\nu}\zeta)$$
$$F = -\varphi_0/h - \chi_{,\zeta} + q^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta} - hB_{\alpha\beta}\zeta)$$

Можно показать, что минимаксное значение $J_\perp$ в (4.12) при ограничениях (4.9) будет достигаться только в том случае, когда

(4.13) $$F = -\frac{\varphi_0}{h} + q^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, \quad \gamma_\alpha = k_\alpha F, \quad \gamma = fF$$
$$\chi = -\frac{1}{2}hq^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$y = -f\frac{\varphi_0}{h}\zeta - f^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\zeta + \frac{1}{2}hr^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)$$
$$y_\alpha = -k_\alpha\frac{\varphi_0}{h}\zeta - k_\alpha^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\zeta + \frac{1}{2}ht_\alpha^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\left(\zeta^2 - \frac{1}{12}\right)$$

На экстремали (4.13)

$$\Psi_\perp = -\frac{h}{2}\epsilon_P^{33}F^2 = -\frac{h}{2}\epsilon_P^{33}\left(-\frac{\varphi_0}{h} + q^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\right)^2$$

Таким образом, с учетом (3.4) усредненный функционал электрической энтальпии для облочки с электродами на лицевых поверхностях запишем в окончательном виде

(4.14) $$J = \int_\Omega \Psi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})\,d\omega$$
$$\Psi(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}) = \frac{h}{2}\left(c_P^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\alpha\beta}B_{\gamma\delta} + 2e_P^{3\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\frac{\varphi_0}{h}\right)$$

В рамках точности классического приближения можно добиться некоторого упрощения формул (4.8) и (4.14), например заменить меру изгиба $B_{\alpha\beta}$ другой мерой $\tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}A_{\gamma\delta}$, где тензор $Q_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ зависит только от $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. В частности, были предложены следующие меры [2]: Койтера — Сандерса $\rho_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{(\alpha}^{\lambda}A_{\lambda\beta)}$ и Новожилова — Балабуха $\varkappa_{\alpha\beta} = -\rho_{\alpha\beta} - {}^1/_2\bar{H}d_{\alpha\beta}d^{\gamma\delta}A_{\gamma\delta}$, [где $d_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\alpha\beta}/\sqrt{\tilde{b}}$, $\tilde{b} = {}^1/_2\tilde{b}_{\alpha\beta}\tilde{b}^{\alpha\beta}$, $\tilde{b}_{\alpha\beta} = b_{(\alpha}^{\ \ \gamma}e_{\gamma\beta)}$. В связи с этим можно получить разнообразные варианты классической теории пьезоэлектрических оболочек [9, 10, 14, 15—17].

5. Уравнение равновесия пьезоэлектрических оболочек. *Случай А*. Функционал электрической энтальпии задан формулой (4.8). Из условий (2.2) следует, что в первом приближении функция ψ должна удовлетворять ограничениям

(5.1) $$\psi = \varphi_n \text{ на } \Gamma_\varphi^{(n)}, \ n = 1, \ldots, N$$

Варьируя функционал (4.8) при ограничениях (5.1), получим систему уравнений

(5.2) $$T^{\alpha\beta}_{;\beta} - b_\lambda^{\alpha}M^{\lambda\beta}_{;\beta} = 0, \quad M^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = 0$$
$$G^{\alpha}_{;\alpha} = 0, \quad T^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} - b_\sigma^{\alpha}M^{\sigma\beta}$$

В уравнениях (5.2) $S^{\alpha\beta}$ — тензор растягивающих усилий, $M^{\alpha\beta}$ — тензор изгибающих моментов, G^α — вектор «поверхностной» электрической индукции. Они выражаются через $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, F_α следующими соотношениями электроупругости:

(5.3) $$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Psi}{\partial A_{\alpha\beta}} = h(c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} - e_N^{\gamma\alpha\beta}F_\gamma),$$

$$M^{\alpha\beta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial B_{\alpha\beta}} = -\frac{h^3}{12}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta},$$

$$G^{\alpha} = -\frac{\partial\Psi}{\partial F_{\alpha}} = h\left(e_N^{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} + \epsilon_N^{\alpha\beta}F_{\beta}\right),$$

Уравнения (5.2), (5.3) вместе с кинематическими соотношениями

(5.4) $$A_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} - b_{\alpha\beta}u, \quad B_{\alpha\beta} = u_{;\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}u + 2b^{\lambda}_{(\alpha}u_{\lambda;\beta)} + b^{\lambda}_{\alpha;\lambda}u_{\lambda}$$
$$F_{\alpha} = -\psi_{,\alpha}$$

составляют замкнутую систему уравнений для определения четырех искомых функций u_{α}, u, ψ (где $u_{\alpha} = r_{\alpha}{}^{i}u_i$, $u = n^i u_i$). Граничные условия на Г для уравнений (5.2), (5.3), (5.4) имеют вид

(5.5) $$(T^{\alpha\beta} - b_{\lambda}{}^{\alpha}M^{\lambda\beta})\nu_{\beta} = 0$$
$$M^{\alpha\beta}_{;\alpha}\nu_{\beta} + \frac{d}{ds}(M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\tau_{\beta}) = 0, \quad M^{\alpha\beta}\nu_{\alpha}\nu_{\beta} = 0$$
$$\psi = \varphi_n \text{ на } \Gamma_{\varphi}^{(n)}, \quad n = 1, \ldots, N, \quad G^{\alpha}\nu_{\alpha} = 0 \text{ на } \Gamma_{\tau}$$

где τ_{α}, ν_{α} — компоненты поверхностных векторов, касательных и нормальных к контуру Г.

Случай Б. Уравнения равновесия и граничные условия — те же, что и в классической теории упругих оболочек [2]. Изменения касаются только уравнения состояния

(5.6) $$S^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Psi}{\partial A_{\alpha\beta}} = h\left(c_P^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} + e_P^{3\alpha\beta}\frac{\varphi_0}{h}\right)$$
$$M^{\alpha\beta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial B_{\alpha\beta}} = -\frac{h^3}{12}c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta}$$

6. Связь между трехмерным и двумерным электроупругими напряженными состояниями. Для завершения построения модели пьезоэлектрических оболочек укажем способ восстановления трехмерного электроупругого напряженного состояния по двумерному. Для этого нужно по асимптотическим формулам п. 4 найти в первом приближении деформации ε и электрическое поле $\mathbf{E}$. Тензор напряжения σ и вектор индукции $\mathbf{D}$ находятся по трехмерным соотношениям электроупругости (1.9). Опустив вычисления, приведем окончательные формулы для (ε, $\mathbf{E}$) и (σ, $\mathbf{D}$) в первом приближении.

Случай А. Деформация — электрическое поле

(6.1) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}\xi$$
$$2\varepsilon_{\alpha3} = -(r_{\alpha}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} - t_{\alpha}{}^{\mu}F_{\mu}) + t_{\alpha}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\xi$$
$$\varepsilon_{33} = -(r^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - r^{\alpha}F_{\alpha}) + r^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\xi$$
$$E_{\alpha} = F_{\alpha}, \; E_3 = -(q^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + q^{\alpha}F_{\alpha}) + q^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\xi$$

Напряжения — индукция

(6.2) $$\sigma^{\alpha\beta} = c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} - e_N^{\gamma\alpha\beta}F_{\gamma} - c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta}\xi = \frac{S^{\alpha\beta}}{h} + \frac{12}{h^3}M^{\alpha\beta}\xi$$
$$\sigma^{\alpha3} = 0, \quad \sigma^{33} = 0$$
$$D^{\alpha} = e_N^{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} + \epsilon_N^{\alpha\beta}F_{\beta} - e_N^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}\xi = \frac{G^{\alpha}}{h} - e_N^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}\xi, \quad D^3 = 0$$

Случай Б. Деформация — электрическое поле

(6.3) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}\xi$$
$$2\varepsilon_{\alpha3} = -k_{\alpha}\frac{\varphi_0}{h} - k_{\alpha}^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + t_{\alpha}^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\xi$$

$$\varepsilon_{33} = -f\frac{\varphi_0}{h} - f^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + r^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\xi$$

$$E_\alpha = 0, \quad E_3 = -\frac{\varphi_0}{h} + q^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\xi$$

Напряжения — индукция

$$\sigma^{\alpha\beta} = c_P^{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\gamma\delta} + e_P^{3\alpha\beta}\frac{\varphi_0}{h} - c_N^{\alpha\beta\gamma\delta}B_{\gamma\delta}\xi = \frac{S^{\alpha\beta}}{h} + \frac{12}{h^3}M^{\alpha\beta}\xi \tag{6.4}$$

$$\sigma^{\alpha 3} = 0, \quad \sigma^{33} = 0$$

$$D^\alpha = e_P^{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} - \epsilon_P^{\alpha 3}\frac{\varphi_0}{h} - e_N^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}\xi, \quad D^3 = -\epsilon_P^{33}\frac{\varphi_0}{h} + e_P^{3\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$$

7. Оценка погрешности классической теории пьезоэлектрических оболочек. Рассмотрим линейное векторное пространство электроупругих напряженных состояний, которое состоит из элементов вида $\Xi = (\sigma, \mathrm{E})$, где σ — поле напряжений, E — электрическое поле в области V. Введем в этом пространстве следующую норму:

$$\|\Xi\|^2_{L_2} = C_2[\Xi] = \int G(\sigma, \mathrm{E})\,dv \tag{7.1}$$

где функция $G(\sigma, \mathrm{E})$ — преобразование Лежандра функции $U(\varepsilon, \mathrm{D})$ по всем переменным [3]

$$G(\sigma, \mathrm{E}) = \frac{1}{2}\overset{E}{s}_{abcd}\sigma^{ab}\sigma^{cd} + d_{abc}\sigma^{bc}E^a + \frac{1}{2}\overset{T}{\epsilon}_{ab}E^aE^b \tag{7.2}$$

Будем называть кинематически допустимыми электроупругие напряженные состояния Ξ°, для которых существуют поля деформации ε° и электрической индукции D°, такие, что

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ab} = x^i_{(a}\overset{\circ}{w}_{i,\,b)}; \quad \nabla_a D^{\circ a} = 0, \quad D^{\circ a}\nu_a = 0 \ \text{ на } S_\tau \tag{7.3}$$

а σ° и E° выражаются через ε° и D° согласно формулам (1.4). Статически же допустимыми назовем те $\Xi^\wedge$, для которых

$$\nabla_b\sigma^{\wedge ab} = 0, \quad \sigma^{\wedge ab}\nu_\beta = 0 \ \text{ на } \partial V \tag{7.4}$$

$$E^\wedge_a = -\nabla_a\varphi^\wedge, \quad \varphi^\wedge = \varphi_n \ \text{ на } S_\varphi^{(n)}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Пусть Ξ — действительное электроупругое напряженное состояние, которое реализуется в пьезоэлектрическом теле V при задании на электродах $S_\varphi{}^{(n)}$ значения потенциала φ_n. Тогда оказывается верным следующее тождество:

$$C_2[\Xi - {}^1/_2(\Xi^\circ + \Xi^\wedge)] = C_2[{}^1/_2(\Xi^\circ - \Xi^\wedge)] \tag{7.5}$$

обобщающее тождество Прагера — Синга [7] на статику пьезоэлектриков и доказываемое аналогичным образом.

Из тождества (7.5) следует

Теорема. Электроупругое напряженное состояние, построенное по двумерной теории пьезоэлектрических оболочек (пп. 5, 6), в норме L_2 отличается от точного электроупругого напряженного состояния, построенного по трехмерной теории пьезоэлектричества, на величину порядка $h_* + h_{**}$ по сравнению с единицей.

Для доказательства надо предъявить кинематически и статически допустимые трехмерные поля электроупругих напряженных состояний, отличающиеся от построенного по двумерной теории на величину порядка h_* и h_{**} по сравнению с единицей [6, 8].

Случай А. Кинематически допустимое поле. Перемещение определим по формулам (4.1), (4.7), а ε° — по формуле (7.3). Для вектора индукции D° возьмем $\overset{\circ}{D}{}^\alpha$ в виде

$D^{\circ\alpha} = z^\alpha(\xi^\beta) - e_N^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}\xi$. (Далее все величины без знаков $^\circ$ и $\hat{}$ относятся к решениям уравнений равновесия пьезоэлектрических оболочек по двумерной теории п. 5.) Величины z^α выберем так, чтобы $\langle D^{\circ\alpha}\varkappa\rangle_\xi = e_N^{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} + \epsilon_N^{\alpha\beta}F_\beta \equiv G^\alpha/h$. По известным $D^{\circ\alpha}$ компонента $D^{\circ 3}$ найдется из решения уравнения электростатики

$$(D^{\circ\alpha}\varkappa)_{;\alpha} + (D^{\circ 3}\varkappa)_{,\xi} = 0 \tag{7.6}$$

Зная (ε°, $\mathbf{D}^\circ$), Ξ° найдем из уравнений электроупругости (1.4).

Статически допустимое поле. Выпишем уравнения механического равновесия для оболочки [2]

$$\tau^{\alpha\beta}_{;\beta} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\mu_\beta{}^\alpha\tau^\beta) - \tau^\beta b_\beta{}^\alpha = 0, \quad \tau^\beta_{;\beta} + \tau^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial\xi}\tau = 0 \tag{7.7}$$

$$(\tau^{\alpha\beta} = \mu_\lambda{}^\alpha\sigma^{\lambda\beta}\varkappa,\ \tau^\alpha = \sigma^{\alpha 3}\varkappa,\ \tau = \sigma^{\alpha 3}\varkappa,\ \mu_\beta{}^\alpha = \delta_\beta{}^\alpha - b_\beta{}^\alpha\xi)$$

Чтобы найти тензор напряжения $\sigma^\wedge$, удовлетворяющий уравнениям (7.7), поступим так. Зададим $\sigma^{\wedge\alpha\beta}$ в виде $\sigma^{\wedge\alpha\beta} = s_0^{\alpha\beta} + \xi s_1^{\alpha\beta}$, где $s_0^{\alpha\beta}$, $s_1^{\alpha\beta}$ не зависят от ξ и выбираются из условий $\langle\tau^{\wedge\alpha\beta}\rangle_\xi = T^{\alpha\beta}$, $\langle\tau^{\wedge\alpha\beta}\xi\rangle_\xi = M^{\alpha\beta}$. Решая уравнения (7.7), можно найти $\tau^{\wedge\alpha}$ и $\tau^\wedge$, а затем $\sigma^{\wedge\alpha 3}$ и $\sigma^{\wedge 33}$. Оказывается, что уравнения (5.2) служат достаточными условиями для существования $\tau^{\wedge\alpha}$ и $\tau^\wedge$. Потенциал $\varphi^\wedge$ зададим формулами (4.1), (4.7). При этом предполагается, что трехмерные граничные условия задаются не в виде (2.2), а в соответствии с формулами (4.1), (4.7) (так называемые регулярные граничные условия по терминологии [8]).

Соображения по поводу обобщения принципа Сен-Венана на пьезоэлектрики [18].

Случай Б. Кинематически допустимое поле. Перемещения $w^{\circ i}$ задаются формулой (4.9), (4.13), $D^{\circ\alpha}$ — формулой (6.4), $D^{\circ 3}$ найдется из уравнения (7.6). Отсюда находим Ξ° по формулам (1.4).

Статистически допустимое поле. Построение аналогично случаю А.

Можно показать, что в обоих случаях Ξ° и $\Xi^\wedge$ отличаются от построенного по двумерной теории (п. 5) на величину порядка $h_* + h_{**}$ по сравнению с единицей. Из сказанного и тождества (7.5) вытекает асимптотическая точность построенной теории в энергетической норме (7.1).

Автор благодарит В. Л. Бердичевского за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука: 1983. 447 с.
3. *Мезон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 448 с.
4. *Mindlin R. D.* High frequency vibrations of piezoelectric crystal plate.— Internat. J. Solids and Struct., 1972, v. 8, No. 7, p. 895—906.
5. *Вековищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости.— Прикл. механика, 1971, т. 7, № 9, с. 129—133.
6. *Nordgren R. P.* A bound on the error in plate theory.— Quart. Appl. Math., 1971, v. 28, No 4, p. 587—595.
7. *Prager W., Synge J. L.* Approximation in elasticity based on the concepts of function space.— Quart. Appl. Math., 1947, v. 5, No. 3, p. 241—269.
8. *Koiter W. T.* On the mathematical foundation of shell theory. Proc. Intern. Congr. Math. Nice, 1970, P.: Cauthiier-Villars, 1971, v. 3, p. 123—130.
9. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических оболочек.— Математическая физика: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1977, № 21, с. 71—76.
10. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек вращения, поляризованных вдоль меридиональной координаты.— Прикл. механика, 1972, т. 15, № 12, с. 36—42.
11. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки.— Прикл. механика, 1975, т. 11, № 2, с. 85—89.
12. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин.— Прикл. механика, 1975, т. 11, № 5, с. 45—53.
13. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Об установившихся колебаниях в электроупругости.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 159—172.

14. *Петров А. М., Устинов Ю. А.* О построении приближенной теории для цилиндрической оболочки из электроупругого материала.— В кн.: Расчет оболочек и пластин. Ростов н/Д: Изд-е Рост. инж.-строит. ин-та, 1975, с. 177—189.
15. *Рогачева Н. Н.* Уравнения состояния пьезокерамических оболочек.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 902—911.
16. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов.— В кн.: Итоги науки техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1978, т. 11, с. 5—66.
17. *Ле Хань Чау.* Основные соотношения теории пьезоэлектрических оболочек.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1982, № 5, с. 77—90.
18. *Рогачева Н. Н.* Об условиях типа Сен-Венана в теории пьезоупругих оболочек.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 302—306.

Поступила в редакцию
26.X.1984

Москва