

УДК 533.6.011

ЭФФЕКТЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ И ОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУР ПРИ СЖАТИИ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ГАЗА В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ

Демидов М. А., Михайлов А. П.

Рассматривается задача об адиабатическом сжатии конечной массы газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем. Давление на поршне растет в режиме с обострением по закону $P(0, t) = P_0 (t_{foc} - t)^{n_S}$, $n_S = -2\gamma(N + 1)/(\gamma + 1 + N(\gamma - 1))$, т. е. обращается в бесконечность при $t \rightarrow t_{foc}$, $N = 0, 1, 2$ — показатель симметрии, γ — показатель адиабаты. Энтропия газа распределена по лагранжевой массовой координате m : $s = \ln \{a_0 | m - m_1 |^\delta\}$, a_0, m_1, δ — параметры. В случае $N = 0$ показано существование эффекта локализации газодинамических процессов — несмотря на беспредельный рост давления на поршне, возмущения не проникают далее некоторой конечной массы газа (области локализации). Вне области локализации газ не испытывает влияния поршня и остается в первоначальном состоянии. Другим эффектом является образование (при $\delta \neq 0$) газодинамических структур, в том числе сложных, — локализованных максимумов температуры или плотности, связанных с фиксированной массой газа.

Для плоского случая была найдена [1] траектория поршня, обеспечивающая схождение всех характеристик в одной точке. Аналогичные сферические и цилиндрические центрированные волны сжатия изучались в [2—4]¹. Несколько другой подход к изучению безударного сжатия основан на построении решений в разделяющихся переменных [5] (в [6] получено соответствующее решение, отвечающее изоэнтропическому сжатию). В отличие от решений в характеристиках данный подход обобщается на случай сред с различными физическими процессами [6, 7]. В обоих подходах для осуществления безударного сверхсжатия необходимо, чтобы давление на поршне изменялось в некотором режиме с обострением, т. е. обращалось в бесконечность при приближении к конечному моменту времени.

Ниже при помощи автомодельных решений в разделяющихся переменных результаты [7] обобщаются на случай адиабатического (неизоэнтропического) сжатия конечной массы газа. Изучаются также два ранее не рассматривавшихся эффекта — локализация газодинамических возмущений и возникновение в сжимаемом веществе структур, которые появляются благодаря неизоэнтропичности среды и локализации (инерции) газодинамических процессов. Последнее объединяет их с нестационарными тепловыми структурами [8—10]. Распределение энтропии в газе может быть создано, к примеру, ударной волной, движущейся с переменной скоростью.

1. Постановка задачи. Одномерное адиабатическое движение газа описывается системой уравнений

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial (r^N u)}{\partial m}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -r^N \frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u$$

где m — лагранжева массовая координата, p, ρ, u, r — давление, плотность, скорость и пространственная координата, γ, N — показатели адиабаты и симметрии.

Выберем интеграл адиабатичности в виде степенной функции

$$(1.2) \quad p \rho^{-\gamma} = a_0 | m - m_1 |^\delta$$

¹ См. также: Каждан Я. М. К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1975, № 89. 23 с.; Каждан Я. М. Адиабатическое сжатие газа под действием цилиндрического поршня. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1980, № 56. 24 с.

(δ, m_1 — параметры). Формула (1.2) справедлива, в частности, для распределения энтропии за фронтом кумулирующей на центр симметрии ударной волны, причем $m_1 = 0$, $\delta = -2(1 - \alpha)/(3\alpha)$, где α — показатель автомодельности (для $\gamma = 5/3\alpha = 0,667$ [11]).

Решение системы (1.1) в разделяющихся переменных имеет вид

$$(1.3) \quad p(m, t) = p_0 (t_{foc} - t)^n \pi(\xi), \quad u(m, t) = u_0 (t_{foc} - t)^{n_1} v(\xi)$$

где $\pi(\xi)$ и $v(\xi)$ — безразмерные функции автомодельной координаты

$$(1.4) \quad \xi = m/m_0$$

Параметры m_0 (имеющий размерность массы) и u_0 зависят от константы p_0 (определяемой из режима давления на поршне) и константы энтропии a_0^2 .

Для показателей n, n_1 справедливы неравенства

$$(1.5) \quad n = -2\gamma(N + 1)/(\gamma + 1 + N(\gamma - 1)) < 0, \quad n_1 = -n/(\gamma(N + 1) - 1) < 0$$

Из (1.3), (1.5) следует, что в момент $t = -\infty$ давление и скорость газа равны нулю, все его частицы находятся на бесконечности. При $t \rightarrow t_{foc}$ (t_{foc} — момент обострения) давление, скорость и плотность газа неограниченно возрастают, а радиус стремится к нулю.

Пространственное распределение газодинамических функций описывается системой автомодельных уравнений

$$(1.6) \quad \frac{d}{d\xi} [(-v)^N v] + |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma} \pi^{-1/\gamma} = 0, \quad (-v)^N \frac{d\pi}{d\xi} + v = 0, \quad \xi_1 = \frac{m_1}{m_0}$$

краевые условия для которой даются ниже.

2. Сжатие [полупространства. Рассматривается задача о сжатии газа плоским поршнем, расположенным в точке $m = 0$ ($\xi = 0$). Скорость поршня ограничена при $t < t_{foc}$, т. е. $0 < v(0) < \infty$. Полагая $p(0, t) = p_0 (t_{foc} - t)^{n_s}$, из (1.3) получаем $\pi(0) = 1$.

Ищутся решения, для которых $\pi(\xi), v(\xi) > 0$ при $\xi < \xi_f$ ($\xi_f > 0$ — автомодельная координата фронта волны сжатия, отделяющая движущийся газ от невозмущенного), а при $\xi = \xi_f$ скорость и давление газа обращаются в нуль: $\pi(\xi_f) = v(\xi_f) = 0$.

Если величина ξ_f конечна, то имеет место эффект локализации. Действительно, при $m > m_f = \xi_f m_0$ решение поставленной задачи можно продолжить стационарным решением системы (1.1): $\rho(m, t) = \rho_0$, $u(m, t) = p(m, t) = 0$. Следовательно, при $m < m_f$ (в области локализации) газодинамические функции растут в режиме с обострением, а при $m > m_f$ находится неподвижное холодное вещество (отделенное от фронта волны контактным разрывом), в которое возмущения не проникают.

Примером является решение для изоэнтропического ($\delta = m_1 = 0$) случая

$$(2.1) \quad \pi(\xi) = (1 - \xi/\xi_f)^{2\gamma/(\gamma+1)}, \quad v(\xi) = -\pi'(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_f = (\gamma - 1)/\sqrt{2\gamma(\gamma + 1)}$$

Поставленная задача эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка (см. (1.6) при $N = 0$) с краевыми условиями

$$(2.2) \quad \pi'' - |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma} \pi^{-1/\gamma} = 0, \quad \pi(0) = 1, \quad -\infty < \pi'(0) < 0, \\ \pi(\xi_f) = \pi'(\xi_f) = 0$$

² См. также: Демидов М. А., Михайлов А. П. Локализация и структуры при адиабатическом сжатии конечной массы газа в режиме с обострением. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1983, № 8. 24 с.

Асимптотики давления и скорости вблизи поршня и фронта $\xi = \xi_f$ выражаются формулами

$$(2.3) \quad \pi(\xi)_{\xi \rightarrow 0} = \begin{cases} 1 - v(0)\xi + |\xi_1|^{\delta/\gamma} \xi^2/2, & \xi_1 \neq 0, v(0) = -\pi'(0) \\ 1 - v(0)\xi + \gamma^2(\delta + \gamma)^{-1}(\delta + 2\gamma)^{-1} \xi^{(\delta+2\gamma)/\gamma}, & \\ \xi_1 = 0, \delta > -\gamma \end{cases}$$

При $\xi \rightarrow \xi_f$ возможны три случая:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \text{а) } \pi(\xi) &= ((\xi - \xi_f)^2 (\xi_f - \xi_1)^{\delta/\gamma} (2\gamma(\gamma - 1)^{-1}(\gamma + 1)^2)^{\gamma/(\gamma+1)} \times \\ &\times \xi \rightarrow \xi_f \neq \xi_1, \quad \infty \\ \text{б) } \pi(\xi) &= (\alpha(\alpha - 1))^{-\gamma/(\gamma+1)} |\xi - \xi_1|^\alpha, \quad \alpha = (\delta + 2\gamma)(\gamma + 1), \\ &\xi \rightarrow \xi_f = \xi_1, \quad \delta > 1 - \gamma \\ \text{в) } \pi(\xi) &= (\alpha(\alpha - 1))^{-\gamma/(\gamma+1)} |\xi - \xi_1|^\alpha, \quad \xi \rightarrow \xi_f = \infty, \quad \delta < \\ &< -2\gamma \end{aligned}$$

Формулы (2.4) в случаях б) и в) дают точное решение задачи (2.2) при

$$(2.5) \quad |\xi_1| = \xi_1^* = (\alpha(\alpha - 1))^{\gamma/(\delta+2\gamma)}$$

Особенность энтропии не может находиться внутри массы сжимаемого газа, т. е. $\xi_1 \geq \xi_f$ или $\xi_1 \leq 0$. Если же $0 < \xi_1 < \xi_f$, то плотность или температура обращаются в бесконечность при $\xi = \xi_1$ (см. (1.2)) и построение решения в области $0 < \xi < \xi_f$ невозможно.

Замена

$$(2.6) \quad y = \pi^{1+1/\gamma} |\xi - \xi_1|^{-2-\delta/\gamma}, \quad x = -\pi |\xi - \xi_1|^{-1/\pi'}(\xi)$$

позволяет исследовать задачу (2.2) на фазовой плоскости уравнения первого порядка

$$(2.7) \quad \frac{dy}{dx} = \sigma y^2 x^{-1} \frac{A\alpha x + 1}{y + Axy - x^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\gamma} + 1, \quad A = \text{sign}(\xi - \xi_1)$$

Поршню в плоскости xu соответствует точка

$$(2.8) \quad (x(0), y(0)) = (|\xi_1|^{-1} v^{-1}(0), |\xi_1|^{-\sigma\alpha})$$

Точке фронта отвечают значения

$$(2.9) \quad (x_f, y_f) = \begin{cases} (0, 0), & \xi_f \neq \xi_1, \quad \infty \\ (-(A\alpha)^{-1}, |\xi_1^*|^{-\alpha\sigma}), & \xi_f = \xi_1, \quad \xi_f = \infty \end{cases}$$

Анализ задачи (2.7)–(2.9) проводится стандартными методами [12].

Пусть $\xi_f \neq \xi_1, \infty$ (рассматриваются решения с конечным фронтом, особенность энтропии не совпадает с его положением). Для любых γ, δ и ξ_1 в квадранте $x > 0, y > 0$ существует единственная интегральная кривая L , выходящая из точки фронта $(0, 0)$ и удовлетворяющая асимптотикам (2.4), причем на ней $y_L = 2\gamma/(\gamma - 1)x^2 + \psi(x)$, $\psi(x)x^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Искомое решение — часть интегральной кривой L между точками фронта $(0, 0)$ и поршня (2.8). Для построения решения при заданном $\xi_1 = y_0^{-1/(\sigma\alpha)}$ необходимо выбрать значение свободного параметра $v(0) = x^{-1}(0)y^{1/(\sigma\alpha)}(0)$ так, чтобы точка поршня (2.8) принадлежала интегральной кривой L .

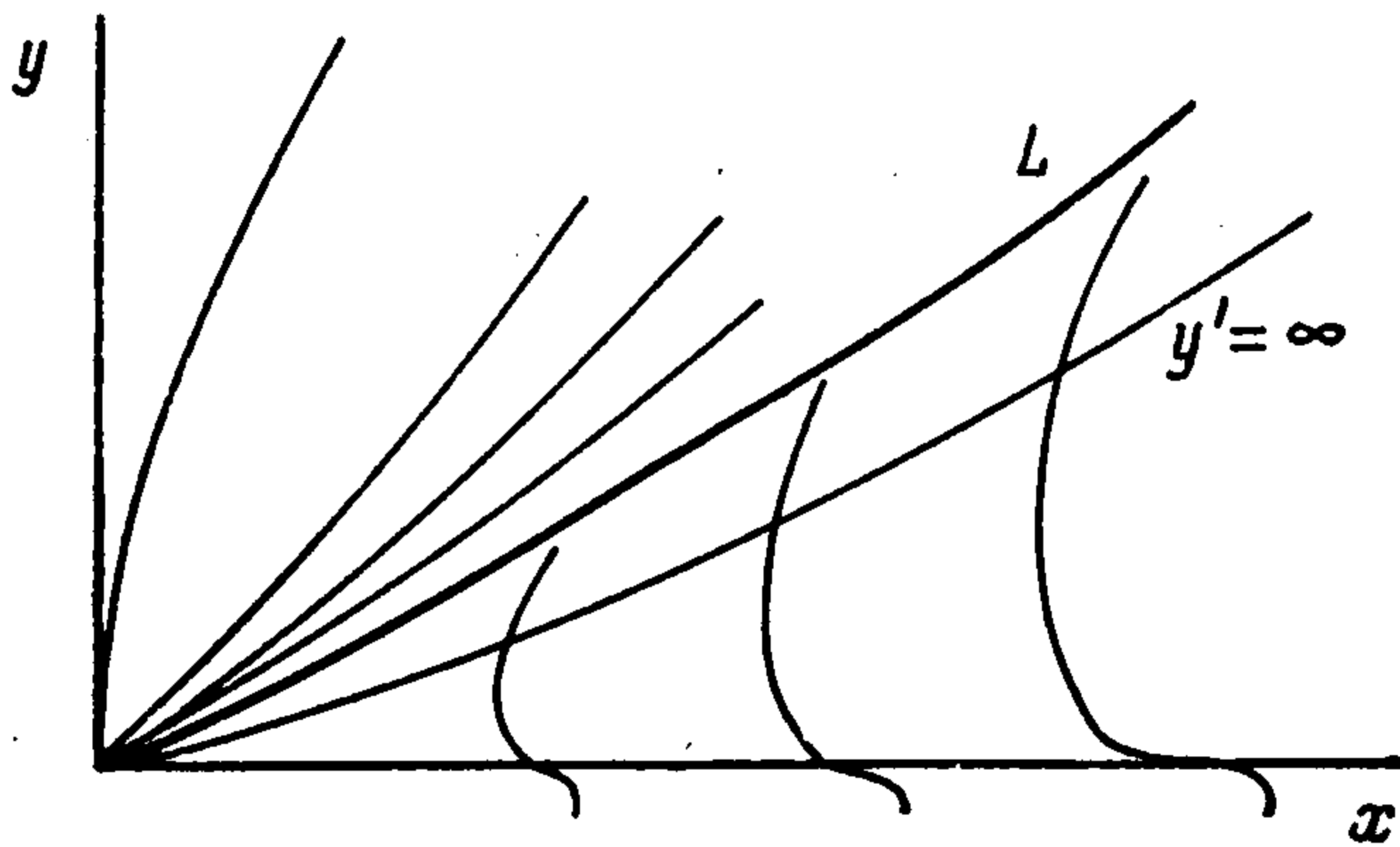
Возможны три случая.

1°. $\xi_1 = 0$ (особенность энтропии расположена на поршне, $\delta > -\gamma$ [4], $x(0) = y(0) = +\infty$). Кривая L соединяет точки $(0, 0)$ и $(+\infty, +\infty)$, т. е. решение существует и единственно, поскольку x и y монотонно возрастают при движении от фронта к поршню (фиг. 1).

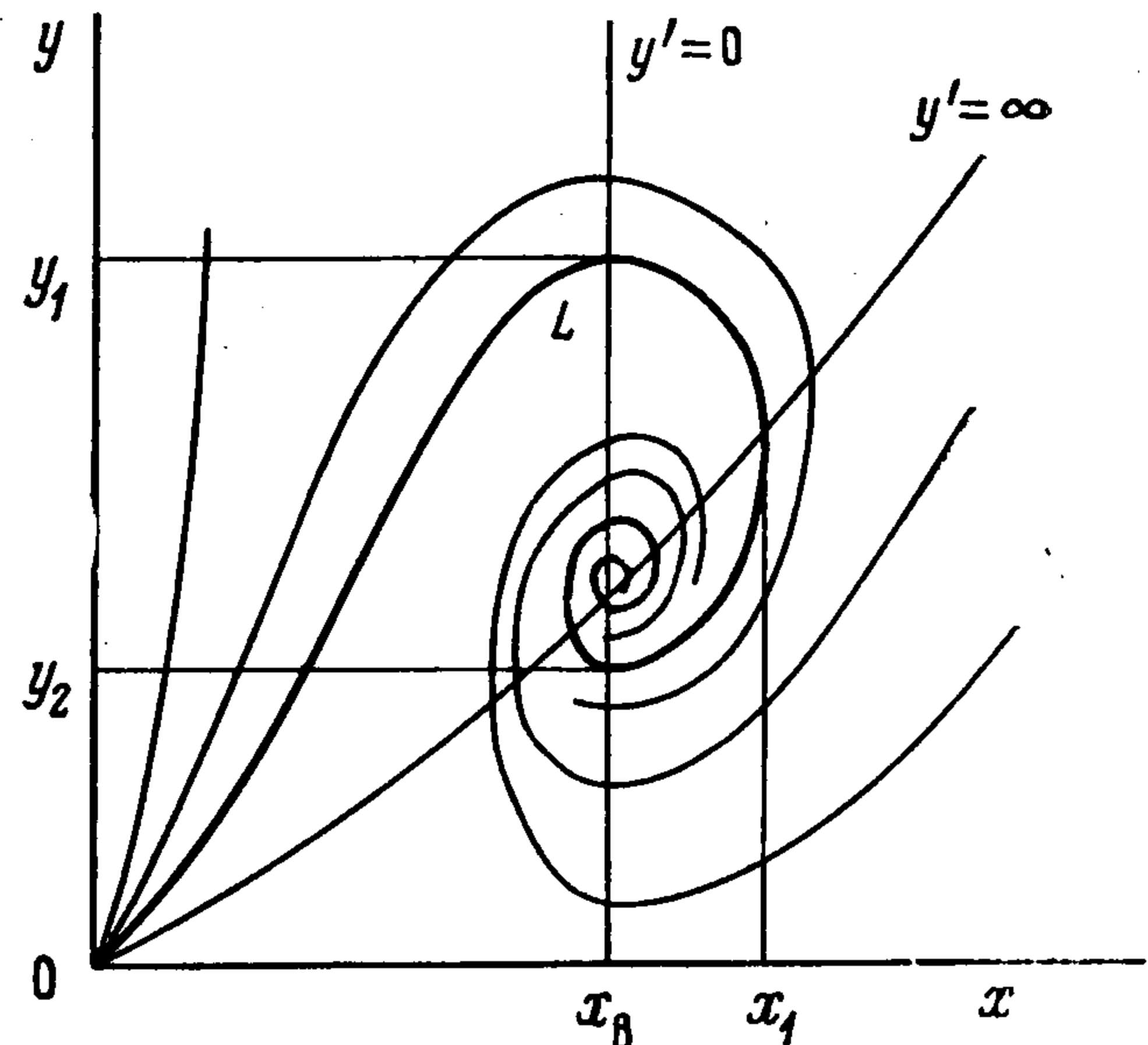
2°а. $\xi_1 < 0, \alpha \geq 0$ (энтропия не имеет особенностей в газе перед поршнем, $x(0), y(0) < +\infty$). Поле интегральных кривых аналогично случаю 1°, следовательно, решение существует и единственно.

2°б. $\xi_1 < 0$, $\alpha < 0$ (по сравнению со случаем 2°а энтропия быстро падает с удалением от поршня). При $\alpha < 0$ в квадранте $x > 0$, $y > 0$ появляется особая точка B ($(-A\alpha)^{-1}$, $|\xi_1^*|^{-\alpha\sigma}$), в которую входит интегральная кривая L . При $\alpha^* \leq \alpha < 0$ она является узлом, а при $\alpha < \alpha^*$ — фокусом (фиг. 2), $\alpha^* = (1 - \sqrt{1 + \gamma})/2$.

На кривой L справедливы соотношения $x < x_1 < \infty$, $y < y_1 < \infty$, $x_1 = x_1(\delta, \gamma)$, $y_1 = y_1(\delta, \gamma)$. Тем самым решение существует лишь при $|\xi_1| \leq \xi_1^{**} = y_1^{-1/(\sigma\alpha)}$ (что является ограничением на распределение энтропии) и при $v(0) > v_1^{**} = x_1^{-1}y_1^{1/(\sigma\alpha)}$ (ограничение снизу на скорость поршня, см. (2.6)). При $|\xi_1| < \xi_1^{***} = y_2^{-1/(\sigma\alpha)}$ решение единственно, а для $\xi_1^{***} < |\xi_1| < \xi_1^{**}$ решение неединственно, так как для любого заданного значения ξ_1 из этого интервала существует спектр значений $v(0)$, отвечающих различным положениям точки поршня на интеграль-



Фиг. 1



Фиг. 2

ной кривой L (фиг. 2). При $|\xi_1| \rightarrow |\xi_1^*|$ количество решений неограниченно возрастает, а при $|\xi_1| = \xi_1^*$ решений бесконечно много.

Если точка B — узел, то при $\xi_1^{***} < |\xi_1| < \xi_1^{**}$ существует не более двух решений поставленной задачи. В обоих случаях сама точка B не является решением (см. 4° и 5°).

Подробное описание свойств решения типа 2°б требует дополнительного изложения.

3°. $\xi_1 > \xi_f$ (особенность энтропии расположена перед фронтом волны сжатия).

3°а. $\alpha \leq 1$. Поведение интегральной кривой L аналогично случаю 2°а, следовательно, решение существует и единственно. В отличие от случая, 2°а кривая L имеет асимптотику: $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow A^{-1}$, т. е. скорость поршня ограничена снизу: $v(0) > A\alpha |\xi_1|^{-1}$.

3°б. $\alpha > 1$ (так же, как и в случае 2°б, энтропия быстро падает при удалении от поршня). Часть поля интегральных кривых, содержащая кривую L , и следовательно, свойства решений аналогичны случаю 2°б.

4°. Рассмотрим теперь случай $\xi_f = \xi_1$. Пусть $\xi_f = \xi_1$ (особенность энтропии расположена на фронте, $\delta > 1 - \gamma$ из (2.4) б). Решение существует лишь при $\xi_1 = \xi_1^*$, оно единственно и дается формулой (2.4) б), в плоскости xu ему отвечает точка B — центр фокуса.

5°. Наконец, если $\xi_f = \infty$ (сжатию подвергается бесконечная масса газа перед поршнем, из (2.4) в) $\delta < -2\gamma$, то решение существует лишь при $\xi_1 = -\xi_1^*$, $\delta < 2\gamma$, оно единственно и дается формулой (2.4) в). В плоскости xu ему, как и решению 4°, соответствует точка B .

В случаях 2°б и 3°б решение автомодельной задачи не единственно.

Для заданных значений γ , δ , ξ_1 существует различное число решений, причем при $\xi_1 = -\xi_1^*$ ($\xi_1 = \xi_1^*$) одновременно существует бесконечно много решений типа 2°б и решение типа 5° (соответственно, множество решений типа 3°б и решение типа 4°). Однако решение задачи о сжатии газа поршнем единственно, так как различным автомодельным решениям соответствуют различные пространственные распределения газодинамических функций в момент начала сжатия (дающие одинаковое распределение энтропии по массе газа и отвечающие одинаковому закону давления на поршне).

Итак, если задана среда (γ) и распределение энтропии в ней (δ , ξ_1), то можно осуществить тот или иной тип сжатия (1°—5°). В случаях 2°б и 3°б возникают ограничения на параметр ξ_1 , в случаях 2°б и 3° — на скорость поршня $v(0)$, в случаях 1°, 4°, 5° ограничен диапазон изменения параметра δ (в случаях 4° и 5° фиксирована также величина $|\xi_1| = \xi_1^*$).

Как следует из явного вида системы (1.6), давление и скорость в волне сжатия монотонно падают от поршня к фронту.

Степень сжатия (нагрева) участка среды определяется его энтропией и давлением в нем. Благодаря неизоэнтропичности при монотонном профиле в волне сжатия можно достичь большей плотности (температуры) в областях с меньшим давлением и получить газодинамические структуры — локализованные неоднородности плотности (температуры), связанные с фиксированной массой газа.

Продифференцировав выражения для плотности (температуры) $g(\xi) = \pi^{1/\gamma} |\xi - \xi_1|^{-\delta/\gamma}$ ($\theta(\xi) = \pi^{1-1/\gamma} |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma}$), получаем условия существования структур в волне сжатия

$$(2.10) \quad \pi_{\xi}' = A\delta\pi |\xi - \xi_1|^{-1} \quad (\pi_{\xi}' = -A\delta\pi |\xi - \xi_1|^{-1}(\gamma - 1)^{-1})$$

В плоскости xu условия (2.10) допускают наглядную интерпретацию. Структуры плотности (температуры) существуют, если интегральная кривая L пересекает прямую $x = x_1 = -(A\delta)^{-1}$, ($x = x_2 = -x_1/(\gamma - 1)$), количество максимумов равно числу точек пересечения. Так как прямые $x = x_1$ и $x = x_2$ лежат в разных полуплоскостях, то могут существовать либо структуры плотности, либо структуры температуры.

1°. $\xi_1 = 0$ ($\delta > -\gamma$). Решение всегда содержит единственную (в силу монотонности кривой L) структуру (максимум) плотности при $-\gamma < \delta < 0$ или температуры (при $\delta > 0$). Плотность ($-\gamma < \delta < 0$) или температура ($\delta > 0$) обращается в нуль при $\xi = 0$ ($m = 0$).

2°а. $\xi_1 < 0$, $\delta > -2\gamma$. Для любого $\delta < 0$ (или $\delta > 0$) можно выбрать параметр ξ_1 так, чтобы интегральная кривая пересекала (не более одного раза) прямую $x = x_1$ ($x = x_2$), следовательно, возможно существование единственного максимума плотности (температуры).

2°б. $\xi_1 < 0$, $\delta < -2\gamma$. При всех значениях δ кривая L пересекает прямую $x = x_1 < x_2$, причем количество точек пересечения неограниченно возрастает при $\delta \rightarrow -\infty$, таким образом, решение может содержать произвольное количество структур плотности (максимумов или минимумов).

3°а. $\xi_1 > \xi_f$, $\delta < 1 - \gamma < 0$. Интегральная кривая L пересекает прямую $x = x_2$, следовательно, можно выбрать ξ_1 , так, чтобы температура в волне сжатия имела один максимум.

3°б. $\xi_1 > \xi_f$, $\delta > 1 - \gamma$. При $1 - \gamma < \delta < 0$ структуры отсутствуют, а в случае $\delta > 0$ решение может содержать произвольное количество структур плотности (максимумов и минимумов, аналогично 2°б).

4°, 5°. Структуры отсутствуют; плотность и температура монотонны. В случае 4° при $\delta = 2$ плотность $g(\xi)$ постоянна (см. (2.4), б)), т.е. происходит однородное сжатие конечностей массы газа в режиме с обострением.

Задача (2.2) имеет группу аналитических решений вида $\pi(\xi) = C_1 |\xi - \xi_1|^\nu \times \times (1 - C_2 |\xi - \xi_1|^\beta)^\theta$, существующих при следующих значениях δ и γ (постоянные C_1 и C_2 определяются из граничного условия на поршне и уравнения (2.2)):

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \text{а) } & \delta = 0, \nu = 0, \beta = 1, \theta = 2\gamma/(\gamma + 1), \xi_1 = 0 \\ \text{б) } & |\xi_1| = \xi_1^*, \beta = \theta = 0, \nu = \alpha, \delta < -2\gamma \text{ или } \delta > 1 - \gamma; \\ \text{в) } & \delta = (1 - 3\gamma)/2, \theta = 0, \beta = 1/\theta, \theta = 2\gamma/(\gamma + 1) \\ \text{г) } & \delta = 1 - 3\gamma, \beta = -1, \nu = 1, \theta = 2\gamma/(\gamma + 1) \\ \text{д) } & \theta = \alpha, \beta = (2\delta + 3\gamma - 1)/((3\gamma - 1)\gamma/(\gamma + 1) - 1) \\ & \theta = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \quad \delta: \left[\frac{\alpha(\alpha - 1)}{2\gamma(\gamma - 1)} \right]^{1/2} = \frac{2\delta + 3\gamma - 1}{(3\gamma - 1)\gamma - (\gamma + 1)} \end{aligned}$$

Решение в случае а) приведено в п. 1 (см. 1.1), случай б) соответствует решениям 4° и 5°. Случаи в) — д) относятся к решениям типа 2° и 3°, наличие структур в них зависит от величины ξ_1 .

Аналитические решения (2.11) подтверждают общий анализ и обладают характерными свойствами (локализация, структуры) решений поставленной задачи.

Для $m_1 = 0$ ($\xi_1 = 0$) постановка задачи о сжатии газа плоским поршнем в режиме с обострением может быть обобщена на более широкий класс автомоделных решений (*LS*- и *HS*-режимы [13—15]). При этом в *LS*-режимах (более медленных, чем *S*-режим) имеет место локализация газодинамических процессов и возникновение (при $\delta \neq 0$) структур.

3. Сжатие в цилиндрической и сферической геометрии. В случае $N = 1, 2$ газ находится внутри цилиндрического или сферического поршня, схлопывающегося при $t \rightarrow t_{foc}$. Масса газа и радиус отсчитываются от оси (центра) симметрии системы, скорость в котором должна быть равна нулю. Поршню соответствует координата m_p ($\xi_p = m_p/m_0$), равная массе сжимаемого газа.

В силу разделения переменных (см. (1.3)) $v(\xi) = -R(\xi)$, т.е. скорость обращается в нуль лишь в центре симметрии системы $\xi = 0$ ($m = 0$). Тем самым в рамках данной автомоделной постановки задачи невозможно построить решения, обладающие свойством локализации. Поэтому для $N = 1, 2$ рассматриваются также решения, для которых давление при $\xi = 0$ отлично от нуля. Краевые условия для системы (1.6) принимают вид

$$(3.1) \quad \pi(\xi_p) = 1, \quad |v(\xi_p)| < \infty, \quad \pi(0) \geq 0, \quad v(0) = 0$$

причем последнее условие (3.1) выполняется автоматически.

Как и в случае $N = 0$, в зависимости от положения особенности энтропии могут существовать пять типов решений: 1°. $\xi_1 = \xi_p$ ($\xi_1 = 0, N = 0$); 2°. $\xi_1 = \xi_p$ ($\xi_1 < 0, N = 0$); 3°. $\xi_1 < 0$ ($\xi_1 > \xi_f, N = 0$); 4°. $\xi_1 = 0$ ($\xi_1 = \xi_f, N = 0$); 5°. $\xi_p = \infty$ ($\xi_f = \infty, N = 0$).]

Решения типа 5° соответствуют сжатию бесконечной массы газа внутри замкнутого поршня и рассматриваться в дальнейшем не будут.

Аналогично случаю $N = 0$ из асимптотик скорости при $\xi \rightarrow \xi_1$ для случаев 1° и 4° следуют ограничения на параметр δ : 1°. $\delta > -\gamma$; 4°. $\delta > 1 - \gamma$.

В случае $N = 2$ задача (1.6, 3.1) принимает вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \pi'' + (\pi')^4 \pi^{-1/\gamma} |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma} &= 0, \quad \pi(\xi_p) = 1, \quad \pi'(\xi_p) > 0, \\ \pi'(0) &= \infty, \quad \pi(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Из асимптотик скорости и давления при $\xi \rightarrow \xi_1 = 0$ следует, что решения типа 4°, в отличие от случая $N = 0$, существует лишь при дополнительном ограничении $\delta < 2\gamma$, что является особенностью сферической геометрии.

Как и в плоском случае, замена

$$(3.3) \quad y = \pi^{3-1/\gamma} |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma-2}/3, \quad x = \pi |\xi - \xi_1|^{-1/\gamma} (\xi)$$

сводит задачу (3.2) к исследованию уравнения первого порядка

$$(3.4) \quad \frac{dy}{dx} = \sigma y x \frac{1 + A\alpha x}{x^2 - Ax^3 + y}, \quad \alpha = \frac{\delta - 2\gamma}{3\gamma - 1}, \quad \sigma = 3 - \frac{1}{\gamma}$$

Если $\pi(0) = 0$, то центру симметрии системы соответствует в плоскости xy точка $(0, 0)$ (см. (3.3)), из которой выходит единственная интегральная кривая L , удовлетворяющая асимптотикам задачи (3.2). Если же давление в центре отлично от нуля, то кривая L выходит из фиксированной точки на оси y : $y_0 = (\pi(0))^{3-1/\gamma} |\xi_1|^{\delta/\gamma-2} / 3$. Поведение интегральной кривой L в плоскости xy , определяющее существование и свойства решений, полностью аналогично случаю $N = 0$ — существуют решения всех типов (1° — 4°) с соответствующими свойствами (см. п. 2).

Как и в случае $N = 0$, задача (3.2) имеет группу аналитических решений вида (2.11).

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \text{а) } & \delta = 0, \quad \nu = 0, \quad \beta = 1, \quad \theta = 2\gamma/(3\gamma - 1), \quad \xi_1 = 0 \\ \text{б) } & |\xi_1| = \xi_1^* = (3\alpha^3 (\alpha + 1))^{\gamma/(2\gamma-\delta)}, \quad \beta = \theta = 0, \quad \nu = -\alpha \\ \text{в) } & \delta = (5\gamma - 1)/2, \quad \nu = 0, \quad \beta = (3\gamma - 1)/(2\gamma), \quad \theta = 1/\beta \end{aligned}$$

Наличие структур плотности или температуры в решении (3.5) в) определяется параметрами $\delta, \gamma, \xi_1, \xi_p$. Однородное сжатие соответствует решению (3.5) б) при $\delta = 2/\gamma$.

В случае $N = 1$ второе уравнение в исходной системе (1.1) становится автономным, его решение с учетом (3.1) запишем в виде

$$(3.6) \quad p(m, t) = p_0 (t_{foc} - t)^{-2} (m_0 + m - m_p)/m_0$$

Профиль давления в сжимаемой среде не зависит от самой среды (γ) и распределения энтропии в ней (δ, ξ_1) и полностью определяется граничным режимом на поршне, который, в свою очередь, одинаков для всех сред (не зависит от γ).

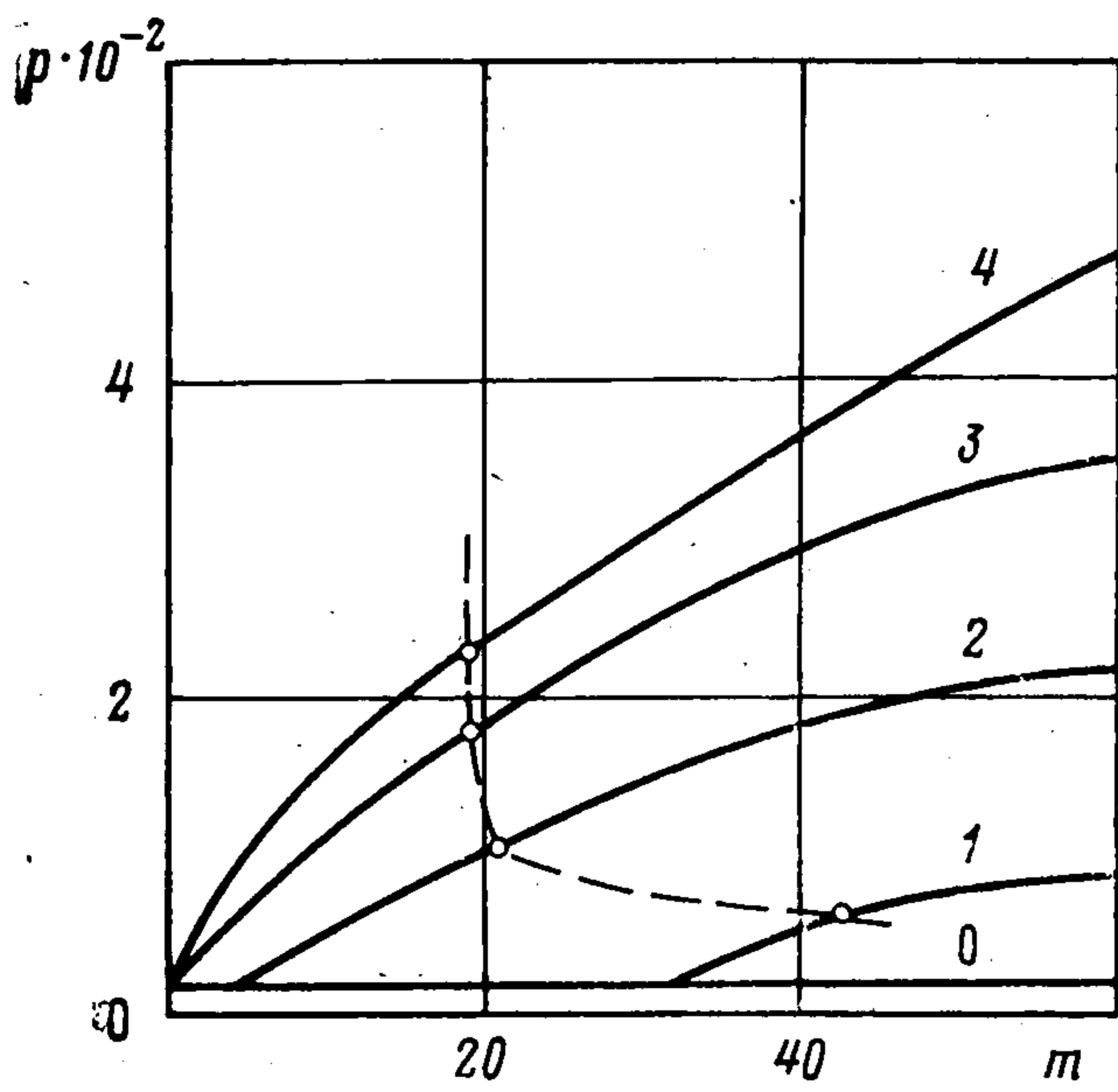
Общее решение задачи (1.6), (3.1) при $N = 1$ имеет вид

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \pi(\xi) &= 1 - \xi_p + \xi \\ v(\xi) &= -\left[\int |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma} (1 - \xi_p + \xi)^{-1/\gamma} d\xi \right]^{1/2} \\ g(\xi) &= |\xi - \xi_1|^{\delta/\gamma} (1 - \xi_p + \xi)^{-1/\gamma} \end{aligned}$$

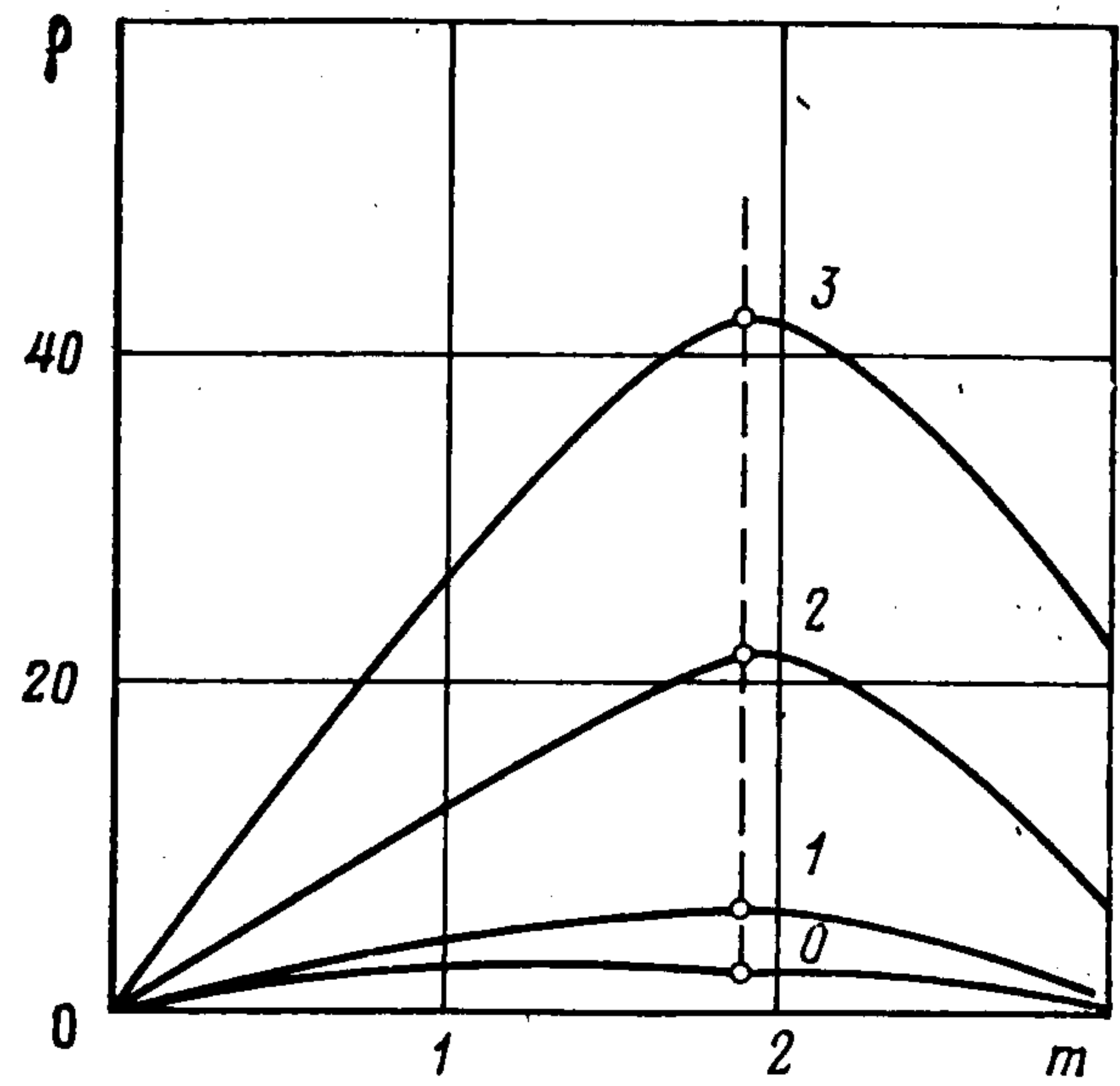
Для скорости постоянная интегрирования выбирается из условия $v(0) = 0$. Так как $\pi(0) = 1 - \xi_p \geq 0$, то масса сжимаемого газа ограничена сверху $m_p \leq m_0$. Это неравенство является обобщением результата [6], где также было получено решение при $\delta = m_1 = 0$ для $N = 0, 1, 2$ типа (2.1).

Условия существования и свойства решений, наличие структур непосредственно находятся из (3.7). Отметим, что при $\xi_p = \xi_p^* = 1$ однородное сжатие (см. п.2) осуществляется при $\delta = 1$.

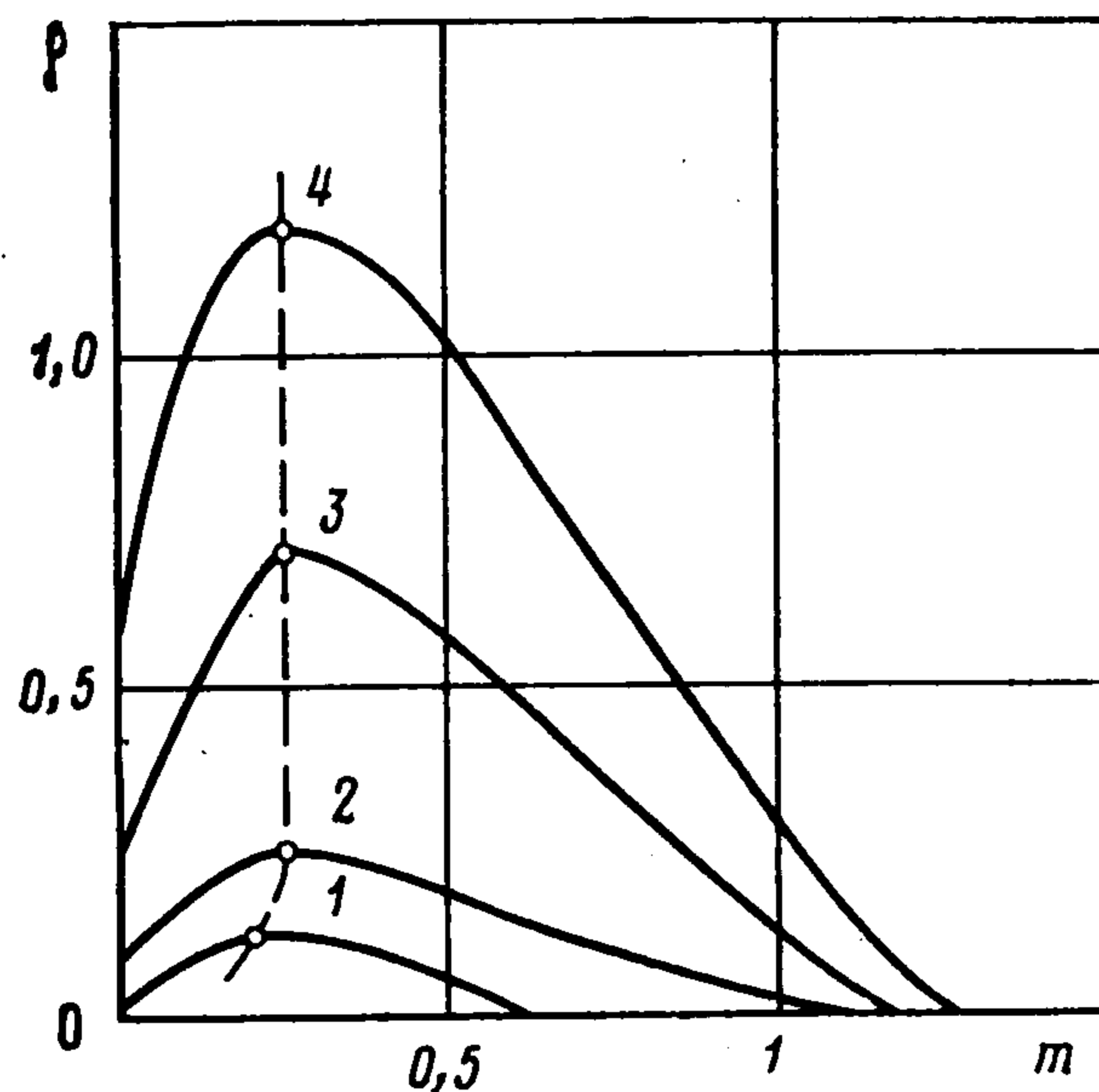
Особенностью цилиндрической симметрии является невозможность построения решений типа 2°б и 3°б — неединственных и содержащих сложные структуры плотности. Это связано с тем, что второе уравнение системы (1.6) автономно.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

4. **Результаты численных расчетов.** Численные расчеты, проведенные для системы (1.1) с использованием программы *FLORA* [16], иллюстрируют выход на автомодельный режим сжатия с неавтомодельных (например, однородных) начальных данных, устойчивость построенных решений и газодинамических структур, а также способ возбуждения структур при монотонных (в частности, однородных) начальных данных и монотонном граничном режиме. Представленные на фиг. 3—5 кривые 0, 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $t_0 = -1,0$, $a_0 = p_0 = 1$, $t = t_1, t_2, t_3, t_4, t_{\text{foc}} = 0$, $\gamma = 5/3$.

На фиг. 3 приведен пример выхода на автомодельный режим с постоянных начальных данных в случае $N = 2$. Для установления автомодельности (остановки полужирности волны сжатия) достаточно, чтобы давление на поршне выросло примерно в 10^2 раз по сравнению с начальным ($m_1 = \delta = 0$, $t_1 = -0,25$, $t_2 = -0,125$, $t_3 = -0,04$, $t_4 = -0,035$).

Устойчивость структур демонстрирует расчет, приведенный на фиг. 4 ($N = 1$). Начальные данные (в том числе максимум плотности) заданы в соответствии с аналитическим решением (3.7), которое устойчиво воспроизводится при росте давления на поршне в 10^5 раз ($\delta = -1,2$, $m_1 = 3,2$, $t_1 = -0,4$, $t_2 = -0,05$, $t_3 = -0,02$).

На фиг. 5 представлен расчет, иллюстрирующий образование структуры плотности в первоначально однородном газе при монотонном граничном режиме и локализацию газодинамических процессов в случае $N = 0$. В начальный момент давление на поршне в 50 раз больше давления газа, в результате чего происходит распад разрыва и от поршня отходит ударная волна, энтропия за которой распределена по закону, близкому к (1.2), $m_1 = 0$, $\delta \approx -0,8$. В дальнейшем давление на поршне изменяется по закону (1.3), (1.5), устанавливается *S*-режим сжатия. Возникшая структура плотности неподвижна по массовой координате и растет в соответствующем режиме с обострением $t_1 = -0,59$, $t_2 = -0,085$, $t_3 = -0,026$, $t_4 = -0,003$.

Изученные режимы с обострением обладают рядом интересных физических свойств. Наряду с безударным низкоэнтропийным сжатием имеют место эффекты локализации и образования газодинамических структур. Локализация означает принципиальную

возможность концентрировать и удерживать конечное время любое количество энергии в некоторой массе вещества, не затрагивая остальную его часть. Образование структур дает дополнительные способы управления процессом сжатия за счет создания немонотонных распределений температуры и плотности в сжимаемом веществе.

Авторы признательны С. П. Курдюмову, Н. В. Змитренко, Ю. А. Клокову и В. В. Степановой за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
2. Жданов С. К., Трубников Б. А. Оптимальное сжатие плазмы в Z- и θ -пинче.— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, № 6, с. 371—375.
3. Забабахин И. Е., Симоненко В. А. Сферическая центрированная волна сжатия.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 573—576.
4. Белокопъ В. А. О достижимости ультравысокого квазиодномерного сжатия.— Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 1, с. 86—89.
5. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельные режимы сжатия плазмы поршнем.— Тепло- и массоперенос. Минск: Изд-е Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1972, т. 8, с. 432—439.
6. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1306—1309.
7. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N- и S-режимы автоматического сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— ПМТФ, 1977, № 1, с. 3—23.
8. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн.— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702—715.
9. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Докл. АН СССР, 1975, т. 233, № 6, с. 1344—1347.
10. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 321—324.
11. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
12. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер.— Успехи матем. наук, 1941, т. 9, с. 212—248.
13. Ануфриева М. А., Демидов М. А., Михайлов А. П., Степанова В. В. Режимы с обострением в газовой динамике.— В сб.: Тепло- и массоперенос, Математические модели. Минск: Мысль, 1982, с. 19—25.
14. Ануфриева М. А., Михайлов А. П. Локализация газодинамических процессов при изоэнтропическом сжатии газа в режиме с обострением.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, с. 483—491.
15. Михайлов А. П., Степанова В. В. Локализация газодинамических процессов и структуры при адиабатическом сжатии вещества в режиме с обострением.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 921—928.
16. Гайфулин С. А., Захаров А. В., Змитренко Н. В., Карпов В. Я., Михайлов А. П., Мищенко Т. В., Самарский А. А. Программный комплекс для расчета уравнений одномерной газовой динамики с теплопроводностью.— В кн.: Пакеты прикладных программ: Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1983, с. 19—31.

Москва

Поступила в редакцию
11.VII.1984