

УДК 533.6.011

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО
ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ,
ОБТЕКАЕМЫХ ПОД УГЛАМИ АТАКИ И СКОЛЬЖЕНИЯ**

Гершбейн Э. А.¹, Крупа В. Г., Щелин В. С.

Рассматривается пространственное обтекание гладких затупленных тел с каталитической поверхностью гиперзвуковым потоком неравновесного диссоциирующего воздуха. Предлагается приближенный численный метод решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя (ГПВУС), позволяющий исследовать течения, не обладающие плоскостями симметрии. В этом методе на поверхности тела вводится ортогональная система координат (x^1, x^2) , связанная с линиями тока, касательные к которым параллельны составляющей вектора скорости набегающего потока, лежащей в касательной к поверхности тела плоскости. Система уравнений записывается в этой системе координат и опускаются производные по поперечной координате x^2 от всех искомых функций, за исключением давления P и составляющей вектора скорости в поперечном направлении u^2 . Производная $\partial u^2/\partial x^2$ находится из продифференцированного по x^2 уравнения импульсов в направлении x^2 и соответствующим образом упрощенного. Полученная система уравнений совпадает с исходной в окрестности критической точки и плоскостей симметрии, если последние существуют. Приводятся некоторые результаты расчетов обтекания под различными углами атаки и скольжения эллиптических параболоидов с различными случаями протекания каталитических реакций на поверхности тела.

В работе [1] исследовалось обтекание при наличии углов атаки и скольжения крыльев бесконечного размаха. Пространственные течения, обладающие плоскостью симметрии, исследовались в работах [2—4], в [2] рассматривалось треугольное крыло под большими углами атаки, в [3, 4] — тело сложной формы.

1. Постановка задачи. Уравнения ГПВУС при учете неравновесных химических реакций и многокомпонентной диффузии в пренебрежении баро- и термодиффузией и диффузионным термоэффектом записываются в следующем виде [5]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho u^i \sqrt{\frac{a}{a_{(ii)}}} \right) = 0, \quad \rho A_{\alpha\beta}^3 u^\alpha u^\beta = - \frac{\partial P}{\partial x^3}$$

$$\rho (D u^\gamma + A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha u^\beta) = - \varepsilon a^{\gamma\alpha} \sqrt{a_{(\gamma\gamma)}} \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3} \right)$$

$$\rho c_p D T = 2 \varepsilon D^* P + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu c_p}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) - \sum_{k=1}^N h_k^0 w_k^0 -$$

$$- \left(\sum_{k=1}^N c_{pk} I_k \right) \frac{\partial T}{\partial x^3} + \frac{2\mu}{K} B_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^3}$$

$$\rho D c_i + \frac{\partial I_i}{\partial x^3} = w_i^0, \quad i = 1, \dots, N - N_e$$

$$\rho D c_j^* + \frac{\partial I_j^*}{\partial x^3} = 0, \quad j = 1, \dots, N_e - 1$$

¹ Гершбейн Элеонор Аркадьевич (1937—1985 гг.) — автор монографии по гиперзвуковой аэродинамике и ряда основополагающих работ по теории пограничного и ударного слоев, газодинамике и теплообмену в многокомпонентных смесях газов.

$$\frac{\mu}{K} \frac{\partial (mc_n)}{\partial x^3} = \sum_{t=1}^N \frac{m^2}{m_t} S_{nt} (c_n I_t - c_t I_n), \quad n = 1, \dots, N-1$$

$$P = \frac{\rho T}{m}, \quad \sum_{j=1}^{Ne} I_j^* = 0, \quad \sum_{j=1}^{Ne} c_j^* = 1, \quad D^* \equiv \frac{u^\alpha}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

$$D \equiv D^* + u^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)} a_{(\beta\beta)}}}, \quad K = \varepsilon \text{Re}, \quad \mu_0 = \mu(T_0),$$

$$T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_{p\infty}}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad S_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0},$$

$$h = \sum_{k=1}^N c_k h_k^0, \quad c_p = \sum_{k=1}^N c_k c_{pk}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_\infty}{\rho_s}$$

Здесь по паре одинаковых индексов производится суммирование; по индексам, заключенным в круглые скобки, суммирование отсутствует; латинские индексы, если специально не оговорено другое, принимают значения 1, 2, 3, греческие — 1, 2; $a_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; вид коэффициентов $A_{\alpha\beta}^i$, зависящих от метрики, будет приведен ниже; $V_\infty u^\alpha$, $\varepsilon V_\infty u^3$ — физические составляющие вектора скорости, соответствующие осям x^1 , x^2 , εx^3 ; $\rho_\infty V_\infty^2 P$, $\rho_\infty \rho / \varepsilon$, $T_0 T$, $c_{p\infty} T_0 h$ — соответственно, давление, плотность, температура и энтальпия смеси газов, состоящей из N химических компонент; $\mu(T_0)$, μ , λ , $c_{p\infty} c_p$, σ , m — коэффициенты вязкости и теплопроводности, удельная теплоемкость, число Прандтля, молекулярная масса смеси; c_j , m_j , $c_{p\infty} T_0 h_j^0$, $c_{p\infty} c_{pj}$, $\rho_\infty V_\infty I_j$, $\rho_\infty V_\infty w_j / (\varepsilon R_0)$ — массовая концентрация, молекулярная масса, удельные энтальпия и теплоемкость, нормальная компонента вектора диффузионного потока, скорость образования j -й компоненты; c_k^* , $\rho_\infty V_\infty I_k^*$ — концентрация и нормальная компонента вектора диффузионного потока k -го элемента; Ne — число элементов; D_{ij} , S_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) — бинарные коэффициенты диффузии и числа Шмидта; $R_G = 2c_{p\infty} R$ — универсальная газовая постоянная; V_∞ — модуль вектора скорости набегающего потока. Индексы ∞ , w относятся к параметрам в набегающем потоке и на поверхности тела; индексом s отмечены параметры газа за ударной волной. Все линейные размеры отнесены к характерному размеру R_0 , которым является один из радиусов кривизны затупления.

При рассмотрении химических реакций будем считать, что в ударном слое присутствуют химические компоненты N_2 , N , O_2 , O , NO , между которыми протекают реакции диссоциации — рекомбинации вида $A_2 + M \rightleftharpoons 2A + M$, где A_2 , A , M — соответственно, символы молекул N_2 , O_2 , атомов N , O и третьей частицы, в качестве которой может выступать любая из пяти компонент, реакция диссоциации — рекомбинации вида $NO + M \rightleftharpoons N + O + M$ и обменные реакции $NO + O \rightleftharpoons N + O_2$, $NO + N \rightleftharpoons O + N_2$, $N_2 + O_2 \rightleftharpoons 2NO$.

Зависимости констант скоростей прямых и обратных реакций от температуры брались из [6].

При расчете удельных теплоемкостей и энтальпии компонент воздуха использовались данные работы [7]. Предполагалось, что внутренние степени свободы молекул возбуждены равновесно. Значения приведенных интегралов столкновений $\Omega^{(\alpha,\beta)*}(\bar{T})$, необходимых для вычисления коэффициентов переноса, аппроксимировались в зависимости от приведенной

температуры $\bar{T} = kT/\varepsilon$ на основании данных [8] для потенциала Ленарда — Джонса. Значения силовых констант брались из [9]. Коэффициенты переноса вычислялись по формулам работ [10, 11].

В качестве граничных условий для уравнений (1.1) на ударной волне при $x^3 = x_s^3(x^1, x^2)$ будем задавать обобщенные условия Рэнкина — Гюгонио, которые в гиперзвуковом приближении в системе координат $\{x^i\}$ имеют вид

$$(1.2) \quad \rho \left(u^3 - \frac{u^\alpha}{V a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial x_s^3}{\partial x^\alpha} \right) = u_\infty^3$$

$$u_\infty^3 (u^\gamma - u_\infty^\gamma) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3}, \quad P = (u_\infty^3)^2$$

$$u_\infty^3 (c_i - c_{i\infty}) + I_i = 0, \quad i = 1, \dots, N - Ne$$

$$u_\infty^3 (c_j^* - c_{j\infty}^*) + I_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, Ne - 1$$

$$u_\infty^3 (H - H_\infty - (u_\infty^3)^2) = q + \frac{2\mu}{K} B_{\alpha\beta} u^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^3}$$

$$q = \frac{\mu c_p}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3} - \sum_{k=1}^N h_k^\circ I_k, \quad H = h^\circ + B_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

При задании граничных условий на поверхности тела будем пренебрегать скоростью скольжения, скачками температуры и концентраций компонент. Граничные условия для компонент скорости на непроницаемой поверхности следующие:

$$x^3 = 0, \quad u^\alpha = 0, \quad u^3 = 0$$

Граничное условие для определения равновесной температуры поверхности тела, записанное без учета отвода тепла внутрь тела, имеет вид

$$(1.3) \quad q = \Gamma T^4, \quad \Gamma = 2\varepsilon\sigma_B T_0^4 / (\rho_\infty V_\infty^3)$$

(ε_T — коэффициенты черноты поверхности, σ_B — постоянная Стефана — Больцмана).

При протекании на поверхности тела гетерогенных каталитических реакций имеем

$$(1.4) \quad I_i = r_i^\circ, \quad i = 1, \dots, N - Ne$$

$$I_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, Ne - 1$$

Здесь $\rho_\infty V_\infty r_i^\circ$ — поверхностная скорость образования i -го компонента в результате всех гетерогенных каталитических реакций.

Рассматривались две модели реакции первого порядка с постоянными или зависящими от температуры константами скоростей гетерогенных каталитических реакций:

$$(1.5) \quad r_i^\circ = -\rho K_{w_i} c_i, \quad i = O, N, NO$$

Здесь

$$V_\infty K_{w_O} = 3 \text{ м/с}, \quad V_\infty K_{w_N} = 1 \text{ м/с} \text{ (модель I)}$$

или

$$K_{w_*} = \sqrt{\frac{RT}{2\pi m_*}} a_* \exp\left(-\frac{E_*}{T_k}\right), \quad a_O = 16,0, \quad a_N = 0,071$$

* = O, N; $E_O = 10271 \text{ К}$, $E_N = 2219 \text{ К}$, где T_k — температура в градусах Кельвина (модель II) [12]. В обеих моделях предполагалось $r_{NO} = 0$.

2. Метод решения уравнения ГПВУС. Упрощение исходной постановки. Используем в качестве поверхностной системы координат систему x^1, x^2 ,

связанную с линиями тока ($x^2 = \text{const}$), касательные к которым совпадают с составляющими вектора скорости набегающего потока, лежащей в касательной к поверхности тела плоскости. Как показывают численные и приближенные аналитические решения [13] при малых числах Re , линии тока в ударном слое мало отличаются от базисных линий.

Запишем (1.1) в данной системе координат (x^1, x^2) и опустим производные по x^2 у всех функций, за исключением P и u^2 . Далее введем $w \equiv \equiv \partial u^2 / \partial x^2$, для определения которой к уравнению импульсов в проекции на x^2 применим оператор $\partial / \partial x^2$, после чего опустим производные от искомых функций по x^2 .

В результате получаем следующую систему ($h_1^2 \equiv a_{11}$, $h_2^2 \equiv a_{22}$):

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \frac{\partial}{\partial x^1} (\rho u^1 h_2) + \rho h_1 w + \frac{\partial}{\partial x^3} (\rho u^3 h_1 h_2) = 0 \\
 & \rho \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial u^1}{\partial x^3} + A_{\alpha\beta}^1 u^\alpha u^\beta \right) = - \frac{\varepsilon}{h_1} \frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \right) \\
 & \rho \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial u^2}{\partial x^3} + A_{\alpha\beta}^2 u^\alpha u^\beta \right) = - \frac{\varepsilon}{h_2} \frac{\partial P}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \right) \\
 & \rho \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial w}{\partial x^3} + \frac{\partial A_{11}^2}{\partial x^2} (u^1)^2 + 2A_{12}^2 u^1 w + \frac{w^2}{h_2} \right) = \\
 & = - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial w}{\partial x^3} \right) \\
 & \frac{\partial P}{\partial x^3} = - \rho A_{\alpha\beta}^3 u^\alpha u^\beta \\
 & \rho c_p \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) = 2\varepsilon \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{u^2}{h_2} \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu c_p}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) - \sum_{k=1}^N h_k \circ w_k - \left(\sum_{k=1}^N c_{pk} I_k \right) \frac{\partial T}{\partial x^3} + \\
 & + \frac{2\mu}{K} B_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^3} \\
 & \rho \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial c_i}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial c_i}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial I_i}{\partial x^3} = w_i, \quad i = N - Ne, \dots, N \\
 & \rho \left(\frac{u^1}{h_1} \frac{\partial c_j^*}{\partial x^1} + u^3 \frac{\partial c_j^*}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial I_j^*}{\partial x^3} = 0, \quad j = 1, \dots, Ne
 \end{aligned}$$

При записи системы (2.1) использовалась ортогональность x^1, x^2 на поверхности.

Граничные условия для системы (2.1) остаются прежними ((1.2)–(1.5)); граничные условия для w получаются дифференцированием (1.2) по x

$$(2.2) \quad w = 0, \quad x^3 = 0; \quad w = \frac{\mu}{Ku_\infty^3} \frac{\partial w}{\partial x^3}, \quad x^3 = x_s^3(x^1, x^2)$$

Здесь учтено, что $u_\infty^2 = 0$ в силу выбора x^1 и x^2 . Для определения $\partial P / \partial x^2$ и $\partial^2 P / (\partial x^2)^2$ можно использовать пятое уравнение системы (2.1), продифференцированное по x^2 и аналогичным образом упрощенное. Однако для упрощения задачи составляющие градиента давления $\partial P / \partial x^2$ задавались по формуле Ньютона.

Следует отметить, что в теории пограничного слоя широко используется метод осесимметрической аналогии, согласно которому уравнения записываются в системе координат, связанной с линиями тока невязкого течения, и в них опускаются члены, содержащие u^2 и $\partial / \partial x^2$. Наибольшая погрешность метода может возникнуть в окрестности критической точки, в окрестности линии растекания ($u^2 = 0$, $\partial u^2 / \partial x^2 = 0$ (1)) и т. д. В отличие от метода осесимметрической аналогии данный метод, который может быть

использован для решения уравнений пространственного пограничного слоя, в окрестности плоскости симметрии течения является точным (если $\partial^2 P / (\partial x^2)^2$ задавать по формуле Ньютона).

Вычисление метрических коэффициентов. Коэффициенты $A_{\alpha\beta}^i$ в ортогональной на поверхности тела системе координат x^1, x^2 имеют вид [5]

$$A_{\alpha\alpha}^\beta = -2A_{12}^\alpha = -\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\beta} (\beta \neq \alpha), \quad A_{(\alpha\alpha)}^\alpha = 0, \quad A_{\alpha\beta}^3 = \frac{b_{\alpha\beta}}{h_{(\alpha)} h_{(\beta)}}$$

Для вычисления $h_\alpha, \partial h_\alpha / \partial x^\beta, b_{\alpha\beta}$ поступим следующим образом. Пусть поверхность S в декартовой системе координат задана уравнением $z^3 = f(z^1, z^2)$. Параметризуя поверхность S обычным способом $y^\alpha = z^\alpha, z^3 = f(y^1, y^2)$ (ось y^3 направлена по нормали к телу), получим коэффициенты первой и второй квадратичной формы (в системе y^1, y^2, y^3)

$$(2.3) \quad a_{\alpha\alpha} = 1 + (g_\alpha)^2, \quad a_{12} = g_1 g_2, \quad b_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} / \sqrt{a}$$

$$a = \det \| a_{\alpha\beta} \|, \quad g_\alpha = \partial f / \partial y^\alpha, \quad g_{\alpha\beta} = \partial^2 f / \partial y^\alpha \partial y^\beta$$

Пусть единичный вектор набегающего потока в системе z^1, z^2, z^3 имеет вид $V_\infty = V_0^i e_i, V_0^i V_0^i = 1$. Тогда в системе y^1, y^2, y^3 его компоненты $u_\infty^1, u_\infty^2, u_\infty^3$ таковы:

$$a u_\infty^1 = (1 + g_2^2) V_0^1 - g_1 g_2 V_0^2 + g_1 V_0^3 \equiv V^1$$

$$a u_\infty^2 = (1 + g_1^2) V_0^2 - g_1 g_2 V_0^1 + g_2 V_0^3 \equiv V^2$$

$$\sqrt{a} u_\infty^3 = g_1 V_0^1 + g_2 V_0^2 - V_0^3$$

Вектор, ортогональный на поверхности вектору (u_∞^1, u_∞^2) , имеет компоненты $(U^1 / \sqrt{a}, U^2 / \sqrt{a})$

$$U^1 \equiv \pm (g_2 V_0^3 + V_0^2), \quad U^2 \equiv \mp (g_1 V_0^3 + V_0^1)$$

Пусть x^1, x^2 — система, введенная в п. 2, тогда

$$(2.4) \quad \left. \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^1} \right|_{x^2} = \frac{h_1}{\sqrt{a} V_t} V^\alpha, \quad \left. \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^2} \right|_{x^1} = \frac{h_2}{\sqrt{V_t}} U^\alpha$$

$$V_t \equiv (g_1 V_0^3 + V_0^1)^2 + (g_2 V_0^2 + V_0^1)^2 + (g_2 V_0^1 - g_1 V_0^2)^2$$

Для нахождения h_2 используем метод, аналогичный [14]. Будем считать, что функции $y^\alpha(x^1, x^2)$ достаточно гладкие и существуют обратные функции $x^\alpha(y^1, y^2)$. Пусть

$$(2.5) \quad G \equiv \left. \frac{\partial y^2}{\partial y^1} \right|_{x^2} = \frac{V^2}{V^1}$$

$$(2.6) \quad F \equiv \left. \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \right|_{y^1} = \left. \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \right|_{x^2} \left. \frac{\partial x^1}{\partial x^2} \right|_{y^1} + \left. \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \right|_{x^1} = h_2 \frac{U^2 V^1 - U^1 V^2}{V_t^{1/2} V^1} = h_2 \frac{V_t^{1/2}}{V^1}$$

В равенстве (2.6) было использовано (2.4). Предполагая непрерывность $\partial^2 y^2 / \partial y^1 \partial x^2$ и $\partial^2 y^2 / \partial x^2 \partial y^1$, получим

$$(2.7) \quad \frac{\partial F}{\partial y^1} + G \frac{\partial F}{\partial y^2} = F \frac{\partial G}{\partial y^2}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.7), найдем

$$(2.8) \quad V^\alpha \frac{\partial h_2^*}{\partial y^\alpha} - h_2^* \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) = 0, \quad h_2^* = h_2 V_t^{1/2}$$

Построим решение уравнения (2.8). Пусть $y^1(s, \tau), y^2(s, \tau)$ — решение системы уравнений для определения линий тока

$$dy^\alpha / ds = V^\alpha(y^1, y^2), \quad y^\alpha(0, \tau) = y_0^\alpha(\tau)$$

Тогда

$$h_2(s, \tau) = \frac{h_{20}^*(\tau)}{V_t^{1/2}} \exp \int_0^s \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) \Big|_{y^\alpha = y^\alpha(s^1, \tau)} ds^1$$

$$h_2^*(0, \tau) = h_0^*(\tau), \quad ds/dx^1 = h_1/(aV_t^{1/2})$$

Аналогично можно найти h_1 , однако поступим следующим образом. Так как

$$(2.9) \quad \frac{\partial y^2}{\partial y^1} \Big|_{x^1} = - \frac{(q_1 V_0^3 + V_0^1)}{q_2 V_0^3 + V_0^2}$$

то первый интеграл (2.9) имеет вид

$$fV_0^3 + V_0^2 y^2 + V_0^1 y^1 = g(x^1)$$

Выбирая $g(x^1) = (x^1)^2/2$, получим

$$(2.10) \quad (x^1)^2 = 2(V_0^1 y^1 + V_0^2 y^2 + fV_0^3)$$

$$g^{11}(x^1, x^2) = a^{\alpha\beta}(y^1, y^2) \frac{\partial x^1}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^1}{\partial y^\beta} = \frac{V_t}{a(x^1)^2}$$

В равенстве (2.10) были использованы соотношения (2.3). Тогда

$$h' = (g^{11})^{-1/2} = x^1 a^{1/2} V_t^{-1/2}$$

Теперь можно вычислить все коэффициенты $A_{\alpha\beta}^i$ как функции от y^1, y^2 , пользуясь формулами перехода от одной системы координат к другой

$$b_{\alpha\beta}^1(x^1, x^2) = b_{\lambda\gamma}(y^1, y^2) \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\beta}$$

и вычисляя производные по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$$

где $\partial y^\beta/\partial x^\alpha$ находятся из (2.4).]

3. Численное решение. Для численного решения задачи вводились новые переменные типа переменных Дородницына

$$(3.1) \quad \xi^\alpha = x^\alpha, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho h_1 h_2 dx^3, \quad \Delta = \int_0^{x^3} \rho h_1 h_2 dx^3$$

и новые искомые функции по формулам

$$u^1 = u_*^1(\xi^1, \xi^2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}, \quad u^2 = u_*^2(\xi^1, \xi^2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}, \quad w = w_*(\xi^1, \xi^2) \frac{\partial \varphi_w}{\partial \zeta}$$

$$\rho h_1 h_2 u^3 = - \frac{\partial}{\partial x^1} (\Delta \varphi_1^* \varphi_1) - \Delta \varphi_w^* \varphi_w, \quad \varphi_\alpha^* = \frac{u_*^\alpha}{h_\alpha}, \quad \varphi_w^* = \frac{w_*}{h_2}$$

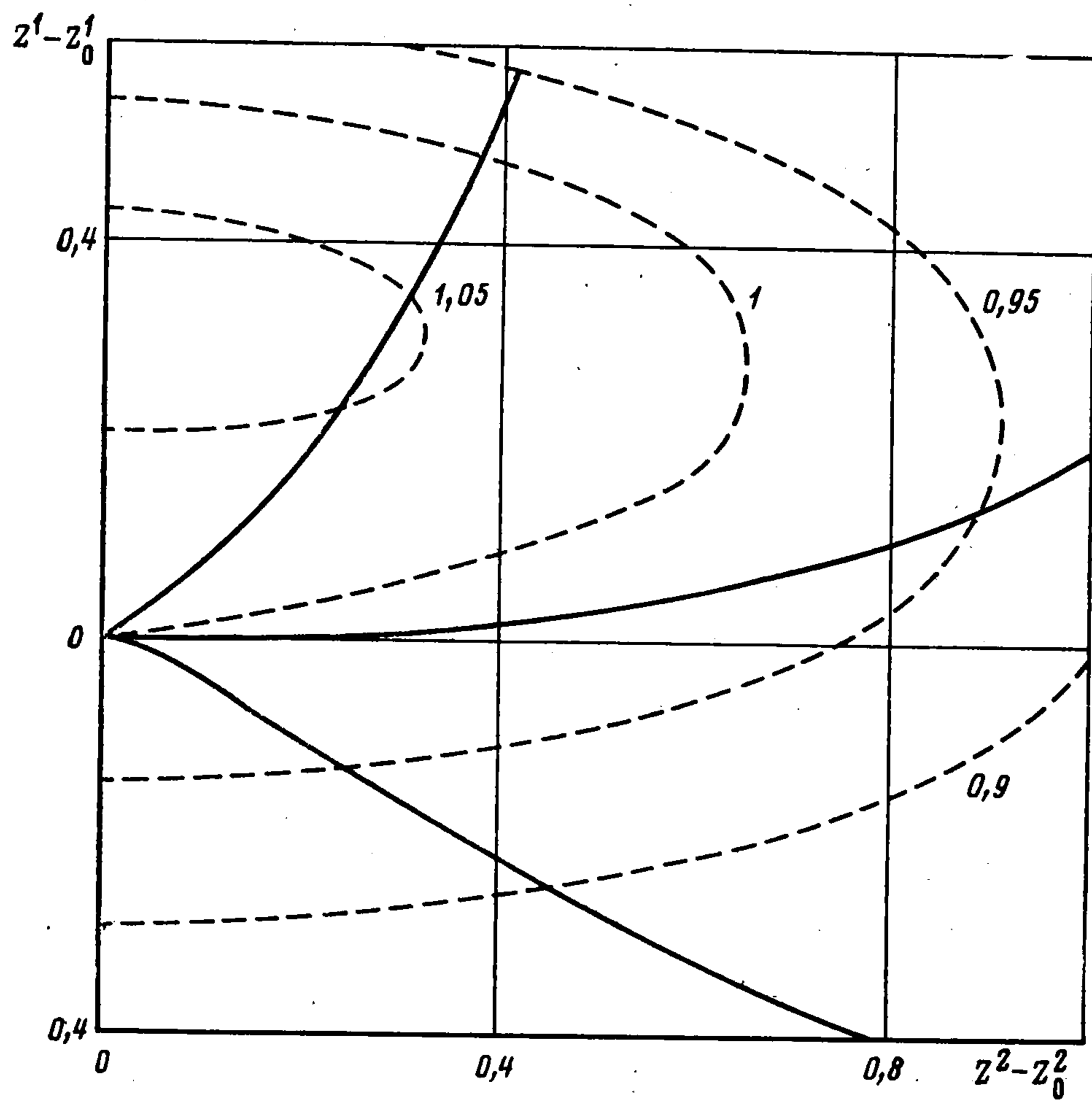
$$T = T^*(\xi^1, \xi^2) \theta, \quad u_*^1 = x^1, \quad u_*^2 = x^1, \quad w_* = h_2, \quad T^* = (u_\infty^3)^2$$

$$X_i = \frac{h_1 h_2}{\Delta} I_i, \quad i = 1, \dots, N - Ne;$$

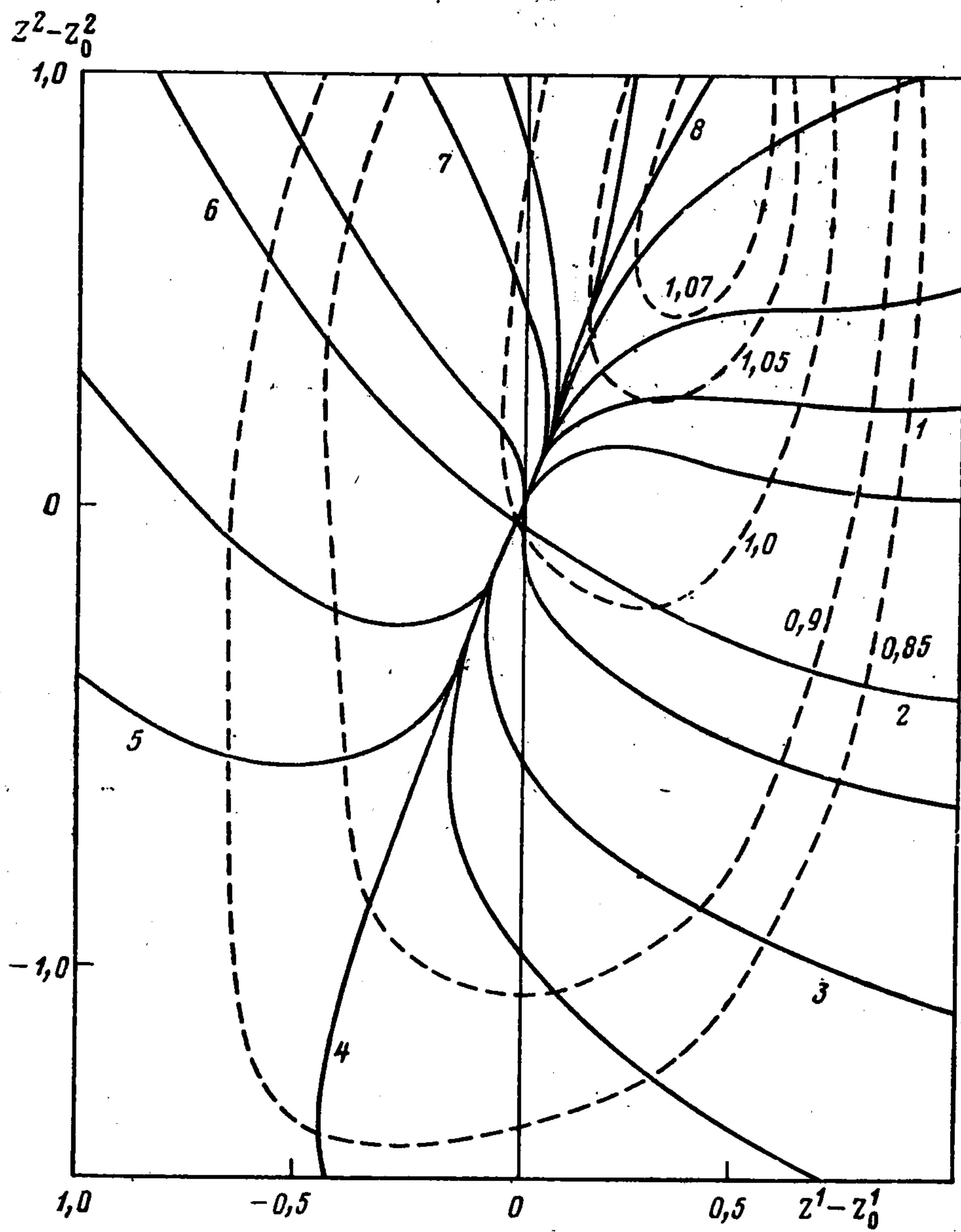
$$X_j^* = \frac{h_1 h_2}{\Delta} I_j^*; \quad j = 1, \dots, Ne$$

Полученная система решалась методом работы [1].

В качестве начальных условий использовалось решение уравнений ГПВУС в окрестности критической точки, записанных в системе координат, связанных с главными кривизнами. Затем находились линии тока, вычислялись метрические коэффициенты и коэффициенты уравнений и производилось решение ГПВУС вдоль каждой фиксированной линии тока.



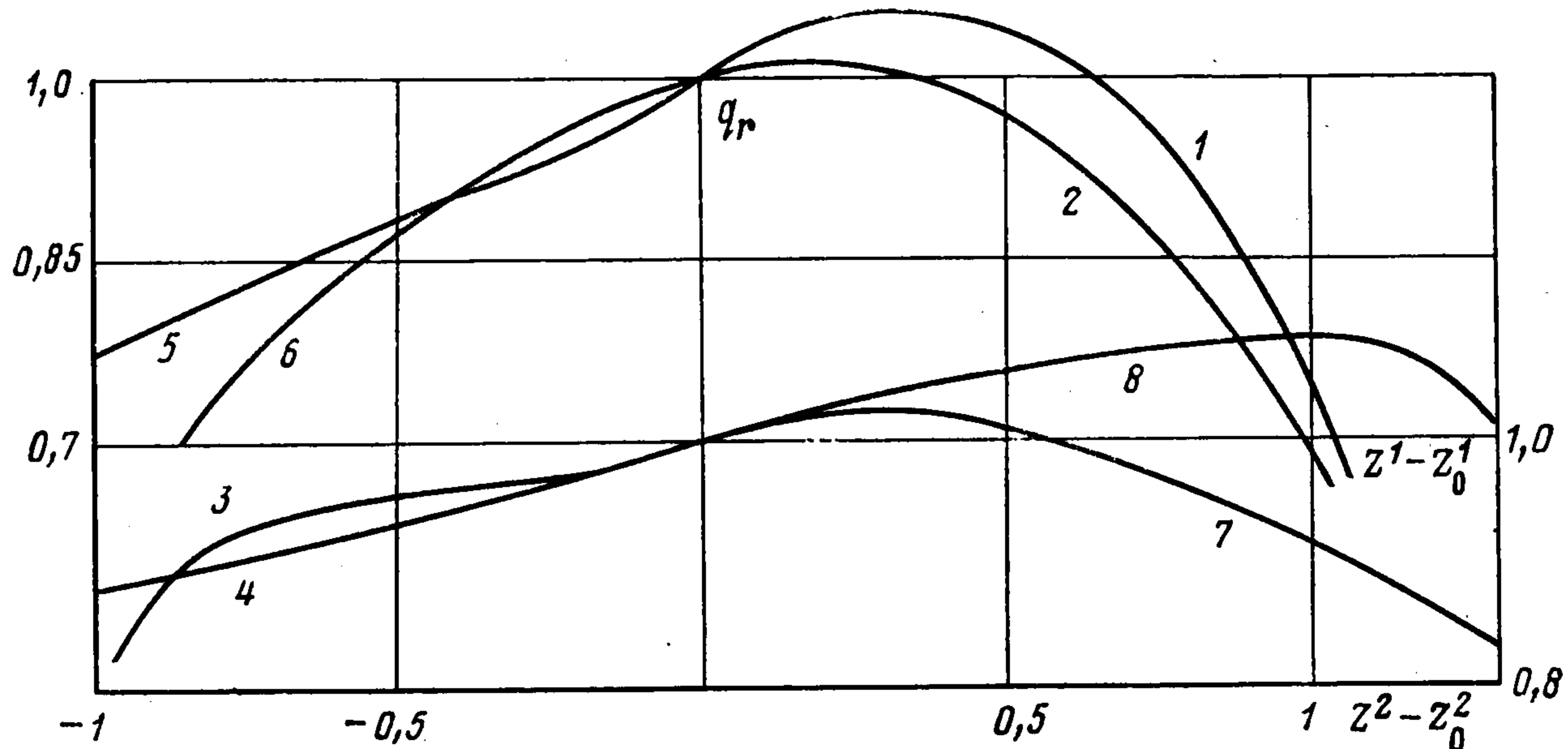
Фиг. 1



Фиг. 2

В качестве примера рассматривалось обтекание эллиптических параболоидов, уравнение которых в декартовой системе координат, связанных с вершиной, $2z^3 = (z^1)^2 + k(z^2)^2$, где $k = R_1/R_2$, $R_1 = R_0 = 0,5$ м. Единичный вектор скорости набегающего потока задавался компонентами $\{V_0^i\}$ в декартовой системе координат. Параметры набегающего потока были следующие: $\rho_\infty = 5,9 \cdot 10^{-8}$ г/см³, $V_\infty = 7,25$ км/с, коэффициент черноты $\varepsilon_I = 0,85$.

На фиг. 1 приведены линии тока $x^2 = \text{const}$ (сплошные линии), рассчитанные для случая обтекания эллиптического параболоида $k = 0,4$ под углом атаки 45° , $V_0 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ (здесь и далее z_0^1, z_0^2 — координаты критической точки). Там же приведены изолинии тепловых потоков q_r (штриховые линии, число у изолиний равно тепловому потоку, отнесенному к тепловому потоку q_0 в критической точке: $q_0 = 34,5$ Вт/см²), рассчитанные для модели II каталитической активности поверхности.



Фиг. 3

Для части линий тока максимум теплового потока сдвинут относительно критической точки, причем абсолютный максимум лежит в плоскости симметрии. Таким образом, имеется целая область, ограниченная изолинией $q_r = 1,0$, в которой тепловой поток больше потока в критической точке.

На фиг. 2 приведены линии тока $x^2 = \text{const}$ (сплошные линии) и изолинии тепловых потоков q_r (штриховые линии) для случая обтекания эллиптического параболоида $k = 0,5$ под углами атаки и скольжения, $V_0 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ для модели I гетерогенных каталитических реакций. Здесь также имеется область с тепловыми потоками большими, чем тепловой поток в критической точке ($q_0 = 21,3$ Вт/см²).

На фиг. 3 приведено распределение q_r вдоль некоторых линий тока, кривые 1—8 соответствуют линиям тока 1—8 на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Гиперзвуковой химически неравновесный вязкий ударный слой на крыльях с каталитической поверхностью. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 6, с. 127—135.
2. Афонина Н. Е., Власов А. Ю., Громов В. Г. Численное исследование теплообмена на поверхности треугольного крыла, обтекаемого гиперзвуковым потоком воздуха под большими углами атаки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 5, с. 196—199.
3. Rakich J. V., Venkatapathy E., Tannehill J. C., Prabhu D. Numerical solution of space shuttle orbiter flowfield. — J. Spacecraft and Rockets, 1984, v. 21, No. 1, p. 9—15.
4. Kim M. D., Swaminathan S., Lewis C. H. Three-dimensional nonequilibrium viscous shock-layer flow over the Space Shuttle orbiter. — J. Spacecraft and Rockets, 1984, v. 21, No. 1, p. 29—35.
5. Гершбейн Э. А. К теории пространственного обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого газа при наличии вдува. — В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 144—156.
6. Miner E. W., Lewis C. H. Hypersonic ionizing air viscous shock-layer flows over nonanalytic blunt bodies. — NASA, 1975, No. GR-2550. 100 p.
7. Гурвич Л. В., Вейц И. В., Медведев В. А. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справ. изд. в 4 т. Т. 1. Кн. 2. М.: Наука, 1978. 328 с.
8. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.

9. *Svehla R. A.* Estimated viscosities and thermal conductivities of gases at high temperatures.— NASA, TR, 1962, No. R-132. 120 p.
10. *Wilke C. R.* A viscosity equation for gas mixtures.— J. Chem. Phys., 1950, v. 18, No. 4, p. 517—519.
11. *Mason E. A., Saxena S. C.* Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures.— Phys. Fluids, 1958, v. 1, No. 5, p. 361—369.
12. *Scott C. D.* Catalytic recombination of nitrogen and oxygen on high-temperature reusable surface insulation.— AIAA Pap., 1980, No. 80.— 1477. 9 p.
13. *Герштейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А.* Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 72—92.
14. *Rakich J. V., Mateer G. G.* Calculation of metric coefficients for streamline coordinates.— AIAA Journal, 1972, v. 10, No. 11, p. 1538—1540.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1985