

УДК 539.3

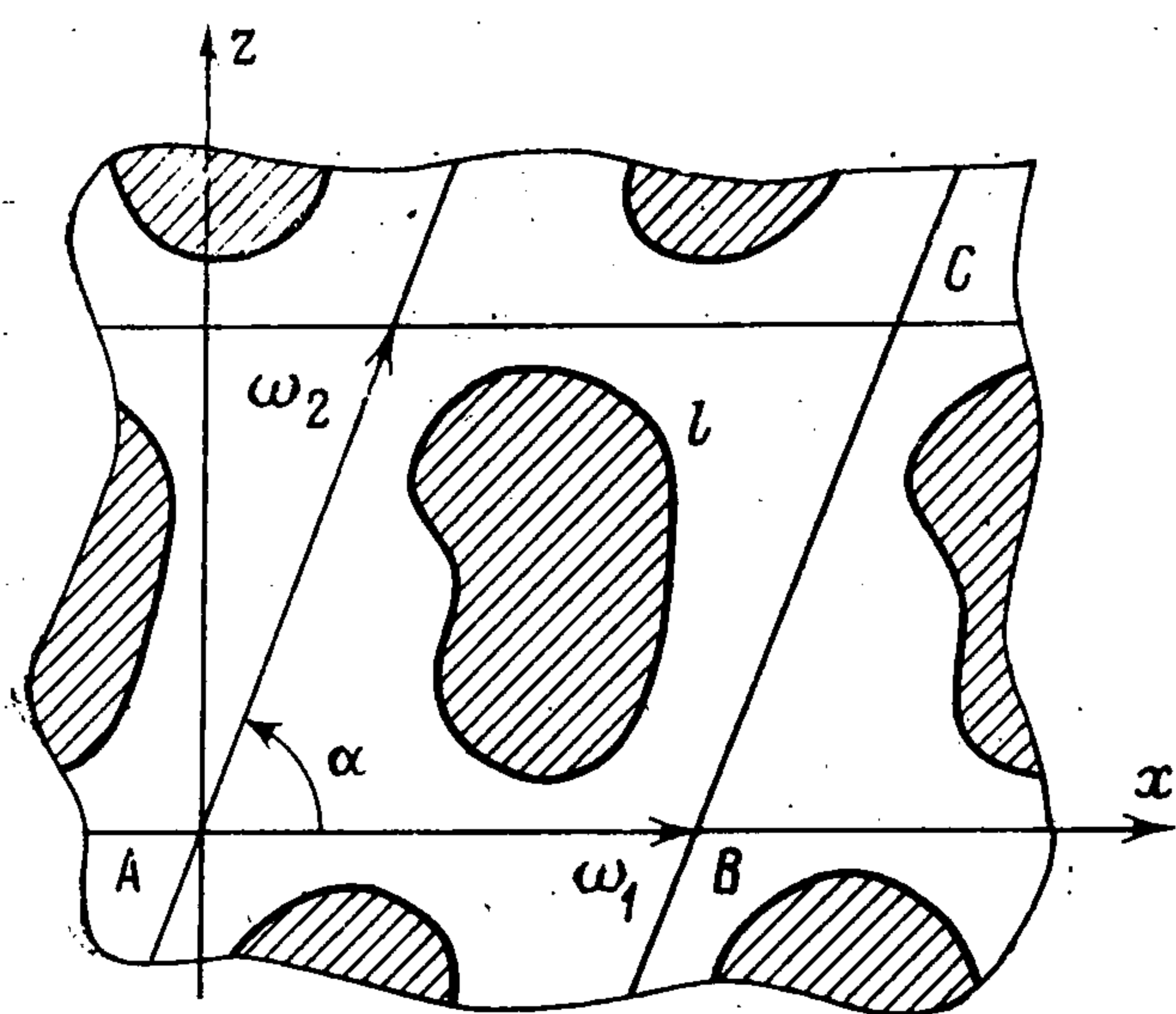
К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.

Рассматривается кусочно-однородная среда, представляющая собой пьезокерамическую матрицу, армированную двоякопериодической системой анизотропных волокон — диэлектриков. Возникающие здесь краевые задачи электроупругости сводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которых доказывается. Из энергетических соображений вводятся понятия средних механических и электрических величин, связь между которыми дают уравнения состояния макромоделей структуры. Построенный алгоритм реализуется численно. Приводятся результаты расчетов осредненных упругих, электрических и пьезоэлектрических свойств среды в зависимости от микроструктуры ячейки.

Модели упругих линейно-армированных композиционных материалов с изотропными и анизотропными компонентами рассматривались, например, в [1—3]. Обзор результатов в области краевых задач электроупругости содержится в [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к кристаллофизическим осям xuz поперечно-изотропную пьезоэлектрическую среду (кристалл гексагональной системы $6mm$, предварительно поляризованную вдоль оси z пьезокерамику типа $PZT-4$, $PZT-5$ и др.), армированную двоякопериодической системой неограниченных вдоль оси y одинаковых анизотропных волокон.



Фиг. 1

Поперечное сечение волокна — односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой l с кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера [5]. Основные периоды структуры обозначим через ω_1 и ω_2 ($\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$), область, занятую матрицей, — через D , а область, занятую волокном в основной фундаментальной ячейке Π_0 , — через D_0 .

При такой идеализации в плоскости поперечного сечения получаем бесконечносвязную область, инвариантную относительно группы трансляции

$T(z) = z + P$, где P — комплексный период (фиг. 1). Будем считать, что в структуре действуют средние компоненты тензора механических напряжений $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \tau_{xz} \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ и вектора электрической напряженности $\langle E_x \rangle$, $\langle E_z \rangle$.

Построим модель регулярной пьезокерамической среды при следующих дополнительных предположениях: а) все волокна имеют одинаковые физико-механические свойства и обладают плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси y ; б) имеют место условия идеального электрического и механического контакта волокна и матрицы. В этих условиях поля механических напряжений, векторы индукции и напряженности электрического поля обладают той же группой симметрии, что и область D .

Механические и электрические величины в матрице определяются формулами

$$(1.1) \quad \begin{aligned} U &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k), & W &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_k \Phi_k(z_k) \\ \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 \Phi_k'(z_k), & \tau_{xz} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi_k'(z_k) \\ \sigma_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k'(z_k), & z_k &= x + \mu_k z \quad (k=1, 2, 3) \\ E_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k'(z_k), & E_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi_k'(z_k) \\ D_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \mu_k \Phi_k'(z_k), & D_z &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \Phi_k'(z_k) \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k'(z_k) = d\Phi_k(z_k)/dz_k$ — аналитические функции комплексного переменного z_k ; остальные входящие в (1.1) величины определены в [6].

Механические и электрические поля в волокне не связаны между собой, они определяются соотношениями (входящие в них величины определены в [7, 8])

$$(1.2) \quad \begin{aligned} U &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^5 p_k \Phi_k(z_k), & W &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^5 g_k \Phi_k(z_k) \\ \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^5 \mu_k^2 \Phi_k'(z_k), & \tau_{xz} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^5 \mu_k \Phi_k'(z_k) \\ \sigma_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^5 \Phi_k'(z_k), & \Delta &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2 \\ E_x &= 2 \operatorname{Re} \Phi_6'(z_6), & E_z &= 2 \operatorname{Re} [\mu_6 \Phi_6'(z_6)] \\ D_x &= 2 \operatorname{Re} [(\varepsilon_{11} + \mu_6 \varepsilon_{13}) \Phi_6'(z_6)] \\ D_z &= 2 \operatorname{Re} [(\varepsilon_{13} + \mu_6 \varepsilon_{33}) \Phi_6'(z_6)] \end{aligned}$$

Условия идеального механического и электрического контакта волокна и матрицы заключаются в непрерывной продолжимости через границу раздела сред векторов механического напряжения и перемещения, а также касательной компоненты вектора напряженности и нормальной компоненты вектора индукции электрического поля. В силу (1.1), (1.2) эти условия сопряжения имеют вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_{nk} \Phi_k(t_k) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^6 B_{nk} \Phi_k(t_k) \\ A_{1k} &= p_k, & A_{2k} &= g_k, & A_{3k} &= \gamma_k \mu_k, & A_{4k} &= \gamma_k, & A_{5k} &= \lambda_k, \\ A_{6k} &= r_k \quad (k=1, 2, 3); & B_{1k} &= p_k, & B_{2k} &= g_k, & B_{3k} &= \mu_k, \\ B_{4k} &= 1, & B_{5k} &= B_{6k} = 0 \quad (k=4, 5), \\ B_{16} &= B_{26} = B_{36} = B_{46} = 0, & B_{56} &= 1, & B_{66} &= -i\sqrt{\Delta}; & t_k &= \\ &= \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t \quad (k=1, 2, \dots, 6) \end{aligned}$$

2. Средние значения механических и электрических величин. Из постановки задачи следует, что механические перемещения U , W и потенциал электрического поля φ — квазипериодические функции, поэтому средние значения механических деформаций $\langle \varepsilon_x \rangle$, $\langle \gamma_{xz} \rangle$, $\langle \varepsilon_z \rangle$, жесткого поворота ячейки $\langle \omega_{xz} \rangle$ и напряженности электрического поля $\langle E_x \rangle$, $\langle E_z \rangle$ опреде-

ляются точно из соотношений

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta_1 U &= \omega_1 \langle \varepsilon_x \rangle, \quad \Delta_2 U = h \langle \varepsilon_x \rangle + \frac{1}{2} H (\langle \gamma_{xz} \rangle + \langle \omega_{xz} \rangle) \\ \Delta_1 W &= \frac{1}{2} \omega_1 (\langle \gamma_{xz} \rangle - \langle \omega_{xz} \rangle), \quad \Delta_2 W = H \langle \varepsilon_z \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} h (\langle \gamma_{xz} \rangle - \langle \omega_{xz} \rangle) \\ \Delta_1 \varphi &= -\omega_1 \langle E_x \rangle, \quad \Delta_2 \varphi = -h \langle E_x \rangle - H \langle E_z \rangle \\ (h &= \operatorname{Re} \omega_2, \quad H = \operatorname{Im} \omega_2; \quad \Delta_m \kappa = \kappa (z + \omega_m) - \kappa (z), \quad m = 1, 2) \end{aligned}$$

Далее, если $\langle X_n \rangle$, $\langle Z_n \rangle$ — компоненты главного вектора механических усилий, действующих на какой-либо грани ячейки, а $\langle D_n \rangle$ — суммарный поток вектора электрической индукции через эту грань (фиг. 1), то средние значения механических усилий $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \tau_{xz} \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ и вектора электрической индукции $\langle D_x \rangle$, $\langle D_z \rangle$ естественно ввести следующим образом:

на грани АВ

$$(2.2) \quad \langle X_n \rangle = \omega_1 \langle \tau_{xz} \rangle, \quad \langle Z_n \rangle = \omega_1 \langle \sigma_z \rangle, \quad \langle D_n \rangle = \omega_1 \langle D_z \rangle$$

на грани ВС

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \langle X_n \rangle &= |\omega_2| (\langle \sigma_x \rangle \sin \alpha - \langle \tau_{xz} \rangle \cos \alpha) \\ \langle Z_n \rangle &= |\omega_2| (\langle \tau_{xz} \rangle \sin \alpha - \langle \sigma_z \rangle \cos \alpha), \\ \langle D_n \rangle &= |\omega_2| (\langle D_x \rangle \sin \alpha - \langle D_z \rangle \cos \alpha) \end{aligned}$$

Внутреннюю энергию фундаментальной ячейки Π_0 можно преобразовать к виду

$$(2.4) \quad \begin{aligned} W_0 &= \iint_{\Pi_0} W_V dx dz = \frac{1}{2} \left[\int_{AB} (X_n \Delta_1 U + Z_n \Delta_1 W - D_n \Delta_1 \varphi) ds + \right. \\ &\left. + \int_{BC} (X_n \Delta_2 U + Z_n \Delta_2 W - D_n \Delta_2 \varphi) ds \right] \end{aligned}$$

Здесь X_n , Z_n , D_n — компоненты вектора механических напряжений и нормальная составляющая вектора электрической индукции на контуре ячейки Π_0 , W_V — плотность внутренней энергии фундаментальной ячейки [9].

В силу (2.2), (2.3) получаем окончательно (F — площадь фундаментальной ячейки)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} F [\langle \varepsilon_x \rangle \langle \sigma_x \rangle + \langle \gamma_{xz} \rangle \langle \tau_{xz} \rangle + \langle \varepsilon_z \rangle \langle \sigma_z \rangle + \\ &+ \langle D_x \rangle \langle E_x \rangle + \langle D_z \rangle \langle E_z \rangle] \end{aligned}$$

Из энергетического равенства (2.5) следует корректность введенных средних компонент механических и электрических величин. Очевидно, для однозначного определения напряженного и деформированного состояния в структуре, а также электрической напряженности и индукции необходимо и достаточно задание любой из следующих четырех возможных систем средних величин: (1, 3, 5, 7, 9), (1, 3, 5, 8, 10), (2, 4, 6, 7, 9), (2, 4, 6, 8, 10), где цифры соответствуют порядку следования величин $\langle \varepsilon_x \rangle$, ..., $\langle E_z \rangle$ в формуле (2.5).

3. Интегральные уравнения краевой задачи. Искомые аналитические функции $\Phi_k(z_k)$ представим в виде

$$(3.1) \quad \Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \zeta_k(t_k - z_k) \omega_k(t) dt_k + R_k z_k, \quad z_k \in D^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \zeta_k(t_k - z_k) \sum_{j=1}^3 [l_{kj} \omega_j(t) + l_{kj}^* \overline{\omega_j(t)}] dt_k, \quad z_k \in D_0^{(k)}$$

$$(k = 4, 5, 6)$$

Здесь $\zeta_k(t_k - z_k)$ — дзета-функции Вейерштрасса, построенные на периодах $\omega_{1k} = \omega_1$, $\omega_{2k} = h + \mu_k H$, $D^{(k)}$ и $D_0^{(k)}$ — аффинные образы областей D и D_0 соответственно, $\omega_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) — искомые функции; постоянные R_k определяются из условия существования в структуре заданных средних механических напряжений и вектора напряженности электрического поля. Направление интегрирования в (3.1) — по ходу часовой стрелки.

Величины l_{kj} , l_{kj}^* определяются из системы

$$(3.2) \quad \sum_{k=4}^6 (B_{nk} l_{kj} - \overline{B_{nk} l_{kj}^*}) = A_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3)$$

Подставляя в краевые условия (1.3) предельные значения функций (3.1), приходим к системе интегральных уравнений

$$(3.3) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \left[D_{nj} \omega_j(t_0) + \int_l G_{nj}(t, t_0) \omega_j(t) ds \right] = \varphi_n(x_0, z_0)$$

$$(n = 1, 2, \dots, 6)$$

$$D_{nj} = \sum_{k=4}^6 B_{nk} l_{kj}, \quad G_{nj}(t, t_0) = H_{nj}(t, t_0) + \overline{H_{nj}^*(t, t_0)}$$

$$H_{nj}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=4}^6 B_{nk} \zeta_k(t_k - t_{k0}) l_{kj} \frac{dt_k}{ds} +$$

$$+ \left\{ \frac{f_{nj}^\circ}{F} - \frac{A_{nj}}{2\pi i} \left[t_{j0} \frac{\delta_{1j}}{\omega_1} + \zeta_k(t_j - t_{j0}) \right] \right\} \frac{dt_j}{ds}$$

$$H_{nj}^*(t, t_0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=4}^6 B_{nk} \zeta_k(t_k - t_{k0}) l_{kj}^* \frac{dt_k}{ds}$$

$$f_{1k}^\circ = x_0 (a_{14} \dot{\gamma}_k \mu_k - a_{23} \lambda_k) + \frac{1}{2} z_0 p_k$$

$$f_{2k}^\circ = -\frac{1}{2} x_0 p_k + z_0 \left[\frac{1}{2} (a_{12} - S_{44}) \dot{\gamma}_k \mu_k - (a_{21} - d_{15}) \lambda_k \right]$$

$$f_{3k}^\circ = z_0 \gamma_k \mu_k, \quad f_{4k}^\circ = 0, \quad f_{5k}^\circ = z_0 \lambda_k$$

$$f_{6k}^\circ = x_0 (a_{23} \gamma_k \mu_k - a_{22} \lambda_k)$$

$$\varphi_1^\circ = x_0 [a_{14} \langle \sigma_x \rangle + \frac{1}{2} (a_{12} - S_{44}) \langle \sigma_z \rangle - a_{23} \langle E_z \rangle] +$$

$$+ z_0 (\frac{1}{2} S_{44} \langle \tau_{xz} \rangle + \frac{1}{2} d_{15} \langle E_x \rangle)$$

$$\varphi_2^\circ = x_0 (\frac{1}{2} S_{44} \langle \tau_{xz} \rangle + \frac{1}{2} d_{15} \langle E_x \rangle) +$$

$$+ z_0 [\frac{1}{2} (a_{12} - S_{44}) \langle \sigma_x \rangle + a_{10} \langle \sigma_z \rangle - (a_{21} - d_{15}) \langle E_z \rangle]$$

$$\varphi_3^\circ = -x_0 \langle \tau_{xz} \rangle + z_0 \langle \sigma_x \rangle, \quad \varphi_4^\circ = x_0 \langle \sigma_z \rangle - z_0 \langle \tau_{xz} \rangle$$

$$\varphi_5^\circ = x_0 \langle E_x \rangle + z_0 \langle E_z \rangle, \quad \varphi_6^\circ = x_0 [a_{23} \langle \sigma_x \rangle + (a_{21} - d_{15}) \langle \sigma_z \rangle -$$

$$- a_{22} \langle E_z \rangle] + z_0 (d_{15} \langle \tau_{xz} \rangle + a_{20} \langle E_x \rangle) \quad (\kappa^\circ = \kappa(x_0, z_0))$$

Можно показать, учитывая (3.2), что система (3.2) — фредгольмова [10].

4. Теорема единственности. Плотность внутренней энергии W_V — положительно-определенная квадратичная форма компонент механических

и электрических величин. Например, для пьезокерамики *PZT-5* имеем

$$(4.1) \quad W_V = 0,03 \cdot 10^{-12} [(-11\sigma_x + 14\sigma_z + 317E_z)^2 + 236\sigma_x^2 + \\ + 49\sigma_z^2 + 133\,338E_x^2 + 117\,145E_z^2 + (43\tau_{xz} + 526E_x)^2]$$

Рассмотрим два решения краевой задачи (1.3), соответствующие одним и тем же средним величинам $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \tau_{xz} \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$, $\langle E_x \rangle$, $\langle E_z \rangle$. Очевидно, разность этих решений снова будет решением этой же краевой задачи при

$$(4.2) \quad \langle \sigma_x \rangle = \langle \tau_{xz} \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \langle E_x \rangle = \langle E_z \rangle = 0$$

В силу (2.5) и положительной определенности функционала внутренней энергии заключаем, что однородная краевая задача (1.3) дает нулевые поля механических напряжений и напряженности электрического поля в каждом компоненте структуры.

Для определения функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2, 3$) имеем систему

$$(4.3) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} \Phi_k'(z_k) = \delta_n^6 \Omega \quad (n = 1, 2, \dots, 6) \\ \alpha_{1k} = \gamma_k \mu_k^2, \quad \alpha_{2k} = \gamma_k \mu_k, \quad \alpha_{3k} = \gamma_k, \quad \alpha_{4k} = \lambda_k \mu_k \\ \alpha_{5k} = \lambda_k, \quad \alpha_{6k} = p_k \mu_k - g_k$$

(Ω — жесткий поворот, δ_n^6 — символ Кронекера). Отсюда находим, что

$$(4.4) \quad \Phi_k'(z_k) = \Omega g_k \quad (k = 1, 2, 3) \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_k \mu_k^{n-1} = \frac{\delta_n^6}{2} (a_{14} a_{22} - a_{23}^2)^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots, 6)$$

Интегрируя уравнения (4.4), получаем (d_k — комплексные постоянные)

$$(4.5) \quad \Phi_k(z_k) = \Omega g_k z_k + d_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Функции, описывающие соответствующую однородную краевую задачу в волокне, определяются аналогично

$$(4.6) \quad \Phi_k(z_k) = \Omega_0 g_k z_k + d_k \quad (k = 4, 5, 6); \quad g_6 = 0$$

Из краевых условий (1.3) вытекают связи

$$(4.7) \quad \Omega = \Omega_0, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_{nk} d_k = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^6 B_{nk} d_k \quad (n = 1, 2, \dots, 6)$$

5. Разрешимость интегральных уравнений (3.3). Рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (3.3). Очевидно, равенства $\varphi_n^0(x_0, z_0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots, 6$) и соотношения (4.2) равносильны.

В дальнейшем будем приписывать решению однородной системы и всем функциям и функционалам, соответствующим этому решению, нижний нулевой индекс.

Приравнявая функции (3.1) к соответствующим функциям из (4.5) и полагая равным нулю средний поворот ячейки, находим

$$(5.1) \quad R_{k0} = 0, \quad \Omega = \Omega_0 = 0$$

Введем в рассмотрение функции

$$(5.2) \quad \frac{1}{i} X_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_i \zeta_k(t_k - z_k) \omega_{k0}(t) dt_k, \quad z_k \in D_0^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3) \\ i\Theta_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_i \zeta_k(t_k - z_k) \sum_{j=1}^3 [l_{kj} \omega_{j0}(t) + l_{kj}^* \overline{\omega_{j0}(t)}] dt_k \\ z_k \in D^{(k)} \quad (k = 4, 5, 6)$$

Разность предельных значений соответствующих функций в (3.1) и (5.2) на l дает

$$(5.3) \quad \omega_{k0}(t) = iX_k(t_k) + d_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{j=1}^3 [l_{kj}\omega_{j0}(t) + l_{kj}^*\overline{\omega_{j0}(t)}] = i\Theta_k(t_k) - d_k \quad (k = 4, 5, 6)$$

Из первого равенства (5.3) следует, что $\omega_{k0}(t)$ — граничные значения регулярных в $D_0^{(k)}$ функций. Тогда на основании (3.1), (4.7), (5.1) получаем

$$(5.4) \quad d_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6)$$

Исключая в равенствах (5.3) функции $\omega_{k0}(t)$, получаем после равносильных преобразований

$$(5.5) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_{nk} X_k(t_k) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^6 B_{nk} \Theta_k(t_k) \quad (n = 1, 2, \dots, 6)$$

$$t_k = \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t, \quad t \in l$$

Равенства (5.5) представляют однородную краевую задачу типа (3.3) для неограниченной анизотропной среды с двоякопериодической системой пьезокерамических включений.

В силу теоремы единственности получаем

$$(5.6) \quad X_k(z_k) = \Omega^* g_k^* z_k + d_k^* \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$i\Theta_k(z_k) = i(\Omega^* g_k^* z_k + d_k^*) \quad (k = 4, 5, 6)$$

Сравнивая функции $\Theta_k(z_k)$ из (5.6) и (5.2), приходим к выводу, что выражения

$$(5.7) \quad Q_k(t) = \sum_{j=1}^3 [l_{kj}\omega_{j0}(t) + l_{kj}^*\overline{\omega_{j0}(t)}] \quad (k = 4, 5, 6)$$

являются граничными значениями функций комплексного переменного z_k , регулярных в области $D_0^{(k)}$. Следовательно, имеет место представление

$$(5.8) \quad \Phi_{k0}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{Q_k(t) dt_k}{t_k - z_k} \quad (k = 4, 5, 6); \quad z_k \in D_0^{(k)}$$

Введем функции

$$(5.9) \quad i\Theta_k^*(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{Q_k(t) dt_k}{t_k - z_k} \quad (k = 4, 5, 6); \quad z_k \in D^{(k)}$$

Разность предельных значений функций (5.8) и (5.9) на l при учете равенств (5.1) и (5.4) дает

$$(5.10) \quad Q_k(t) = i\Theta_k^*(t_k) \quad (k = 4, 5, 6)$$

Таким образом, вторая группа равенств в (5.3) может быть заменена соотношениями (5.10). Исключая в этих соотношениях $\omega_{j0}(t)$, так же, как и выше, приходим к однородной краевой задаче для анизотропной среды с одним пьезокерамическим включением

$$(5.11) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 A_{nk} X_k(t_k) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=4}^6 B_{nk} \Theta_k^*(t_k) \quad (n = 1, 2, \dots, 6)$$

Функции (5.9) исчезают на бесконечности, поэтому краевая задача (5.11) имеет лишь тривиальное решение

$$(5.12) \quad x_k(z_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad \Theta_k^*(z_k) = 0 \quad (k = 4, 5, 6)$$

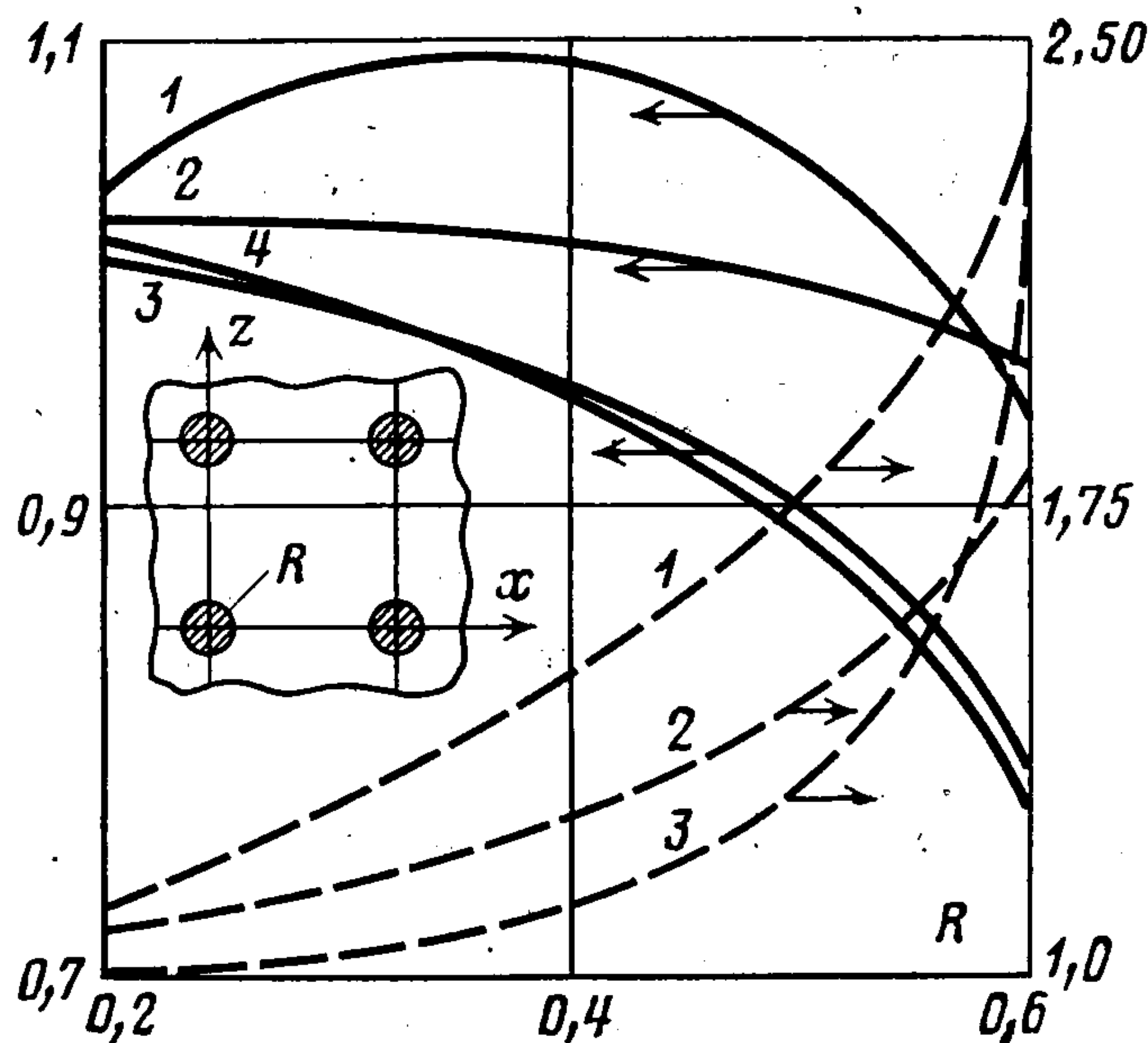
Отсюда в силу (5.3) и (5.4) заключаем, что $\omega_{k0}(t) = 0$ ($k = 1, 2, 3$), что и требовалось.

6. Осреднение пьезокерамической структуры. Определение макро-модели регулярной структуры дано в [11]. Выражая средние деформации и средние значения компонент вектора электрической напряженности через приращения соответствующих величин по формулам (2.1), используя квазипериодичность этих функций, статические и электрические условия на сторонах ячейки (2.2) и (2.3), получаем уравнения состояния макро-модели (угловые скобки для краткости опустим)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x + S_{13}\sigma_z + S_{15}\tau_{xz} + d_{11}E_x + d_{31}E_z \\ \varepsilon_z &= S_{31}\sigma_x + S_{33}\sigma_z + S_{35}\tau_{xz} + d_{13}E_x + d_{33}E_z \\ \gamma_{xz} &= S_{51}\sigma_x + S_{53}\sigma_z + S_{55}\tau_{xz} + d_{15}E_x + d_{35}E_z \\ D_x &= d_{11}\sigma_x + d_{13}\sigma_z + d_{15}\tau_{xz} + \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{13}E_z \\ D_z &= d_{31}\sigma_x + d_{33}\sigma_z + d_{35}\tau_{xz} + \varepsilon_{13}E_x + \varepsilon_{33}E_z\end{aligned}$$

Коэффициенты $\langle S_{ij} \rangle$, $\langle d_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ назовем, соответственно, осредненными податливостями, пьезомодулями, диэлектрическими проницаемостями. Они являются функционалами, определенными на некоторых стандартных решениях системы (3.3). В силу громоздкости их не выписываем.

7. Результаты расчетов. В качестве примера рассмотрим композиционный материал с пьезокерамической матрицей PZT-5 [9], линейно-армированной волокнами кругового поперечного сечения радиуса R ,



Фиг. 2

центры которых образуют квадратную решетку с шагом $\omega_1 = 2$. Материал волокон — борэпоксид с параметрами $b_{11} = 2,5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $b_{33} = 25 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $b_{13} = -b_{31} = -0,625 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $b_{55} = 66,67 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $b_{15} = b_{35} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $\kappa_{11} = \kappa_{33} = 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}$ К²/Нм².

На фиг. 2 представлены результаты расчетов осредненных параметров структуры. Сплошные кривые 1—4 описывают относительный пьезоэлектрический модуль $\langle d_{15} \rangle / d_{15}^*$ и величины $\langle S_{33} \rangle / S_{33}^*$, $\langle S_{11} \rangle / S_{11}^*$, $\langle S_{13} \rangle / S_{13}^*$ соответственно (упругие податливости $\langle S_{15} \rangle$, $\langle S_{35} \rangle$, пьезоэлектрический модуль $\langle d_{35} \rangle$ и коэффициент диэлектрической проницаемости $\langle \varepsilon_{13} \rangle$ равны нулю). Штриховые кривые 1—3 построены для относительных коэффициентов диэлектрической проницаемости $\langle \varepsilon_{11} \rangle / \varepsilon_{11}^*$, $\langle \varepsilon_{33} \rangle / \varepsilon_{33}^*$ и величины $\langle S_{55} \rangle / S_{55}^*$ (относительные пьезоэлектрические модули $\langle d_{31} \rangle / d_{31}^*$ и $\langle d_{33} \rangle / d_{33}^*$ равны единице). Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}S_{11}^* &= S_{11} - S_{12}^2 / S_{11}, & S_{13}^* &= S_{13} - S_{13} S_{12} / S_{11} \\ S_{33}^* &= S_{33} - S_{13}^2 / S_{11}, & S_{55}^* &= S_{44}; & d_{15}^* &= d_{15} \\ d_{31}^* &= d_{31} - d_{31} S_{12} / S_{11}, & d_{33}^* &= d_{33} - d_{31} S_{13} / S_{11}; \\ \varepsilon_{11}^* &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{33}^* &= \varepsilon_{33} - d_{31}^2 / S_{11}\end{aligned}$$

Авторы благодарят А. М. Харченко за помощь в численной реализации алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. К теории упругого линейно-армированного композиционного материала. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 3, с. 537—546.
2. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 53—63.

3. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
4. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов.— В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978, с. 5—66.
5. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Белокопытова Л. В., Иваненко О. А., Фильштинский Л. А.* Передача нагрузки от упругого ребра к полубесконечной пьезокерамической пластинке.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 41—51.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
8. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 385 с.
9. Физическая акустика. Т. 1. Ч. А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. 592 с.
10. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М.: Наука, 1977. 311 с.
11. *Фильштинский Л. А.* К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 262—273.

Сумы

Поступила в редакцию
28.VIII.1984